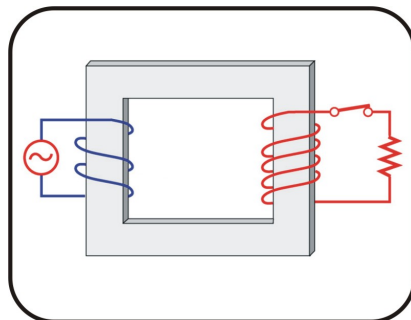


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

XII. Střídavé obvody



Obsah

12	STŘÍDAVÉ OBVODY	2
12.1	ZDROJE STŘÍDAVÉHO NAPĚTÍ	2
12.2	JEDNODUCHÉ STŘÍDAVÉ OBVODY	2
12.2.1	REZISTOR JAKO ZÁTĚŽ	3
12.2.2	CÍVKA JAKO ZÁTĚŽ	5
12.2.3	KONDENZÁTOR JAKO ZÁTĚŽ	6
12.3	SÉRIOVÝ RLC OBVOD	7
12.3.1	IMPEDANCE	10
12.3.2	REZONANCE	10
12.4	VÝKON VE STŘÍDAVÝCH OBVODECH	11
12.4.1	ŠÍŘKA PÍKU	12
12.5	TRANSFORMÁTOR	14
12.6	PARALELNÍ RLC OBVOD	15
12.7	SHRnutí	17
12.8	ALGORITMY PRO ŘEŠENÍ STŘÍDAVÝCH OBVODŮ	18
12.9	ŘEŠENÉ ÚLOHY	20
12.10	TÉMATICKÉ OTÁZKY	26
12.11	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	27

12 Střídavé obvody

12.1 Zdroje střídavého napětí

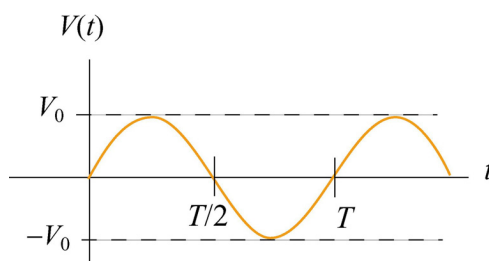
V kapitole 10 jsme si ukázali, že měnící se tok magnetického pole dle Faradayova zákona indukuje elektromotorické napětí. Nejjednodušším zdrojem střídavého napětí je rotující cívka v magnetickém poli, indukované napětí se sinusově mění s časem. Následující symbol představuje zdroj střídavého napětí:



Příkladem matematického popisu zdroje střídavého napětí je funkce

$$V(t) = V_0 \sin \omega t, \quad (12.1.1)$$

kde maximální hodnotu napětí V_0 nazýváme *amplituda*. Napětí se pak mění v rozsahu $-V_0$ až $+V_0$, protože obor hodnot funkce $\sin x$ je interval mezi -1 a $+1$. Graf závislosti napětí na čase je na obrázku 12.1.1.



Obr. 12.1.1: Sinusový průběh střídavého zdroje napětí

Funkce sinus je periodická v čase. Znamená to, že průběh napětí v čase t je naprosto stejný jako v čase $t' = t + T$, kde T je *perioda*. Frekvence f je definovaná jako $f = 1/T$, její jednotkou jsou převrácené sekundy $[s^{-1}]$ neboli hertze [Hz]. Úhlová frekvence je pak definována vztahem $\omega = 2\pi f$.

Pokud zdroj střídavého napětí připojíme k *RLC* obvodu, energie se sice začne ztrácet na rezistoru, oscilace však neustanou. Oscilace náboje, proudu nebo napětí v tomto případě nazýváme řízené nebo vynucené kmity.

Po určité „přechodové době“ bude odpovídat střídavá frekvence proudu v střídavém obvodu frekvenci řídicího napětí zdroje. Proud v obvodu můžeme zapsat

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (12.1.2)$$

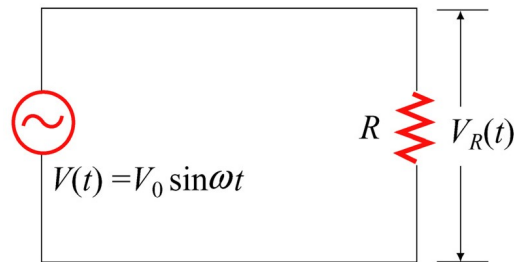
kde proud osciluje se stejnou frekvencí jako zdroj, s amplitudou I_0 a fází φ závisející na prvcích obvodu.

12.2 Jednoduché střídavé obvody

Než se budeme podrobně věnovat *RLC* obvodům, ukážeme si jednodušší případy, kdy bude zapojen pouze jeden element (rezistor, cívka nebo kondenzátor) ke zdroji sinusového napětí.

