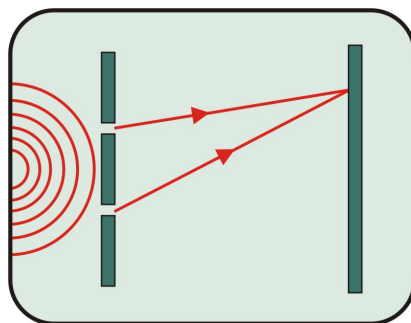


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

XIV. Interference a ohyb



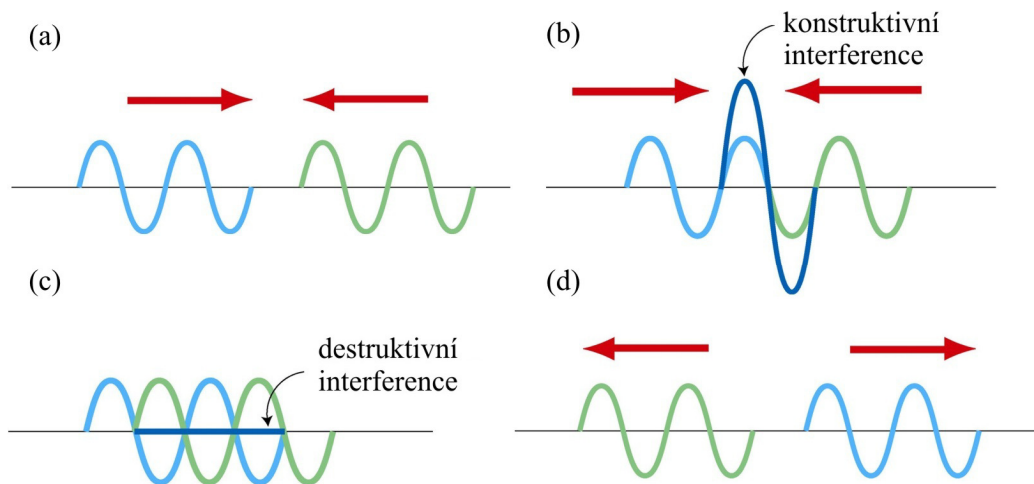
Obsah

14	INTERFERENCE A OHYB	2
14.1	SUPERPOZICE VLN	2
14.2	YOUNGŮV DVOJŠTĚRBINOVÝ EXPERIMENT	4
14.3	ROZLOŽENÍ INTENZITY	7
14.4	OHYB (DIFRAKCE)	11
14.5	OHYB NA ŠTĚRBINĚ	11
14.6	OHYBOVÝ OBRAZEC NA ŠTĚRBINĚ	13
14.7	OHYBOVÝ OBRAZEC NA DVOJŠTĚRBINĚ	16
14.8	OHYBOVÁ MŘÍŽKA	17
14.9	SHRNUTÍ	18
14.10	DODATEK: VÝPOČET CELKOVÉHO ELEKTRICKÉHO POLE	19
14.11	ŘEŠENÉ ÚLOHY	22
14.12	TÉMATICKÉ OTÁZKY	26
14.13	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	27

14 Interference a ohyb

14.1 Superpozice vln

Uvažujme, že v určité části prostoru prochází v témže čase dvě či několik vln. Podle principu superpozice je výsledný rozruch jednoduše dán vektorovým či algebraickým součtem jednotlivých rozruchů. Interference je kombinací dvou či více vln do tvaru složené vlny podle tohoto principu. Základní myšlenka principu superpozice je zobrazena na obrázku 14.1.1.



Obr. 14.1.1: Superpozice vln. (b) konstruktivní interference; (c) destruktivní interference.

Předpokládejme dvě vlny,

$$\psi_1(x, t) = \psi_{10} \sin(k_1 x \pm \omega_1 t + \varphi_1); \quad \psi_2(x, t) = \psi_{20} \sin(k_2 x \pm \omega_2 t + \varphi_2). \quad (14.1.1)$$

Výsledná vlna je jednoduše

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{10} \sin(k_1 x \pm \omega_1 t + \varphi_1) + \psi_{20} \sin(k_2 x \pm \omega_2 t + \varphi_2). \quad (14.1.2)$$

Interference je konstruktivní, pokud je výsledná vlna $\psi(x, t)$ větší než vlny původní (obrázek 14.1.1 b) a destruktivní, pokud je menší (obrázek 14.1.1 c).

Uvažujme například superpozici následujících dvou vln v čase $t = 0$:

$$\psi_1(x) = \sin x; \quad \psi_2(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (14.1.3)$$

Výslednou vlnu získáme jako součet

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \sin x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = (1 + \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} \cos x, \quad (14.1.4)$$

kde jsme použili součtový vzorec

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (14.1.5)$$

a $\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$. Následně využijeme rovnosti

$$\begin{aligned}
 a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right] = \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x] = \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),
 \end{aligned}
 \tag{14.1.6}$$

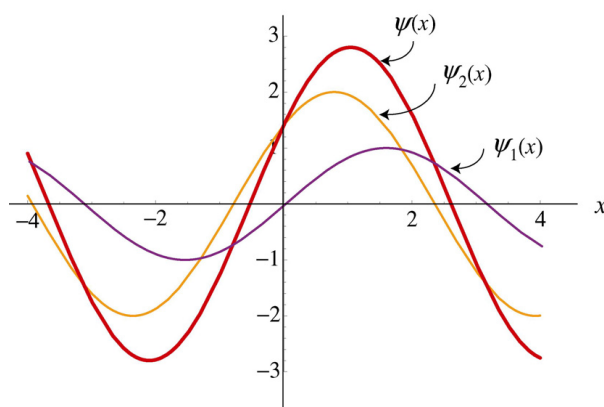
ve které jsme označili

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right),
 \tag{14.1.7}$$

což vede k výsledku

$$\psi(x) = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \sin(x + \varphi),
 \tag{14.1.8}$$

kde $\varphi = \tan^{-1}(\sqrt{2}/(1+\sqrt{2})) = 30,4^\circ = 0,53 \text{ rad}$. Superpozice vln je vyobrazena na obrázku 14.1.2.



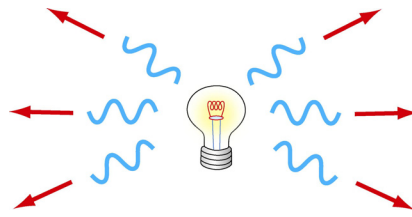
Obr. 14.1.2 Superpozice dvojice sinusových vln.

Vidíme, že vlna má maximální amplitudu, když $\sin(x + \varphi) = 1$, nebo když $x = \pi/2 - \varphi$. Jde tedy o konstruktivní interferenci. Naopak destruktivní interference nastává pro $x = \pi - \varphi = 2,61 \text{ rad}$, kde $\sin(\pi) = 0$.

Chceme-li získat interferenční obrazec, musí použité světlo splňovat dvě podmínky:

- (i) Zdroje světla musí být *koherentní*. To znamená, že vlnoplochy ze zdrojů musí udržovat konstantní fázový posun. Jsou-li například dvě vlny vůči sobě vzájemně posunuty o $\varphi = \pi$, nesmí se tento rozdíl měnit s časem.
- (ii) Světlo musí být *monochromatické*. To znamená, že světlo má jen jednu vlnovou délku $\lambda = 2\pi/k$.

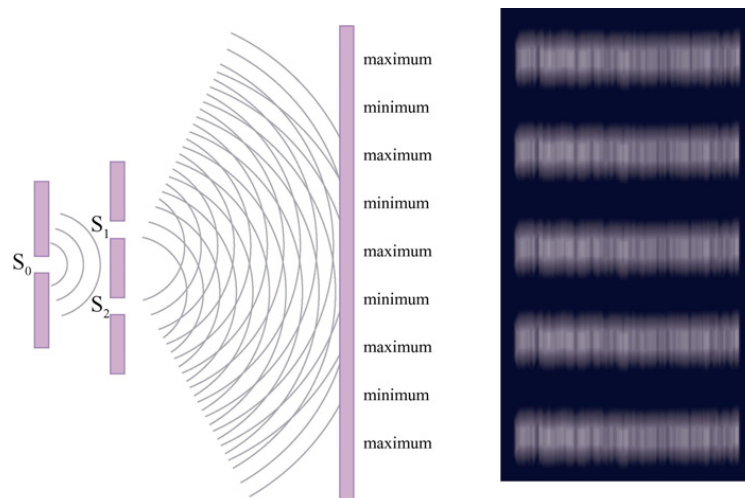
Světlo emitované povrchem žárovky není koherentní ani monochromatické, protože se skládá z rozdílných vlnových délek, které neudržují konstantní fázový rozdíl. Proto nemůžeme pozorovat interferenční obrazce.



Obr. 14.1.3: Nekoherentní světelný zdroj.

14.2 Youngův dvojštěrbinový experiment

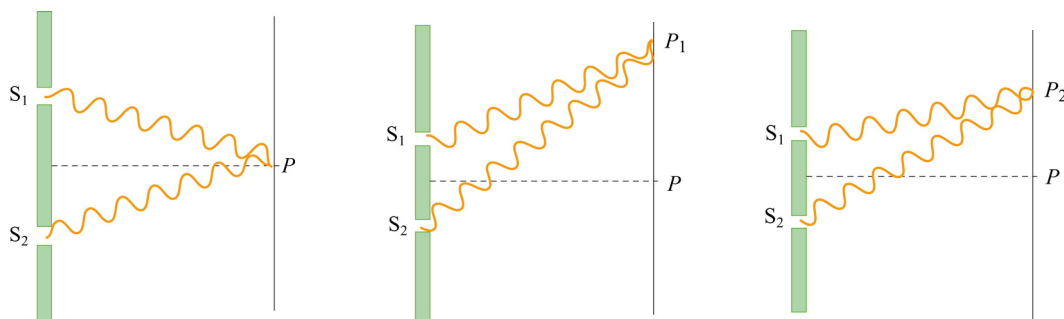
V roce 1801 Thomas Young provedl experiment, kterým prokázal vlnovou podstatu světla. Schéma uspořádání dvojštěrbinového experimentu je ukázáno na obrázku 14.2.1.



Obr. 14.2.1: Youngův dvojštěrbinový experiment.

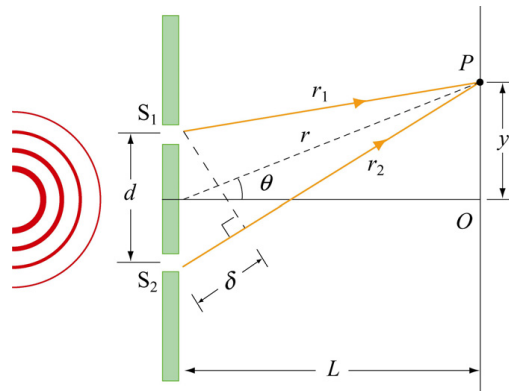
Světlo monochromatického zdroje dopadá na první stínítko se štěrbinou S_0 . Světlo, které projde, dopadá následně na druhé stínítko se dvěma rovnoběžnými štěrbinami S_1 a S_2 , které se tak stávají zdroji koherentního světla. Takto získané světelné vlny spolu interferují a na zobrazující matnici vytvářejí interferenční obrazec. Jasně oblasti (světlé proužky) reprezentují interferenční maxima, temné mezery interferenční minima.

Na obrázku 14.2.2 jsou ukázány dráhy světla, na nichž dojde ke konstruktivní či destruktivní interferenci



Obr. 14.2.2: Konstruktivní interference v bodě P (nalevo) a v bodě P_1 (uprostřed).
Destruktivní interference v bodě P_2 (napravo).

Geometrie dvojštěrbinového experimentu je vykreslena na obrázku 14.2.3.



Obr. 14.2.3: Dvojštěrbinový experiment.

Uvažujme světlo dopadající na stínítko v bodě P , který se nachází ve vzdálenosti y od bodu O ležícího v kolmé vzdálenosti L od dvojštěrbinové soustavy. Štěrbiny jsou od sebe vzdáleny d . Světlo ze štěrbin 2 musí, oproti paprsku ze štěrbin 1, navíc urazit dráhu $\delta = r_2 - r_1$. Tato vzdálenost navíc se nazývá „dráhový rozdíl“. Podle obrázku 14.2.3, dostaneme s využitím kosinové věty:

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \sin \theta, \quad (14.2.1)$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + dr \sin \theta. \quad (14.2.2)$$

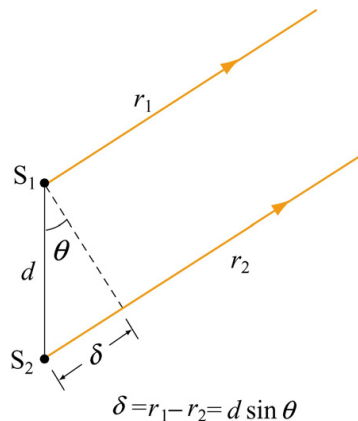
Odečtením rovnice (14.2.1) od rovnice (14.2.2) dostaneme

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2dr \sin \theta. \quad (14.2.3)$$

V limitě $L \gg d$, což znamená, že vzdálenost ke stínítku je mnohem větší než vzdálenost mezi štěrbinami, můžeme součet r_1 a r_2 přibližně nahradit jako $r_1 + r_2 \approx 2r$. Pro dráhový rozdíl pak dostáváme

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta. \quad (14.2.4)$$

V této limitě můžeme oba paprsky r_1 a r_2 považovat za rovnoběžné (viz obrázek 14.2.4).



Obr. 14.2.4: Dráhový rozdíl mezi dvěma paprsky za předpokladu $L \gg d$.

Jestli vlny mají či nemají shodnou fázi, je dáno právě velikostí δ . Konstruktivní interference nastává, když je δ rovno nule nebo celistvému násobku vlnové délky:

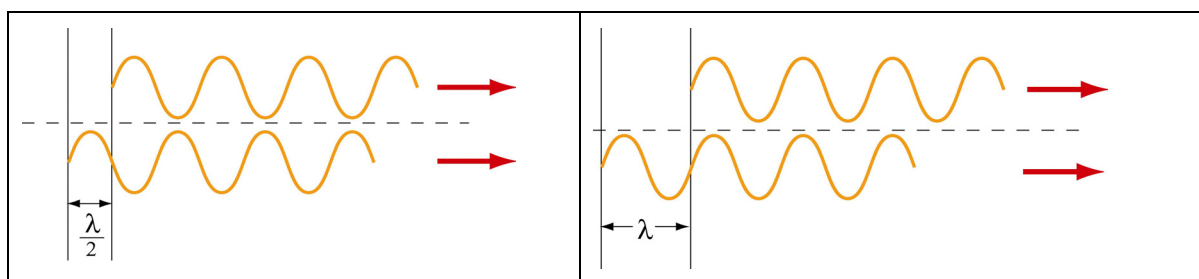
$$\delta = d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{konstruktivní interference}), \quad (14.2.5)$$

kde číslo m se nazývá *řád interference*. Maximum nultého řádu ($m = 0$) odpovídá středovému jasnému proužku v $\theta = 0$, a maxima prvního řádu leží po obou stranách od tohoto centrálního proužku.

V opačném případě, když je δ rovno lichým násobkům poloviny vlnové délky, se vlny v bodě P setkají ve fázi posunuté o 180° a výsledkem této destruktivní interference bude tmavý proužek na stínítku. Podmínka destruktivní interference je splněna když

$$\delta = d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{destruktivní interference}). \quad (14.2.6)$$

Na obrázku 14.2.5, vidíme, jak dráhový rozdíl $\delta = \lambda/2$ ($m = 0$) vede na destruktivní interferenci a $\delta = \lambda$ ($m = 1$) má za následek interferenci konstruktivní.



Obr. 14.2.5: *Nalevo* – destruktivní interference. *Napravo* – konstruktivní interference.

Polohu proužků měříme svisle od centrálního bodu O . Mimo toho, že $L \gg d$, musí být také splněna podmínka, že vzdálenost mezi šterbinami je mnohem větší než vlnová délka monochromatického světla, tj. $d \gg \lambda$. Z těchto podmínek vyplývá, že úhel θ je velmi malý, a proto

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{L}. \quad (14.2.7)$$

Dosazením tohoto výrazu do podmínek získaných pro konstruktivní a destruktivní interferenci (14.2.5) a (14.2.6), získáme pro polohy jasných a tmavých proužků vztahy

$$y_{\max} = m \frac{\lambda L}{d}, \quad (14.2.8)$$

$$y_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}. \quad (14.2.9)$$

P Příklad 14.1: Dvojšterbinový experiment

Mějme dvojšterbinové zařízení, kde $d = 0,15$ mm, $L = 120$ cm, $\lambda = 833$ nm a $y = 2$ cm.

- Jaký bude fázový rozdíl δ dvou paprsků, které se setkají v bodě P ?
- Vyjádřete dráhový rozdíl v závislosti na λ .
- Odpovídá poloze bodu P maximum, minimum nebo stav mezi nimi?