12.2.1 Rezistor jako zátěž

Nejprve uvažme zapojení s rezistorem připojeným ke zdroji střídavého napětí, viz obrázek 12.2.1. (Jak uvidíme dále, obvod s odporem odpovídá zapojení s nekonečnou kapacitou $C = \infty$ a nulovou indukčností $L = 0$.)



Obr. 12.2.1: Zapojení pouze s rezistorem.

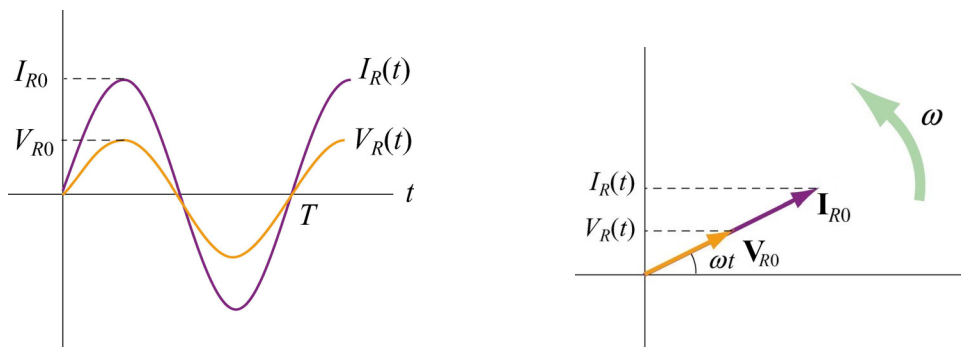
Z Kirchhoffova zákona pro smyčky plyne

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I_R(t)R = 0, \quad (12.2.1)$$

kde $V_R(t) = I_R(t)R$ je okamžitý pokles napětí na rezistoru. Okamžitý proud na rezistoru je dán

$$I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R0} \sin \omega t}{R} = I_{R0} \sin \omega t, \quad (12.2.2)$$

kde $V_{R0} = V_0$ a $I_{R0} = V_{R0}/R$ je maximální proud. Srovnáním rovnice (12.2.2) s rovnicí (12.1.2) zjistíme, že fázový rozdíl $\varphi = 0$, což znamená, že proud $I_R(t)$ a napětí $V_R(t)$ jsou ve fázi, tedy nabývají minim a maxim ve stejném čase. Graf časové závislosti je vyneseno na obrázku 12.2.2 nalevo.



Obr 12.2.2: Nalevo – časová závislost $I_R(t)$ a $V_R(t)$ na rezistoru.
Napravo – fázorový diagram pro obvod s rezistorem.

Chování proudu $I_R(t)$ a napětí $V_R(t)$ může být také znázorněno ve fázorovém diagramu, viz Obr. 12.2.2 napravo. Fázor je rotující vektor s následujícími vlastnostmi:

- (i) **délka:** délka odpovídá amplitudě veličiny,
- (ii) **úhlová rychlost:** vektory rotují proti chodu hodinových ručiček úhlovou rychlostí,
- (iii) **projekce:** projekce vektoru do svislé osy odpovídá velikosti veličiny v daném čase t .

Fázory budeme označovat tučně, jako vektory. Fázor \mathbf{V}_{R0} má konstantní velikost V_{R0} . Jeho projekce na svislou osu je $V_{R0} \sin \omega t$, což je rovno $V_R(t)$, tedy napětí na rezistoru v čase t .

Stejně můžeme interpretovat fázor I_{R0} pro proud rezistorem. Z fázového diagramu je vidět, že jak proud, tak napětí jsou ve fázi.

Průměrnou hodnotu proudu během jedné periody můžeme vyjádřit jako

$$\langle I_R(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{R0} \sin \omega t dt = \frac{I_{R0}}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} dt = 0 . \quad (12.2.3)$$

Proud zprůměrnováním vymizí. Je to proto, že

$$\langle \sin \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t dt = 0 . \quad (12.2.4)$$

Obdobně mohou být užitečné tyto další vzorce pro průměrné hodnoty:

$$\begin{aligned} \langle \cos \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt = 0 , \\ \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0 , \\ \langle \sin^2 \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2} , \\ \langle \cos^2 \omega t \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

Z výš uvedeného je vidět, že průměr kvadrátu proudu nezmizí:

$$\langle I_R^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_R^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{R0}^2 \sin^2 \omega t dt = I_{R0}^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2} I_{R0}^2 . \quad (12.2.6)$$

Pro pohodlnost pak zavádíme efektivní proud jako

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I_R^2(t) \rangle} = \frac{I_{R0}}{\sqrt{2}} . \quad (12.2.7)$$

A stejným způsobem definujeme i efektivní napětí

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{\langle V_R^2(t) \rangle} = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}} . \quad (12.2.8)$$

V elektrických zásuvkách je efektivní napětí $V_{\text{ef}} = 230$ V o frekvenci $f = 50$ Hz (v USA $V_{\text{ef}} = 120$ V, $f = 60$ Hz).