Řešení:

(a) Dráhový rozdíl je dán jako $\delta = d \sin \theta$. Pokud $L \gg y$, úhel θ je malý a můžeme použít přiblížení $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$. Z toho

$$\delta \approx d \left(\frac{y}{L} \right) = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

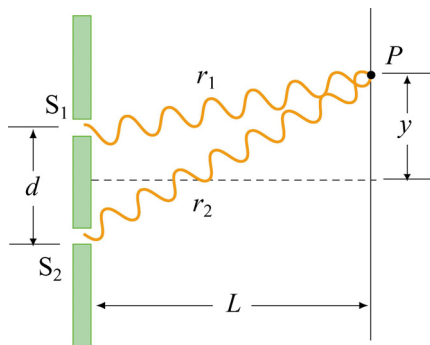
(b) S použitím odpovědi na část (a) dostaneme

$$\frac{\delta}{\lambda} \approx 3 \quad \Rightarrow \quad \delta = 3\lambda.$$

(c) Jelikož je dráhový rozdíl celočíselným násobkem vlnové délky, je v bodě P maximum intenzity.

14.3 Rozložení intenzity

Uvažujme dvojštěrbinový experiment zobrazený na obrázku 14.3.1.



Obr. 14.3.1: Dvojštěrbinová interference.

Celkové okamžité elektrické pole \mathbf{E} v bodě P na stínítku je rovno vektorovému součtu obou zdrojů: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Navíc je Poyntingův tok energie S úměrný čtverci celkového pole:

$$S \propto E^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2. \quad (14.3.1)$$

Zjistíme-li průměrnou hodnotu S v čase, intenzitu světla I v bodě P dostaneme jako:

$$I = \langle S \rangle \propto \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle. \quad (14.3.2)$$

Smíšený člen $2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ popisuje *korelaci* mezi dvěma světelnými vlnami. Pro nekoherentní světelné zdroje není definován fázový vztah mezi \mathbf{E}_1 a \mathbf{E}_2 se smíšený člen vyruší. Výsledná intenzita odpovídající dvěma nekoherentním zdrojům bude jen prostým součtem dvou jednotlivých intenzit:

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2. \quad (14.3.3)$$

Pro koherentní zdroje je smíšený člen nenulový. V případě konstruktivní interference je $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ a výsledná intenzita bude

$$I = 4I_1, \quad (14.3.4)$$

což je čtyřnásobek intenzity odpovídající jednotlivému zdroji. V opačném případě destruktivní interference je $\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2$ a $\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \propto -I_1$. Pro celkovou intenzitu dostaneme

$$I = I_1 + I_1 - 2I_1 = 0, \quad (14.3.5)$$

jak jsme očekávali.

Předpokládejme, že vlny vycházející ze štěrbin jsou sinusové koherentní rovinné vlny. Necht' složky elektrického pole vln ze štěrbin 1 a 2 jsou dány vztahy:

$$E_1 = E_0 \sin \omega t, \quad (14.3.6)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (14.3.7)$$

za podmínky, že vlny z obou štěrbin mají shodnou amplitudu. Pro zjednodušení uvažujeme počátek souřadnic v bodě P , vyloučíme tím závislost kx vlnové funkce. Jestliže vlna ze štěrbin 2 musí urazit do bodu P navíc dráhu delší o rozdíl δ , pak má navíc E_2 fázový posun φ vzhledem k intenzitě E_1 ze štěrbin 1.

Při konstruktivní interferenci bude dráhový rozdíl $\delta = \lambda$ odpovídat fázovému posunu $\varphi = 2\pi$ a z toho vyplývá

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (14.3.8)$$

nebo také

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta. \quad (14.3.9)$$

Za předpokladu, že obě pole jsou souhlasně orientována, lze celkové elektrické pole získat využitím principu superpozice, vysvětleném v části 13.4.1:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 [\sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi)] = 2E_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14.3.10)$$

kde jsme využili trigonometrický součtový vzorec

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \quad (14.3.11)$$

Intenzita I je úměrná časovému průměru druhé mocniny celkového elektrického pole:

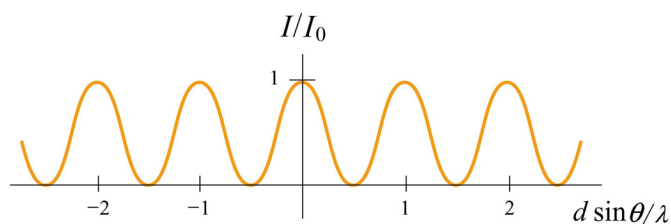
$$I \propto \langle E^2 \rangle = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left\langle \sin^2\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle = 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (14.3.12)$$

neboli

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (14.3.13)$$

kde I_0 je maximální intenzita na stínítku. Po substituci za φ z rovnice (14.3.9) přejde předchozí výraz na

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right). \quad (14.3.14)$$



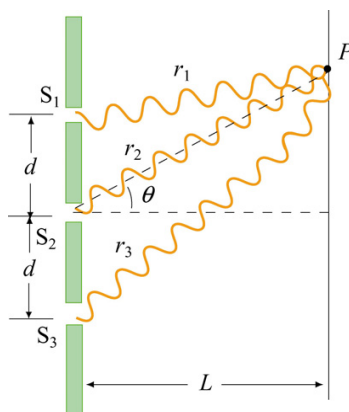
Obr. 14.3.2: Intenzita jako funkce $d (\sin \theta)/\lambda$.

Pro malé úhly θ můžeme intenzitu, s využitím rovnice (14.2.7), psát jako

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda L} y \right).$$

P Příklad 14.2: Intenzita při interferenci ze tří štěrbin

Mějme monochromatický koherentní zdroj světla svítící skrze tři rovnoběžné štěrby tak, že spolu sousedící štěrby jsou od sebe vzdáleny o délku d , jak je nakresleno na obrázku 14.3.3.



Obr.14.3.3: Interference ze tří štěrbin.

Vlny mají stejnou amplitudu E_0 a úhlovou frekvenci ω , ale konstantní fázový rozdíl $\varphi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$.

(a) Dokažte, že intenzita je

$$I = \frac{I_0}{9} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right]^2, \quad (14.3.16)$$

kde I_0 je maximální intenzita příslušející primárnímu maximu.

(b) Jaký je poměr intenzit mezi primárním a sekundárním maximem?

Řešení:

(a) Nechť tři vlny vycházející z jednotlivých štěrbin jsou

$$E_1 = E_0 \sin \omega t; \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi); \quad E_3 = E_0 \sin(\omega t + 2\varphi). \quad (14.3.17)$$

S využitím trigonometrického vztahu

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (14.3.18)$$

součet E_1 a E_3 je

$$E_1 + E_3 = E_0 [\sin \omega t + \sin(\omega t + 2\varphi)] = 2E_0 \cos \varphi \sin(\omega t + \varphi). \quad (14.3.19)$$

Celkové elektrické pole na stínítku v bodě P je

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 = 2E_0 \cos \varphi \sin(\omega t + \varphi) + E_0 \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= E_0(1 + 2 \cos \varphi) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (14.3.20)$$

kde $\varphi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ Intenzita je úměrná $\langle E^2 \rangle$:

$$I \propto E_0^2 (1 + 2 \cos \varphi)^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{E_0^2}{2} (1 + 2 \cos \varphi)^2, \quad (14.3.21)$$

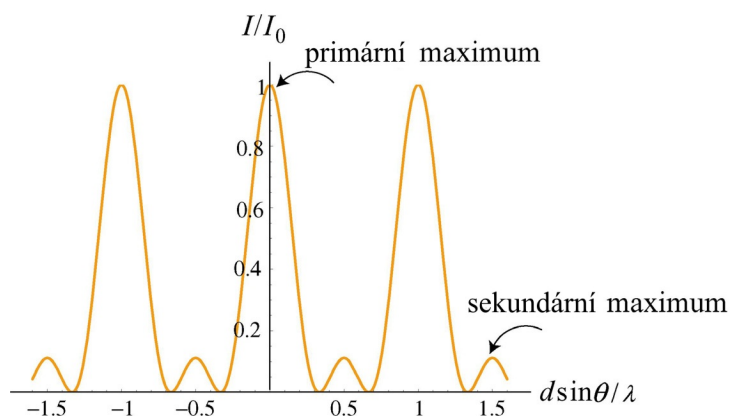
kde jsme využili $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$. Maximální intenzitu I_0 získáme, pokud $\cos \varphi = 1$, z čehož

$$\frac{I}{I_0} = \frac{(1 + 2 \cos \varphi)^2}{9}, \quad (14.3.22)$$

odkud plyne

$$I = \frac{I_0}{9} (1 + 2 \cos \varphi)^2 = \frac{I_0}{9} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right]^2. \quad (14.3.23)$$

(b) Interferenční obrazec je vykreslen na obrázku 14.3.4.



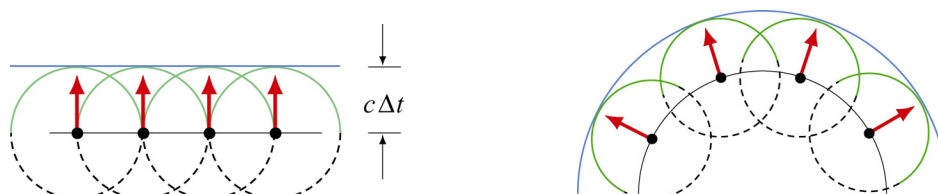
Obr.14.3.4.