Výkon disipovaný na rezistoru spočítáme jako

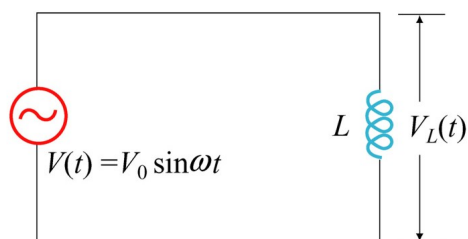
$$P_R(t) = I_R(t)V_R(t) = I_R^2(t)R , \quad (12.2.9)$$

který můžeme zprůměrnovat přes jednu periodu a získáme

$$\langle P_R(t) \rangle = \langle I_R^2(t)R \rangle = \frac{1}{2} I_{R0}^2(t)R = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{V_{\text{ef}}^2}{R} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} . \quad (12.2.10)$$

12.2.2 Cívka jako zátěž

Uvažujme nyní obvod, kde je cívka připojena jako zátěž ke zdroji střídavého napětí, viz Obr. 12.2.3.



Obr. 12.2.3: Cívka jako zátěž.

Jak uvidíme dále, obvod, kde je zapojena pouze indukčnost odpovídá zapojení s nekonečnou kapacitou $C = \infty$ a nulovým odporem $R = 0$. Aplikováním modifikovaného smyčkového Kirchhoffova zákona pro indukčnost získáme rovnici

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \quad (12.2.11)$$

z čehož plyne

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{L0}}{L} \sin \omega t, \quad (12.2.12)$$

kde $V_{L0} = V_0$. Integrací rovnice dostaneme

$$I_L(t) = \int dI_L = \frac{V_{L0}}{L} \int \sin \omega t dt = -\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) \cos \omega t = \left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (12.2.13)$$

kdy jsme pro přepsání posledního výrazu využili identitu goniometrických funkcí

$$-\cos \omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (12.2.14)$$

Srovnáním rovnice (12.2.13) s rovnicí (12.1.2) zjistíme, že amplituda proudu na cívce je

$$I_{L0} = \frac{V_{L0}}{\omega L} = \frac{V_{L0}}{X_L}, \quad (12.2.15)$$

kde veličina

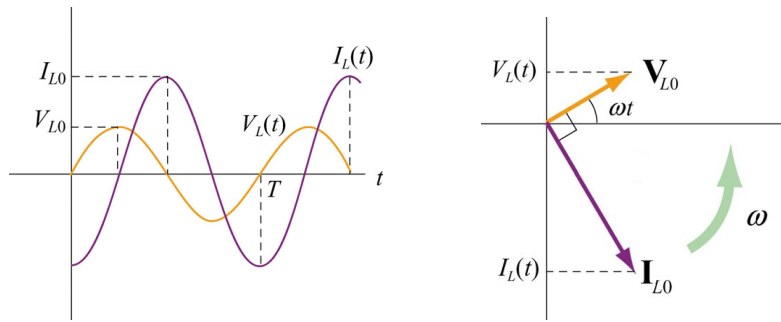
$$X_L = \omega L \quad (12.2.16)$$

je nazývána induktivní reaktance nebo *induktance*. Její SI jednotkou je 1Ω , jednotka je stejná jako u odporu. Na rozdíl od odporu induktance X_L lineárně závisí na úhlové frekvenci ω . S rostoucí frekvencí tak cívka propouští méně proudu, je to dáno tím, že se rychleji mění směr proudu. Na druhou stranu, induktance vymizí při velmi nízkých frekvencích.

Srovnáním rovnice (12.2.13) s (12.1.2) zjistíme, že fázový rozdíl je

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}. \quad (12.2.17)$$

Průběhy proudu a napětí na cívce a fázorový diagram jsou zobrazeny na obrázku 12.2.4.



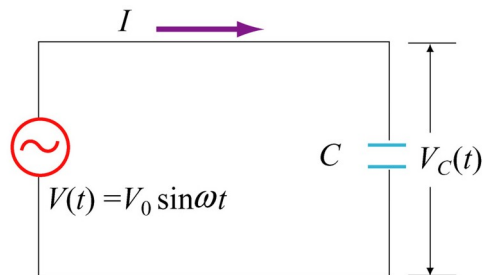
Obr. 12.2.4: *Nalevo* – závislost proudu a napětí na cívce.
Napravo – fázorový diagram zapojení s cívkou.

Jak je vidět z grafů, rozdíl fází proudu $I_L(t)$ a napětí $V_L(t)$ je $\varphi = \pi/2$, maximální proud obvodem prochází, právě když napětí je již v jedné čtvrtině dalšího cyklu, můžeme proto říci:

Proud na cívce je opožděn vůči napětí o $\pi/2$.

12.2.3 Kondenzátor jako zátěž

V zapojení s kondenzátorem jsou jak odpor R , tak indukčnost L rovny nule. Schéma zapojení je na obrázku 12.2.5.



Obr. 12.2.5: Kondenzátor připojený ke zdroji střídavého napětí.

Opět vyjdeme z Kirchhoffova zákona

$$V(t) - V_C(t) = V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0, \quad (12.2.18)$$

z čehož plyne

$$Q(t) = CV(t) = CV_C(t) = CV_{C0} \sin \omega t, \quad (12.2.19)$$

kde $V_{C0} = V_C$. Můžeme rovněž zapsat rovnici pro proud

$$I_C(t) = + \frac{dQ}{dt} = \omega CV_{C0} \cos \omega t = \omega CV_{C0} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (12.2.20)$$

kde jsme využili identity

$$\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (12.2.21)$$

Z předchozí rovnice je zřejmé, že amplituda proudu je

$$I_{C0} = \omega C V_{C0} = \frac{V_{C0}}{X_C}, \quad (12.2.22)$$

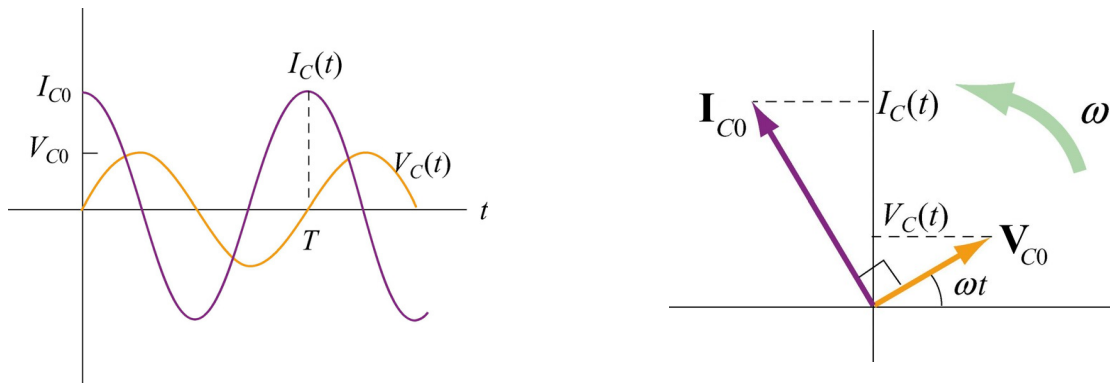
kde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (12.2.23)$$

se nazývá kapacitní reaktance, neboli *kapacitance*. Její SI jednotkou je rovněž 1Ω a reprezentuje efektivní odpor zapojené kapacity. Všimněte si, že X_C je nepřímo úměrná jak ω , tak C a diverguje, pokud ω jde k nule. Srovnáním rovnic (12.2.20) a (12.1.2) vidíme, že fázový rozdíl je

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \quad (12.2.24)$$

Průběh napětí a proudu, stejně jako fázorový diagram, jsou na obrázku 12.2.6.



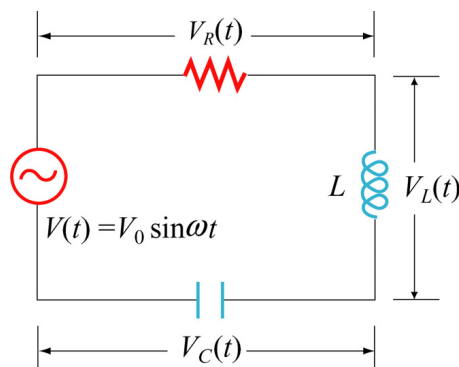
Obr. 12.2.6: *Nalevo* – průběh napětí a proudu na kondenzátoru.
Napravo – fázorový diagram zapojení s kondenzátorem.

Všimněte si, že v čase $t=0$ je nulové napětí na kondenzátoru, ale proud v obvodu je maximální. Proud na kondenzátoru $I_C(t)$ dosahuje maxima před napětím $V_C(t)$ v jedné čtvrtině cyklu ($\varphi = \pi/2$). Proto můžeme říci, že:

Proud předbíhá na kondenzátoru napětí o $\pi/2$.