Z obrázku je zřejmé, že minimální intenzita je nulová, a vyskytuje se v místech, kde platí $\cos \varphi = -1/2$. Podmínkou pro primární maximum je $\cos \varphi = 1$, což dává $I/I_0 = 1$. Připojena jsou ještě sekundární maxima, která odpovídají hodnotám $\cos \varphi = -1$. Z této podmínky vyplývá $\varphi = (2m+1)\pi$, neboli $d \sin \theta / \lambda = (m+1/2)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Poměr intenzit je $I/I_0 = 1/9$.

14.4 Ohyb (difrakce)

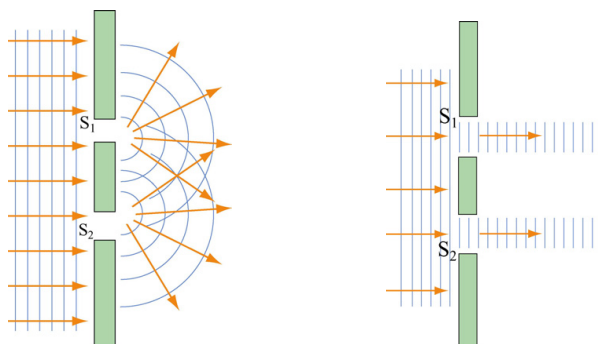
Spolu se skládáním vln, interferencí, dochází u vln často k dalšímu jevu – difrakci, která je příčinou ohybu vln při obtékání objektů a při průchodu clonami. Ohybovému jevu lze porozumět využitím Huygensova principu, který zní:

Každý necloněný bod vlnoplochy je zdrojem druhotných kulových vln. Nová vlnoplocha je tangenciálním povrchem druhotných kulových vlnoploch.



Obr. 14.4.1: Šíření vlny založené na Huygensově principu.

Obrázek 14.4.1 ilustruje šíření vlny založené na Huygensově principu. Podle Huygensova principu, světelné vlny pronikající dvěma štěrbinami vytvoří po jejich průchodu interferenční obrazec (obrázek 14.4.2 nalevo). Tento obrazec se nazývá ohybový (difrakční) obrazec. Kdyby k ohybu nedocházelo, světlo prošlé štěrbinami by pokračovalo po přímých liniích a ohybový obrazec bychom nepozorovali (obrázek 14.4.2 napravo).



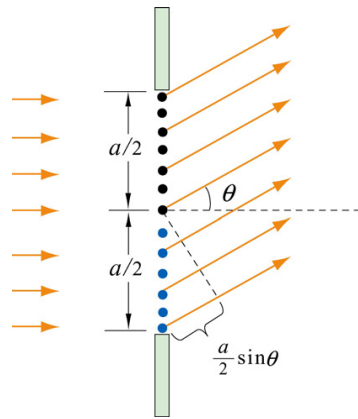
Obr 14.4.2: Nalevo – průchodem světla vzniká ohybový obrazec. Napravo – nepřítomnost ohybového obrazce v případě, kdy by světlo pokračovalo po přímkách.

Následně se omezíme na speciální případ ohybu zvaný Fraunhoferův ohyb. V tomto případě jsou všechny paprsky procházející štěrbinou přibližně rovnoběžné a abychom je zobrazili na stínítku, umístíme mezi štěrbinu a stínítko spojnou (konvexní) čočku, která zajistí sbíhání světelných paprsků.

14.5 Ohyb na štěrbině

V naší úvaze o Youngově dvojštěrbinovém experimentu jsme předpokládali šířku štěrbinu tak malou, že byla bodovým zdrojem. V této části bude mít štěrbinu šířku konečné velikosti, na které dochází k Fraunhoferově ohybu.

Mějme zdroj monochromatického světla procházejícího štěrbinou konečné šířky a , jak je ukázáno na obrázku 14.5.1.



Obr. 14.5.1: Ohyb světla na štěrbině šířky a .

Při ohybu Fraunhoferova typu jsou všechny paprsky procházející štěrbinou přibližně rovnoběžné. Každá část štěrbinu je podle Huygensova principu zdrojem světelných vln. Pro zjednodušení rozdělíme štěrbinu na dvě poloviny. V prvním minimum bude každý paprsek z horní poloviny přesně o 180° v protifázi oproti odpovídajícímu paprsku vycházejícímu z dolní poloviny. Uvažujme příkladně 100 bodových zdrojů, z nichž prvních 50 pochází z horní poloviny a 51. až 100. paprsek z horní poloviny. Zdroj 1 a zdroj 51 jsou vzdáleny $a/2$ a mají dráhový rozdíl $\delta = \lambda/2$. Obdobná situace se opakuje u zdrojů 2 a 52, a dále u každého páru ve stejné vzdálenosti. Z čehož vyplývá podmínka pro první minimum

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad (14.5.1)$$

neboli

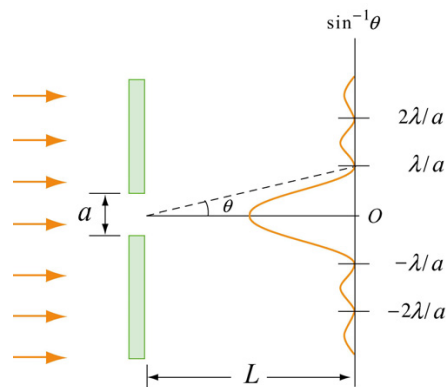
$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}. \quad (14.5.2)$$

Použitím stejného postupu pro čela vln ze čtyř bodů přesně stejně vzdálených o $a/4$, o dráhovém rozdílu $\delta = a \sin \theta / 2$ získáme podmínku pro destruktivní interferenci:

$$\sin \theta = \frac{2\lambda}{a}. \quad (14.5.3)$$

Výsledek můžeme zobecnit a lze dokázat, že destruktivní interference nastane pokaždé, když platí:

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (destruktivní interference)}. \quad (14.5.4)$$



Obr. 14.5.2: Rozložení intenzity pro jednoštěrbinový ohyb.

Obrázek 14.5.2 ilustruje rozložení intenzity pro jednošterbinový ohyb. Je zřejmé, že pro $\theta = 0$ nastává maximum.

Srovnáním rovnice (14.5.4) s rovnicí (14.2.5) je vidět, že podmínka pro *minimum* v jednošterbinovém ohybu přechází v podmínku pro *maximum* ve dvojšterbinové interferenci, pokud je šíře šterbiny a nahrazena vzdáleností mezi dvěma šterbinami d . Znamená to, že ve dvojšterbinovém experimentu jsou použité šterbiny natolik malé, že je lze považovat za bodové zdroje a skládání vln pocházejících z téže šterbiny pak lze zanedbat. Naopak u ohybu na šterbině získáme minima skládáním vln pocházejících z *téže* šterbiny.

P Příklad 14.3: Ohyb na šterbině

Monochromatické světlo vlnové délky $\lambda = 600$ nm prochází šterbinou o šíři 0.800 mm.

- (a) Jaká je vzdálenost mezi šterbinou a stínítkem, pokud první minimum ohybového obrazce je ve vzdálenosti 1 mm od středu stínítka?
 (b) Vypočtete šíři centrálního maxima.

Řešení:

- (a) Obecná podmínka pro destruktivní interferenci je

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Pro malé θ použijeme přiblížení $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$, z kterého dostaneme

$$\frac{y}{L} \approx \frac{m\lambda}{a}.$$

První minimum odpovídá hodnotě $m = 1$. Jestliže $y_1 = 1$ mm, pak

$$L = \frac{ay_1}{m\lambda} = 1,33 \text{ m}.$$

- (b) Šíře centrálního maxima je (viz obrázek 14.5.2)

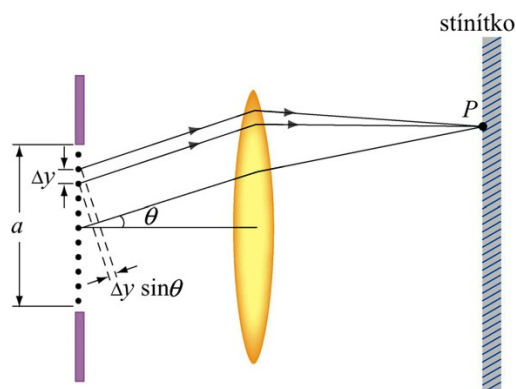
$$w = 2y_1 = 2 \text{ mm}.$$

14.6 Ohybový obrazec na šterbině

Jak určíme rozložení intenzity v obrazci vytvořeném ohybem na jedné šterbině? K tomuto výpočtu musíme nalézt celkové elektrické pole složené z příspěvků každého bodu šterbiny.

Rozdělme šterbinu na N malých zón, každou o výšce $\Delta y = a/N$, jak je ukázáno na obrázku 14.6.1. Spojnou čočku použijeme ke spojení rovnoběžných paprsků do ohniska v bodě P na stínítku. Budeme předpokládat, že $\Delta y \ll \lambda$, takže veškeré světlo z uvažované zóny je ve stejné fázi. Dvě sousední zóny mají vzájemný dráhový rozdíl $\delta = \Delta y \sin \theta$. Vzájemný fázový posun $\Delta\beta$ je dán poměrem

$$\frac{\Delta\beta}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta y \sin \theta}{\lambda}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin \theta. \quad (14.6.1)$$



Obr. 14.6.1: Fraunhoferův ohyb na štěrbině.

Předpokládáme, že čelo vlny z prvního bodu (počítáno shora) dorazí do bodu P na stínítku s elektrickým polem určeným vztahem

$$E_1 = E_{10} \sin \omega t. \quad (14.6.2)$$

Elektrické pole z bodu 2 sousedícího s bodem 1 bude mít fázový posun $\Delta\beta$ a je tedy určeno vztahem

$$E_2 = E_{10} \sin(\omega t + \Delta\beta). \quad (14.6.3)$$

Pokud bude mít každá další přispívající složka stejný fázový posun oproti předchozí, je elektrické pole z bodu N určeno vztahem

$$E_N = E_{10} \sin(\omega t + (N-1)\Delta\beta). \quad (14.6.4)$$

Celkové elektrické pole je součtem všech jednotlivých příspěvků:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N = E_{10} [\sin \omega t + \sin(\omega t + \Delta\beta) + \dots + \sin(\omega t + (N-1)\Delta\beta)]. \quad (14.6.5)$$

Velikost fázového posunu mezi bodem 1 a bodem N je

$$\beta = N\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N\Delta y \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta, \quad (14.6.6)$$

kde $N\Delta y = a$. Výraz pro celkové pole popsany rovnicí (14.6.5) může být zjednodušen algebraickými úpravami a trigonometrickým vztahem

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta. \quad (14.6.7)$$

[V dodatku naleznete alternativní možnosti zjednodušení rovnice (14.6.5).] K úpravě rovnice (14.6.5), využijeme

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \Delta\beta/2) - \cos(\omega t + \Delta\beta/2) &= 2 \sin \omega t \sin(\Delta\beta/2), \\ \cos(\omega t + \Delta\beta/2) - \cos(\omega t + 3\Delta\beta/2) &= 2 \sin(\omega t + \beta) \sin(\Delta\beta/2), \\ \cos(\omega t + 3\Delta\beta/2) - \cos(\omega t + 5\Delta\beta/2) &= 2 \sin(\omega t + 2\beta) \sin(\Delta\beta/2), \\ &\vdots \\ \cos[\omega t + (N-1/2)\Delta\beta] - \cos[\omega t + (N+1/2)\Delta\beta] &= 2 \sin[\omega t + (N-1)\beta] \sin(\Delta\beta/2). \end{aligned} \quad (14.6.8)$$

Sčítáním a odčítáním vzorců se postupně na levé straně všechny tvary až na dva vyruší:

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - \Delta\beta/2) - \cos[\omega t + (N-1/2)\Delta\beta] = \\ & = 2\sin(\Delta\beta/2) [\sin\omega t + \sin(\omega t + \Delta\beta) + \dots + \sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta]]. \end{aligned} \quad (14.6.9)$$

Dva výrazy na levé straně lze zkombinovat na

$$\cos(\omega t - \Delta\beta/2) - \cos[\omega t + (N-1/2)\Delta\beta] = 2\sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta/2] \sin(N\Delta\beta/2). \quad (14.6.10)$$

čehož výsledkem je ($N\Delta\beta = \beta$)

$$\begin{aligned} & [\sin\omega t + \sin(\omega t + \Delta\beta) + \dots + \sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta]] = \\ & = \frac{\sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta/2] \sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}. \end{aligned} \quad (14.6.11)$$

Celkové elektrické pole dostaneme jako

$$E = E_{10} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right] \sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta/2]. \quad (14.6.12)$$

Intenzita I je úměrná střední hodnotě E^2

$$\langle E^2 \rangle = E_{10}^2 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right]^2 \langle \sin^2[\omega t + (N-1)\Delta\beta/2] \rangle = \frac{1}{2} E_{10}^2 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right]^2 \quad (14.6.13)$$

a I vyjádříme jako

$$I = \frac{I_0}{N^2} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right]^2, \quad (14.6.14)$$

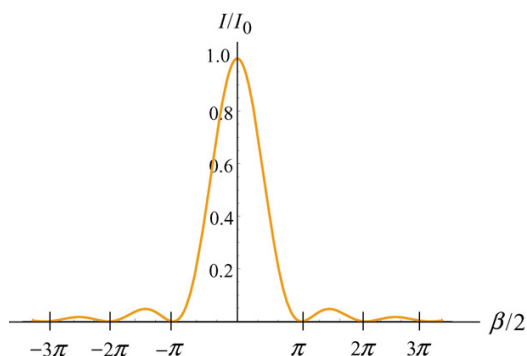
kde dodatečný člen N^2 byl vložen, aby I_0 odpovídala intenzitě v centrálním maximu $\beta = 0$, neboli $\theta = 0$. V limitě, kde $\Delta\beta \rightarrow 0$ platí

$$N \sin(\Delta\beta/2) \approx N\Delta\beta/2 = \beta/2 \quad (14.6.15)$$

a intenzita přechází do tvaru

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin\theta / \lambda)}{\pi a \sin\theta / \lambda} \right]^2. \quad (14.6.16)$$

Na obrázku 14.6.2, je zobrazen poměr intenzity I/I_0 jako funkce $\beta/2$.



Obr. 14.6.2: Intenzita Fraunhoferova ohybu na štěrbině.

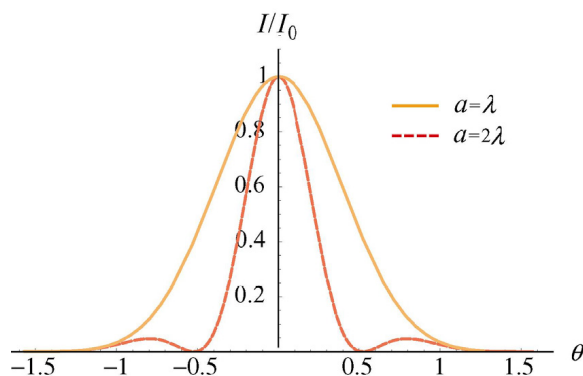
Z rovnice (14.6.15) můžeme zřetelně vidět, že podmínkou minimální intenzity je

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta = m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

neboli

$$\boxed{\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots} \quad (14.6.17)$$

Na obrázku 14.6.3 je vykreslena intenzita jako funkce úhlu θ , pro $a = \lambda$ a $a = 2\lambda$. Vidíme, že jak narůstá poměr a/λ , centrální pík se zužuje a je zde soustředěno nejvíce světla. V tomto grafu není ukázána závislost I_0 na změně šířky a .



Obr. 14.6.3: Intenzita ohybu na štěrbině jako funkce θ pro $a = \lambda$ a $a = 2\lambda$.

14.7 Ohybový obrazec na dvojštěrbině

V předchozí části jsme poznali, že intenzita ohybu na štěrbině a interference na dvojštěrbině je dána vztahy:

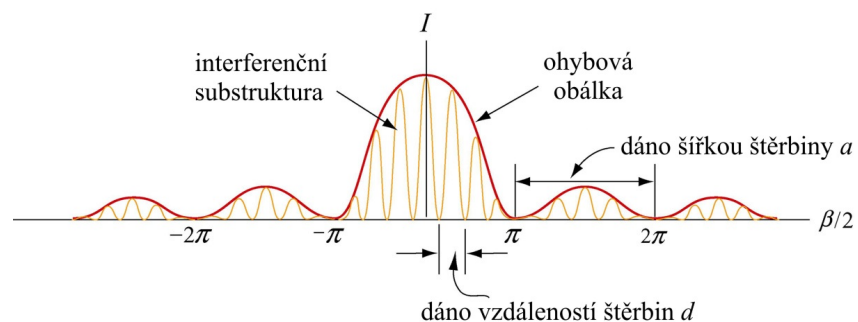
$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2; \quad \text{ohyb na štěrbině,}$$

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right); \quad \text{interference na dvojštěrbině.}$$

Předpokládejme, že máme dvě štěrbin, každou o šířce a , které jsou odděleny vzdáleností d . Výsledný interferenční obrazec ze dvou štěrbin získáme spojením ohybových obrazců jednotlivých štěrbin. Intenzita celkového obrazce bude jednoduše násobkem obou funkcí:

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2. \quad (14.7.1)$$

Prvý a druhý výraz v rovnici odpovídají postupně „interferenčnímu faktoru“ a „ohybovému faktoru“. Interference přispívá vytvořením vnitřní substruktury, druhý člen je příčinou omezující obálky, která ohraničuje interferenční píky. (viz obrázek 14.7.1).