12.3 Sériový RLC obvod

Nechť máme sériově zapojený *RLC* obvod jako na obrázku 12.3.1



Obr. 12.3.1: Sériově zapojený *RLC* obvod.

Z Kirchhoffova smyčkového zákona dostáváme

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = V(t) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0, \quad (12.3.1)$$

což vede na diferenciální rovnici

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t. \quad (12.3.2)$$

Předpokládejme, že kondenzátor byl na začátku vybitý, tedy $I = +dQ/dt$ je přímo úměrný přírůstku náboje na kondenzátoru, rovnice může tedy být přepsána do tvaru

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t. \quad (12.3.3)$$

Jedno z řešení této diferenciální rovnice je

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (12.3.4)$$

kde amplituda a fáze jsou

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{V_0/L_0}{\sqrt{(R\omega/L)^2 + (\omega^2 - 1/LC)^2}} = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \\ &= \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}} \end{aligned} \quad (12.3.5)$$

a

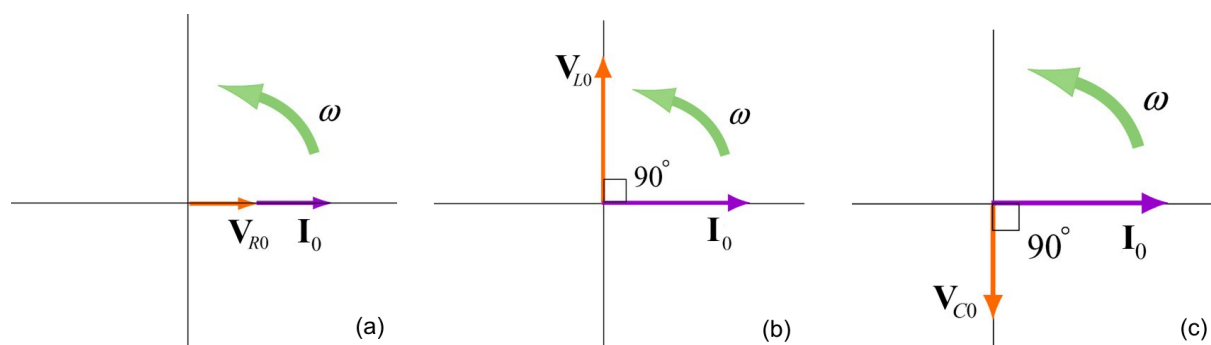
$$\tan \varphi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (12.3.6)$$

Odpovídající proud je

$$I(t) = + \frac{dQ}{dt} = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (12.3.7)$$

s amplitudou

$$I_0 = -Q_0 \omega = - \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (12.3.8)$$



Obr 12.3.2: Fázorové diagramy pro napětí a proud na (a) rezistoru, (b) cívce a (c) kondenzátoru v sériovém RLC obvodu.

Všimněte si, že okamžitý proud má stejnou fázi i amplitudu ve všech místech RLC obvodu. Na druhou stranu, okamžitá napětí na každé ze tří součástek zapojení R , L , nebo C mají jinou fázi i amplitudu, jak je vidět z fázorového diagramu na obrázku 12.3.2.

Okamžitá napětí z obrázku 12.3.2 můžeme spočítat jako

$$\begin{aligned} V_R(t) &= I_0 R \sin \omega t = V_{R0} \sin \omega t, \\ V_L(t) &= I_0 X_L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = V_{L0} \cos \omega t, \\ V_C(t) &= I_0 X_C \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -V_{C0} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (12.3.9)$$

kde

$$V_{R0} = I_0 R, \quad V_{L0} = I_0 X_L, \quad V_{C0} = I_0 X_C \quad (12.3.10)$$

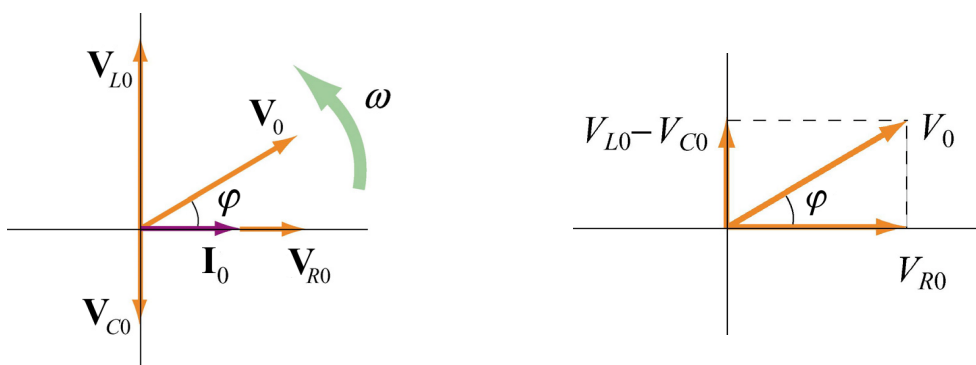
jsou amplitudy napětí na jednotlivých elementech obvodu. Suma všech třech napětí je rovna okamžitému napětí střídavého zdroje