Obr.14.7.1: Dvojštěrbinová interference s ohybem.

Viděli jsme, že interferenční maxima nastávají pro $d \sin \theta = m\lambda$. Naopak je podmínkou pro první ohybové minimum $a \sin \theta = \lambda$. Z toho pak určité interferenční maximum řádu m se může setkat s prvním ohybovým minimem. Hodnotu m můžeme nalézt jako

$$\frac{d \sin \theta}{a \sin \theta} = \frac{m\lambda}{\lambda}$$

neboli

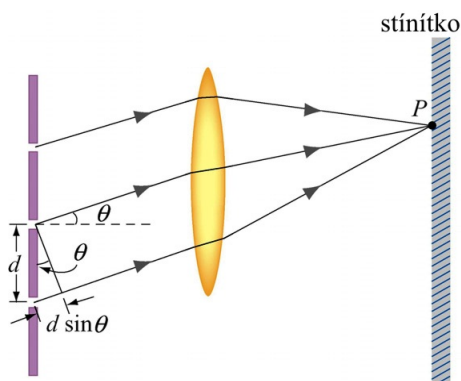
$$\boxed{m = \frac{d}{a}} \quad (14.7.2)$$

V tomto případě není m -tý proužek viditelný a počet proužků na každé straně od centrálního maxima je $m-1$. A z toho je pak celkový počet proužků obsažených v centrálním ohybovém maximu

$$N = 2(m-1) + 1 = 2m - 1. \quad (14.7.3)$$

14.8 Ohybová mřížka

Ohybová (difrakční) mřížka sestává z velkého množství N štěrbín, každé se šířkou a , které jsou od sebe odděleny vzdáleností d , jak je ukázáno na obrázku 14.8.1.



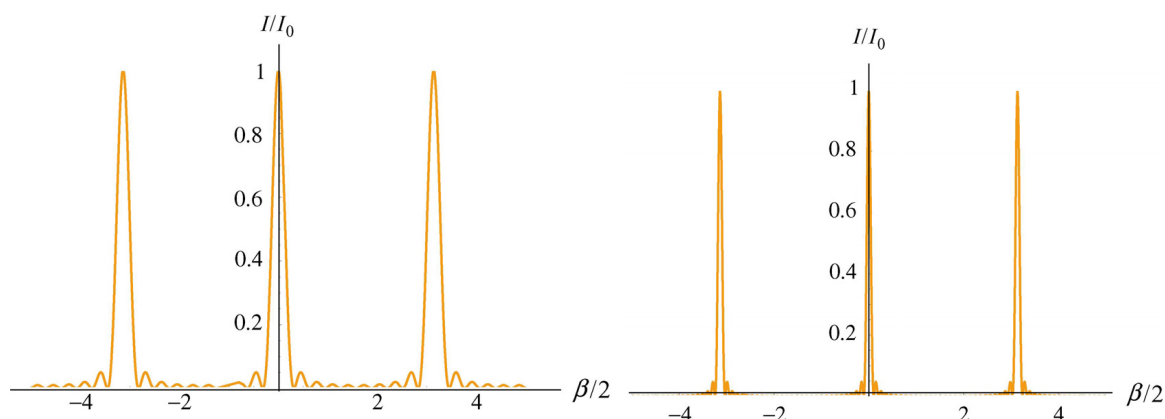
Obr. 14.8.1: Difrakční mřížka.

Budeme uvažovat případ, kdy původní vlnoplochy jsou rovinné a světlo se díky ohybu bude šířit do velkého úhlu tak, že světlo z každé štěrbiny interferuje se všemi ostatními. Vzájemný dráhový rozdíl mezi všemi sousedními dvojicemi štěrbín je $\delta = d \sin \theta$, obdobně jako jsme vypočetli v případě dvou štěrbín. Pokud je dráhový rozdíl roven celistvému násobku

vlnových délek, tak světlo konstruktivně interferuje ze všech štěrbin a na stínítku se vytvoří jasná skvrna pod úhlem θ . Podmínka pro hlavní maxima je pak dána takto:

$$d \sin \theta = m\lambda ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (14.8.1)$$

Pokud je známa vlnová délka a poloha maxima m -tého řádu, lze snadno dopočítat vzdálenost d . Poloha maxima nezávisí na počtu štěrbin N . Maxima budou se vzrůstajícím N ostřejší a intenzivnější. Šíře maxima je nepřímo úměrná počtu štěrbin N . Na obrázku 14.8.2 vidíme rozložení intenzity jako funkci $\beta/2$ pro ohybovou mřížku s $N=10$ a $N=30$. Je zřejmé, jak jsou se vzrůstajícím N základní maxima strmější a užší.



Obr. 14.8.2: Rozložení intenzity difrakční mřížky pro $N=10$ (nalevo) a $N=30$ (napravo).

Pozorování lze vysvětlit následovně: představme si, že úhel θ (připomeňme si, že $\beta = 2\pi a \sin \theta / \lambda$), ve kterém je základní maximum, se nepatrně zvětší. Pokud bychom měli jen dvě štěrbin, budou mít obě vlny blízké fáze a v součtu dají široká maxima. Naproti tomu na mřížce, která má velké množství štěrbin, i malá změna úhlu θ od hodnoty, která dá maximum, znamená, že světlo vzdálených štěrbin nebude ve fázi a vyruší se, čímž dojde k zúžení maxim. Jelikož mřížka vytváří mnohem ostřejší píky intenzity než dvojštěrbinový systém, poskytuje také mnohem přesnější možnost měření vlnové délky.

14.9 Shrnutí

- **Interference** je složením dvou či více vln do výsledného tvaru na základě principu superpozice.
- V **Youngově dvojštěrbinovém experimentu** vyzařuje koherentní monochromatické světlo s vlnovou délkou λ ze dvou štěrbin vzdálených d . Pravidlo pro **konstruktivní interference** je:

$$\delta = d \sin \theta = m\lambda ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (konstruktivní interference)}$$

kde m je **řád interference**. Pravidlo pro **destruktivní interference** je

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (destruktivní interference)}$$

- **Intenzita** interferenčního obrazce ve dvojštěrbinovém experimentu je

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right),$$

kde I_0 je maximální intenzita na stínítku

- Difrakce je **ohybem** vln kolem objektu, nebo ohyb při průchodu otvorem. Při Fraunhoferově ohybu na štěrbině je podmínkou destruktivní interference

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (destruktivní interference),}$$

kde a je šířka štěrbin. Intenzita interferenčního obrazce je

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2,$$

kde $\beta = 2\pi a \sin \theta / \lambda$ je celkový fázový rozdíl mezi vlnami z horního a dolního okraje štěrbin, a I_0 je intenzita v místě $\theta = 0$.

- Při dvou štěrbinách, každé se šířkou a a vzájemnou vzdáleností d , bude interferenční obrazec obsahovat obrazec ohybový pocházející z jednotlivých štěrbin a intenzita bude

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2.$$

14.10 Dodatek: výpočet celkového elektrického pole

V oddíle 14.6 jsme použili trigonometrické vztahy a odvodili tak celkové elektrické pole při ohybu na štěrbině. Ukažme si nyní dva alternativní výpočty rovnice (14.6.5).