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t). \quad (12.3.11)$$

Ve fázorové reprezentaci můžeme rovnici přepsat

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{R0} + \mathbf{V}_{L0} + \mathbf{V}_{C0},$$

což je znázorněno na obrázku 12.3.3 nalevo. Opět můžeme vidět, že fázor proudu \mathbf{I}_0 předbíhá fázor napětí na kondenzátoru V_{C0} o $\pi/2$, je ovšem opožděn za fázorem napětí na cívce V_{L0} rovněž o $\pi/2$. Všechny tři fázory napětí se otáčejí v čase proti směru hodinových ručiček, jejich vzájemné uspořádání je však stále stejné.



Obr. 12.3.3: Nalevo – fázorový diagram sériového RLC obvodu.
Napravo – vztahy mezi velikostmi (amplitudami) fázorů napětí.

Vztahy mezi amplitudami fázorů napětí jsou znázorněny na obrázku 12.3.3 napravo. Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} V_0 = |V_0| &= |V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}| = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} = \\ &= \sqrt{(I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} = \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \end{aligned} \quad (12.3.13)$$

což vede ke stejnému výsledku, jako jsme získali z rovnice (12.3.7).

Je důležité upozornit na to, že amplituda střídavého zdroje napětí není rovna součtu amplitud na jednotlivých elementech v obvodu

$$V_0 \neq V_{R0} + V_{L0} + V_{C0} . \quad (12.3.14)$$

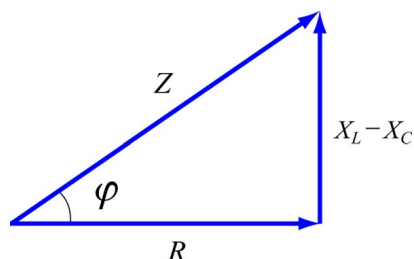
Je to způsobeno tím, že napětí na jednotlivých elementech obvodu nejsou ve fázi a maxima tak nastávají v jiných okamžicích.

12.3.1 Impedance

Již jsme si ukázali, že indukance $X_L = \omega L$ a kapacitance $X_C = 1/\omega C$ představovaly důležitou roli jako efektivní odpor v zapojeních s cívku nebo kondenzátorem. V sériově zapojeném RLC obvodu označujeme efektivní odpor jako *impedanci* definovanou jako

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} . \quad (12.3.15)$$

Vztah mezi Z , R , X_L a X_C je znázorněn v diagramu na obrázku 12.3.4:



Obr. 12.3.4: Schematické znázornění vztahů mezi Z , R , X_L a X_C .

SI jednotkou impedance je opět 1Ω . Rovnici pro časový průběh proudu tak můžeme přepsat jako

$$I(t) = \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi) . \quad (12.3.6)$$

Všimněte si, že impedance závisí na úhlové frekvenci ω stejně jako X_L a X_C . Rovnice (12.3.6) pro fázi φ a rovnice (12.3.15) pro impedanci Z můžeme využít i pro jednoduché obvody (i pouze s jedním prvkem) jako limitní zapojení RLC obvodu. Shrnutí je uvedeno v následující tabulce 12.1:

	R	L	C	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$\varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
rezistor	R	0	∞	0	0	0	R
induktor	0	L	∞	X_L	0	$\pi/2$	X_L
kondenzátor	0	0	C	0	X_C	$-\pi/2$	X_C

Tabulka 12.1: Jednoduché obvody jako limitní případ RLC obvodu.