Výpočet 1: Komplexní reprezentace

Celkové elektrické pole může být považováno za geometrickou řadu. Z Eulerova vzorce

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x \quad (14.10.1)$$

můžeme psát

$$\sin x = \text{Im}(e^{ix}), \quad (14.10.2)$$

kde symbol „Im“ označuje imaginární část komplexního čísla. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} & \sin \omega t + \sin(\omega t + \Delta\beta) + \dots + \sin[\omega t + (N-1)\Delta\beta] = \\ & = \text{Im} \left[e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \Delta\beta)} + \dots + e^{i(\omega t + (N-1)\Delta\beta)} \right] = \text{Im} \left[e^{i\omega t} \left(1 + e^{i\Delta\beta} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\beta} \right) \right] = \\ & = \text{Im} \left[e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\Delta\beta}}{1 - e^{i\Delta\beta}} \right] = \text{Im} \left[e^{i\omega t} \frac{-e^{iN\Delta\beta/2} (e^{iN\Delta\beta/2} - e^{-iN\Delta\beta/2})}{-e^{i\Delta\beta/2} (e^{i\Delta\beta/2} - e^{-i\Delta\beta/2})} \right] = \\ & \text{Im} \left[e^{i(\omega t + (N-1)\Delta\beta/2)} \frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right] = \sin(\omega t + (N-1)\Delta\beta/2) \frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}, \end{aligned} \quad (14.10.3)$$

kde jsme použili vztah pro součet části geometrické řady

$$1 + a + a^2 + \dots + a^N = \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}; \quad |a| < 1. \quad (14.10.4)$$

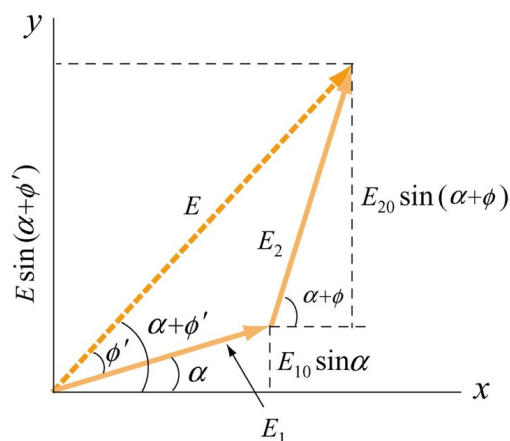
Celkové elektrické pole pak dostaneme jako

$$E = E_{10} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)} \right] \sin(\omega t + (N-1)\Delta\beta/2), \quad (14.10.5)$$

což je stejný výsledek, který jsme dostali v rovnici (14.6.12).

Výpočet 2: Fázorový diagram:

Alternativně můžeme k výpočtu časově nezávislé části výsledného pole použít fázorové diagramy. Než to však provedeme, podívejme se nejprve, jak vypadá fázorové skládání pro dvě vlnové funkce.



Obr. 14.10.1: Skládání dvou fázorů.

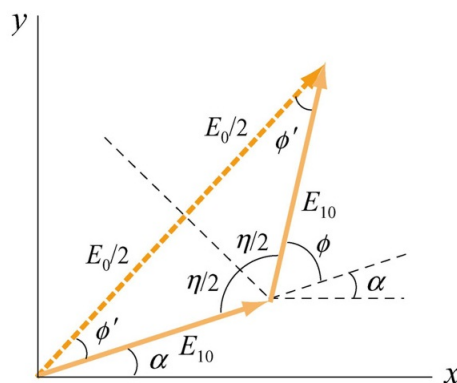
Nechť $E_1 = E_{10} \sin \alpha$ a $E_2 = E_{20} \sin(\alpha + \phi)$ a celkové pole bude součtem

$$E = E_1 + E_2 = E_{10} \sin \alpha + E_{20} \sin(\alpha + \phi) = E_0 \sin(\alpha + \phi'). \quad (14.10.6)$$

S využitím fázorového přístupu jsou pole E_1 a E_2 reprezentována dvěma dvourozměrnými vektory \mathbf{E}_1 a \mathbf{E}_2 . Vektorový součet $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ je ukázán na obrázku 14.10.1.

Myšlenka geometrického přístupu je založena na skutečnosti skládání dvou vektorů, kdy výsledný složený vektor je roven součtu jednotlivých složek. Svislá složka \mathbf{E} , která je svislým průmětem \mathbf{E}_1 a \mathbf{E}_2 , je výsledným polem E .

Pokud mají obě pole stejnou amplitudu $E_{10} = E_{20}$, přechází fázorový diagram v



Obr. 14.10.2: Součet dvou fázorů o stejné amplitudě.

kde $\beta = N\Delta\beta$. Výsledek je v souladu s výsledkem získaným v rovnici (14.6.11), ve které byl použit algebraický postup. Intenzita je úměrná E_0^2 a znovu ji můžeme zapsat jako

$$I = \frac{I_0}{N^2} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\Delta\beta/2} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2, \quad (14.10.14)$$

což je opakováním výsledku ukázaného v rovnici (14.6.15).

14.11 Řešené úlohy

P 14.11.1: Dvojštěrbinový experiment

V Youngově dvojštěrbinovém experimentu uvažujeme vzdálenost mezi štěrbinami $d = 0,32$ mm. Jestliže paprsek světla o vlnové délce 500 nm projde štěrbinou, vytvoří interferenční obrazec. Kolik maxim bude ležet v úhlovém intervalu $-45^\circ < \theta < +45^\circ$?

Řešení:

Na zobrazovacím stínítku nastává maximální intenzita tehdy, když dvě vlny interferují konstruktivně. To se děje pro

$$d \sin \theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (14.11.1)$$

kde λ je vlnová délka světla. Pro úhel $\theta = 45^\circ$, $d = 3,2 \times 10^{-4}$ m a $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m, dostaneme

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 452,5. \quad (14.11.2)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že v intervalu $0 < \theta < 45^\circ$ bude 452 maxim. Podle symetrie bude 452 maxim také v intervalu $-45^\circ < \theta < 0$. Zahrneme-li i maximum pro $m = 0$, bude celkový počet maxim

$$N = 452 + 452 + 1 = 905. \quad (14.11.3)$$

P 14.11.2: Fázový rozdíl

Ve dvojštěrbinovém experimentu z obrázku 14.2.3 uvažujme $d = 0,1$ mm a $L = 1$ m. Dopadající monochromatické světlo má vlnovou délku $\lambda = 500$ nm.

- Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma vlnami dopadajícími na zobrazovací stínítko v bodě P , pokud $\theta = 0,8^\circ$?
- Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma vlnami dopadajícími na zobrazovací stínítko v bodě P , pokud je $y = 4$ mm?
- Jestliže $\varphi = 1/3$ rad, jaká je hodnota θ ?
- Pokud je dráhový rozdíl $\delta = \lambda/4$, jaká je hodnota θ ?

Řešení:

(a) Fázový rozdíl φ mezi dvěma čely vln je dán podle

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta. \quad (14.11.4)$$

Dosazením $\theta = 0,8^\circ$ obdržíme

$$\varphi = 17,5 \text{ rad.} \quad (14.11.5)$$

(b) Pokud je θ malé, můžeme použít přiblížení $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$. Z toho pro fázový rozdíl dostaneme

$$\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} d \left(\frac{y}{L} \right). \quad (14.11.6)$$

Pro $y = 4 \text{ mm}$ dostaneme

$$\varphi = 5,03 \text{ rad.} \quad (14.11.7)$$

(c) Pro φ platí

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} \left(\frac{\varphi \lambda}{2\pi d} \right) \quad (14.11.8)$$

čehož výsledkem je pro $\varphi = \frac{1}{3} \text{ rad}$

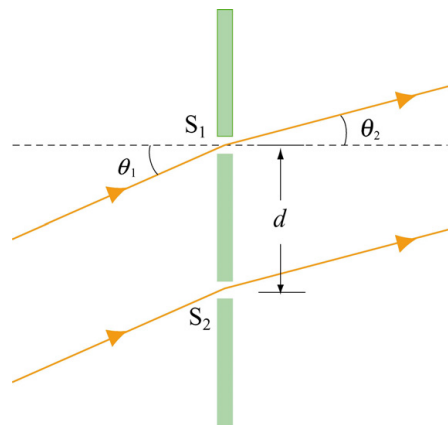
$$\theta = 0,0152^\circ \quad (14.11.9)$$

(d) Pro $\delta = d \sin \theta = \lambda/4$ dostaneme

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{4d} \right) = 0,0716^\circ. \quad (14.11.10)$$

P 14.11.3: Konstruktivní interference

Koherentními světelnými paprsky vlnové délky λ svítíme pod úhlem θ_1 na dvojici štěrbin oddělených od sebe o vzdálenost d , jak je nakresleno na obrázku 14.11.1.



Obr. 14.11.1.

Pokud je interferenční maximum vytvořeno pod úhlem θ_2 na druhé straně štěrbin, nalezněte vztah mezi θ_1 , θ_2 , d a λ .

Řešení:

Dráhový rozdíl mezi dvěma paprsky je

$$\delta = d \sin \theta_1 - d \sin \theta_2 . \quad (14.11.11)$$

Podmínkou konstruktivní interference je $\delta = m\lambda$, kde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je řád maxima. Odsud obdržíme

$$d \sin \theta_1 - d \sin \theta_2 = m\lambda . \quad (14.11.12)$$

P 14.11.4: Intenzita při dvojštěrbinové interferenci

Nechť intenzita na stínítku v bodě P v dvojštěrbinovém interferenčním obrazci dosahuje 60 % maximální hodnoty.

- (a) Jaký je minimální fázový rozdíl (v radiánech) mezi zdroji?
 (b) Jaký je v tomto případě (a) odpovídající dráhový rozdíl, jestliže vlnová délka použitého světla je $\lambda = 500 \text{ nm}$?

Řešení:

- (a) Průměrná intenzita je dána vztahem

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad (14.11.13)$$

kde I_0 je maximální světelná intenzita. Z toho máme

$$0,6 = \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad (14.11.14)$$

tím dostaneme

$$\varphi = 2 \cos^{-1} \left(\sqrt{0,6} \right) = 78,5^\circ = 1,37 \text{ rad} . \quad (14.11.15)$$

- (b) Fázový rozdíl φ souvisí s dráhovým rozdílem δ a vlnovou délkou λ takto

$$\delta = \frac{\lambda \varphi}{2\pi} = 109 \text{ nm} . \quad (14.11.16)$$

P 14.11.5: Světlé proužky druhého řádu

Monochromatické světlo prostupuje jednou štěrbinou šířce 0.8 mm a ohybový obrazec je utvořen na stínítku ve vzdálenosti 0.8 m za štěrbinou. Jasně proužky druhého řádu jsou ve vzdálenosti 1,6 mm od středu centrálního maxima. Jaká je vlnová délka dopadajícího světla?

Řešení:

Obecná podmínka pro destruktivní interferenci je

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \approx \frac{y}{L},$$

což je přibližná hodnota pro malé úhly. Z tohoto vztahu určíme polohu m -tého hlavního tmavého proužku, měřenou od středové osy

$$z_m = m \frac{\lambda L}{a} . \quad (14.11.18)$$

Nechť je druhotné jasné maximum umístěno v polovině mezi druhým a třetím tmavým proužkem. Z toho je

$$y_{2,\max} = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = \frac{1}{2}(2+3)\frac{\lambda L}{a} = \frac{5}{2}\frac{\lambda L}{a}. \quad (14.11.19)$$

Přibližná hodnota vlnové délky dopadajícího světla je pak

$$\lambda = \frac{2}{5}\frac{ay_{2,\max}}{L} = 6,4 \times 10^{-7} \text{ m}. \quad (14.11.20)$$

P 14.11.6: Intenzita při ohybu na dvou štěrbinách

Koherentní světlo vlnové délky $\lambda = 500 \text{ nm}$ proniká dvěma rovnoběžnými štěrbinami, každá o šíři $a = 0,7 \text{ }\mu\text{m}$. Vzdálenost mezi středy štěrbin je $d = 2,8 \text{ }\mu\text{m}$. Stínítko má tvar poloviny válce, jehož osa je v polovině vzdálenosti mezi oběma štěrbinami.

- Nalezněte směry interferenčních maxim na stínítku. Vyjádřete svoji odpověď pomocí odklonu od kolmice vedené na spojnici štěrbin.
- Kolik světlých proužků se vykreslí na stínítku?
- Pro každý světlý proužek nalezněte intenzitu v poměrném měřítku vůči intenzitě hlavního centrálního maxima.

Řešení:

- Podmínkou pro maximum při dvojštěrbinové interferenci je

$$d \sin \theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.11.21)$$

Z tohoto vztahu určíme

$$\theta_m = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right). \quad (14.11.22)$$

Po dosazení $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ a $d = 2,8 \times 10^{-6}$ získáme

$$\theta_m = \sin^{-1}(0,179 m). \quad (14.11.23)$$

Výsledky jsou

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0^\circ & \theta_{\pm 1} &= \pm 10,3^\circ \\ \theta_{\pm 2} &= \pm 20,9^\circ & \theta_{\pm 3} &= \pm 32,4^\circ \\ \theta_{\pm 4} &= \pm 45,6^\circ & \theta_{\pm 5} &= \pm 63,2^\circ \\ \theta_{\pm 6} &\text{ nemá řešení} \end{aligned} \quad (14.11.24)$$

Evidentně je zde 11 směrů, v nichž je interference maximální

- Obecnou podmínkou pro minima při ohybu na štěrbině je $a \sin \theta = m\lambda$ neboli

$$\theta_m = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{a}\right); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.11.25)$$

Po dosazení $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ a $a = 7 \times 10^{-7} \text{ m}$ získáme

$$\theta_m = \sin^{-1}(0,714 m). \quad (14.11.26)$$

Hledaná řešení jsou

$$\begin{aligned} \theta_{\pm 1} &= \pm 45,6^\circ, \\ \theta_{\pm 2} &\text{ nemá řešení.} \end{aligned} \quad (14.11.27)$$

Jestliže tyto úhly odpovídají tmavým proužkům, pak celkový počet jasných proužků je $N = 11 - 2 = 9$.

(c) Intenzita na stínítku je dána vztahem

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2. \quad (14.11.28)$$

kde I_0 je intenzita pro úhel $\theta = 0$. Pro jednotlivé úhly vychází

úhel θ	0°	$\pm 10,3^\circ$	$\pm 20,9^\circ$	$\pm 32,4^\circ$	$\pm 63,2^\circ$
poměr I/I_0	1	0,811	0,406	0,0901	0,0324

14.12 Tématické otázky

- Co se stane v Youngově dvojštěrbinovém experimentu s prostorovým uspořádáním interferenčních proužků, jestliže
 - zvětšíme vzdálenost mezi štěrbinami?
 - zmenšíme vlnovou délku dopadajícího světla?
 - zvětšíme vzdálenost mezi clonou se štěrbinami a zobrazovacím stínítkem?
- Jak se změní interferenční obrazec, pokud v Youngově dvojštěrbinovém experimentu použijeme bílé světlo?
- Vysvětlete, proč světlo z dvojice čelních reflektorů vzdáleného auta nevytvoří interferenční obrazec.
- Co se bude dít se šíří centrálního maxima při ohybu na štěrbině, pokud budeme zvětšovat šíři štěrbin?
- Co se bude dít při ohybu na štěrbině, když budeme neustále snižovat šíři štěrbin?
- Můžeme při výpočtu intenzity dvojštěrbinové interference jednoduše počítat intenzity jednotlivých štěrbin?

14.13 Neřešené úlohy

P 14.13.1: Dvojštěrbinová interference

Ve dvojštěrbinovém experimentu uvažujme štěrbinu vzdálené $d = 1$ cm a promítací stínítko vzdálené od štěrbin $L = 1,2$ m. Na štěrbinu dopadá světlo vlnové délky $\lambda = 500$ nm.

- (a) Vypočtete prostorové uspořádání mezi sousedními světlými proužky.
(b) Jaká je vzdálenost mezi třetím hlavním proužkem a centrální linií?

P 14.13.2: Obrázec interference kombinované s ohybem

Při dvojštěrbinovém Fraunhoferově interferenčním a ohybovém experimentu jsou štěrbinu šíře $0,01$ mm vzdáleny $0,2$ mm a dopadající monochromatické světlo má vlnovou délku $\lambda = 600$ nm. Kolik jasných proužků bude v centrálním ohybovém maximu?

P 14.13.3: Interference světla ze tří štěrbin

Uvažujme monochromatický koherentní světelný zdroj vlnové délky λ procházející třemi rovnoběžnými štěrbinami, z nichž sousední jsou vždy odděleny od sebe vzdáleností d .

- (a) Dokažte, že poloha interferenčních minim na promítacím stínítku ve vzdálenosti $L \gg d$ je přibližně dána vztahem

$$y = n \frac{\lambda L}{3d}; \quad n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots,$$

kde n není celočíselným násobkem 3.

- (b) Nechť $L = 1,2$ m, $\lambda = 450$ nm a $d = 0,1$ mm. Jaké je prostorové uspořádání řady po sobě jdoucích minim?

P 14.13.4: Intenzita dvojštěrbinové interference

Při dvojštěrbinovém interferenčním experimentu uvažujme štěrbinu rozdílných šíří a pole v bodě P na promítacím stínítku je

$$E_1 = E_{10} \sin \omega t, \quad E_2 = E_{20} \sin(\omega t + \varphi).$$

Dokažte, že intenzita v P je

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi,$$

kde I_1 a I_2 jsou intenzity náležící světlu jednotlivých štěrbin.

P 14.13.5: Vedlejší maxima

V kapitole 14.6 jsme ukázali, že intenzita je při ohybu na jedné štěrbině dána vztahem

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2.$$

- (a) Vysvětlete, proč pro podmínku vedlejších minim neplatí $\beta/2 = (m + 1/2)\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$
(b) Diferencováním výše uvedeného výrazu pro I dokažte, že podmínkou pro vedlejší maxima je

$$\frac{\beta}{2} = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

- (c) Vykreslete křivky $y = \beta/2$ a $y = \tan(\beta/2)$. Za pomoci kalkulačky s grafickými funkcemi či matematickým software naleznete hodnoty β , v nichž mají obě křivky průsečík a dále hodnotu β pro první a druhé vedlejší maximum. Porovnejte výsledky se vztahem $\beta/2 = (m+1/2)\pi$.

P 14.13.6: Interferenční ohybový obrazec

Jestliže je v hlavním centrálním ohybovém maximu dvojštěrbínového interferenčního obrazce 7 proužků, co můžete usoudit o šíři a vzdálenosti štěrbin?