12.3.2 Rezonance

Z rovnice (12.3.16) plyne, že amplituda proudu je maximální, pokud impedance Z je co nejmenší číslo. To nastává v případě, kdy $X_L = X_C$ nebo $\omega L = 1/\omega C$, což vede na rovnici

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (12.3.17)$$

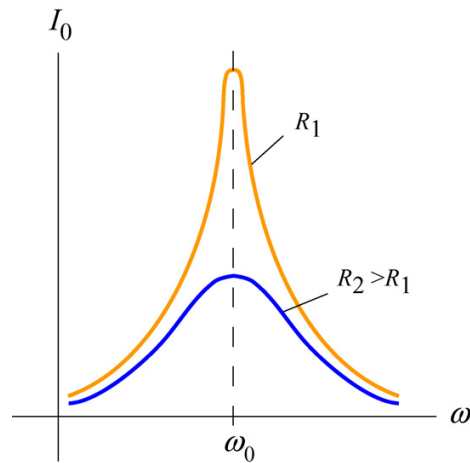
Tento jev, kdy proud I_0 dosahuje maximální hodnoty, je nazýván rezonancí a frekvence ω_0 při níž k tomuto jevu dochází je nazývána rezonanční frekvence. V případě rezonance je impedance rovna pouze odporu, tedy $Z = R$, amplituda proudu je

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \quad (12.3.18)$$

a fáze je

$$\varphi = 0 ,$$

jak je vidět z rovnice (12.3.5). Kvalitativně je chování obvodu ilustrováno na obrázku 12.3.5.



Obr. 12.3.5: Amplituda proudu jako funkce ω v RLC obvodu.

12.4 Výkon ve střídavých obvodech

V sériově zapojeném RLC obvodu je okamžitý výkon dodaný střídavým zdrojem dán vztahem

$$\begin{aligned} P(t) = I(t)V(t) &= \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi) V_0 \sin \omega t = \frac{V_0^2}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega t = \\ &= \frac{V_0^2}{Z} (\sin^2 \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi) , \end{aligned} \quad (12.4.1)$$

kde jsme využili známý součtový vzorec

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi . \quad (12.4.2)$$

Výkon vystředovaný v čase přes periodu je

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{Z} \sin^2 \omega t \cos \varphi dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{Z} \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi dt = \\ &= \frac{V_0^2}{Z} \cos \varphi \langle \sin^2 \omega t \rangle - \frac{V_0^2}{Z} \sin \varphi \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z} \cos \varphi , \end{aligned} \quad (12.4.3)$$

kde jsme ke středování využili rovnic (12.2.5) a (12.2.7). Rovnici pro průměrný výkon můžeme vyjádřit i pomocí efektivních napětí a proudů:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z} \cos \varphi = \frac{V_{\text{ef}}^2}{Z} \cos \varphi = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \varphi . \quad (12.4.4)$$

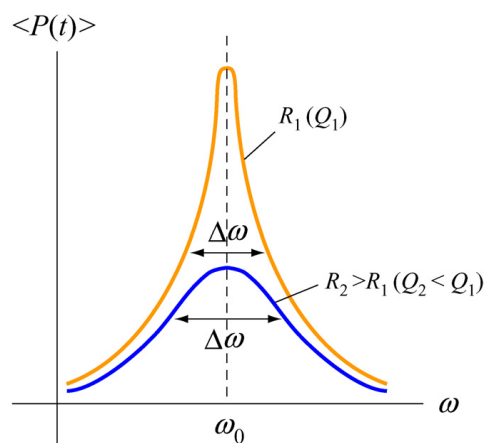
Hodnotu $\cos \varphi$ nazýváme *účinnost*. Z obrázku 12.3.4 je zřejmé, že

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} . \quad (12.4.5)$$

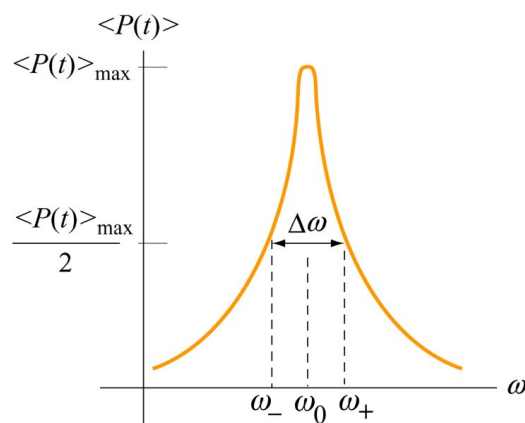
Střední hodnotu výkonu $\langle P(t) \rangle$ můžeme přepsat jako

$$\langle P(t) \rangle = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \left(\frac{R}{Z} \right) = I_{\text{ef}} \left(\frac{V_{\text{ef}}}{Z} \right) R = I_{\text{ef}}^2 R . \quad (12.4.6)$$

Na obrázku 12.4.1 je zobrazen průměrný výkon jako funkce ω zdroje střídavého napětí.



Obr. 12.4.1: Průměrný výkon RLC obvodu jako funkce úhlové rychlosti zdroje střídavého napětí.



Obr. 12.4.2: Šířka píku.

Z grafu je zřejmé, že průměrný výkon $\langle P(t) \rangle$ je maximální, když $\cos \varphi = 1$ nebo $Z = R$, což jsou podmínky rezonance, pak maximální výkon je

$$\langle P \rangle_{\text{max}} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}^2}{R} .$$

12.4.1 Šířka píku

Šířka píku je poměrně malá, jeden ze způsobů, jak ji definovat je zavést $\Delta \omega = \omega_+ - \omega_-$, kde ω_{\pm} jsou hodnoty úhlové frekvence zdroje, při kterých je výkon roven polovině maximální hodnoty. Tato definice se často nazývá šířka v polovině maxima a označuje anglickou zkratkou FWHM (Full-Width Half-Maximum), viz Obr. 12.4.2. Šířka $\Delta \omega$ roste se vzrůstajícím odporem R .

Abychom byli schopni nalézt $\Delta \omega$, přepíšeme si nejprve rovnici pro výkon $\langle P(t) \rangle$ do tvaru

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad (12.4.8)$$

kde $\langle P(t) \rangle_{\max} = V_0^2 / 2R$. Podmínka pro ω_{\pm} tak je

$$\frac{1}{2} \langle P(t) \rangle_{\max} = \langle P(t) \rangle \Big|_{\omega_{\pm}} \Rightarrow \frac{V_0^2}{4R} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \Big|_{\omega_{\pm}}, \quad (12.4.9)$$

z čehož získáme rovnici

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{R\omega}{L} \right)^2. \quad (12.4.10)$$

Po odmocnění získáme dvě větve řešení, které budeme analyzovat odděleně.

První řešení:

$$\omega_+^2 - \omega_0^2 = + \frac{R\omega_+}{L}. \quad (12.4.11)$$

Kladné řešení této kvadratické rovnice je

$$\omega_+ = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L} \right)^2 + \omega_0^2}. \quad (12.4.12)$$

Druhé řešení:

$$\omega_-^2 - \omega_0^2 = - \frac{R\omega_-}{L}. \quad (12.4.13)$$

Kladné řešení této kvadratické rovnice je

$$\omega_- = - \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L} \right)^2 + \omega_0^2}.$$

Šířka píku je pak

$$\Delta \omega = \omega_+ + \omega_- = \frac{R}{L}. \quad (12.4.15)$$

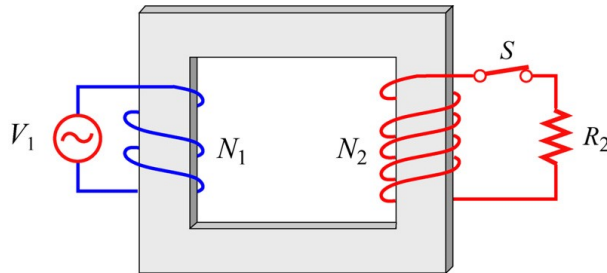
Pokud známe šířku $\Delta \omega$, můžeme spočítat činitel jakosti Q (nezaměňujte s nábojem) jako

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (12.4.16)$$

Pokud srovnáme tuto rovnici s (11.8.17), zjistíme, že oba výrazy se limitně shodují pro malý odpor a $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2} \approx \omega_0$.

12.5 Transformátor

Transformátor je zařízení pro zvyšování nebo snižování střídavého napětí. Typický transformátor je složen ze dvou vinutí cívek – primárního a sekundárního, jež jsou navinuty na kovovém jádru, viz Obr. 12.5.1. Primární cívka o N_1 závitech je připojena ke zdroji střídavého napětí $V_1(t)$. Sekundární cívka o N_2 závitech je připojena k zátěži R_2 . Transformátory fungují na principu indukovaného elektromotorického napětí. Napětí na sekundární cívce je indukováno první cívkou díky vzájemné indukčnosti.



Obr. 12.5.1: Transformátor.

Pokud zanedbáme malý odpor primárního vinutí, získáme z Faradayova zákona

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_B}{dt}, \quad (12.5.1)$$

kde ϕ_B je tok magnetického pole primární cívky. Železné jádro procházející primární cívkou slouží jako vodič magnetického pole a zaručuje, že téměř všude magnetický tok primární cívky prochází cívkou sekundární. Proto je na sekundární cívce indukované napětí

$$V_2 = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt}. \quad (12.5.2)$$

V případě ideálního transformátoru můžeme zanedbat ztráty způsobené Jouleovým ohřevem, takže výkon dodaný primární cívce je kompletně předán na cívku sekundární:

$$I_1 V_1 = I_2 V_2. \quad (12.5.3)$$

A pokud žádný magnetický tok neuniká z jádra transformátoru, tok ϕ_B je stejný jak v primární, tak v sekundární cívce. Srovnáním rovnic pak získáme vztah pro transformátor

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (12.5.4)$$

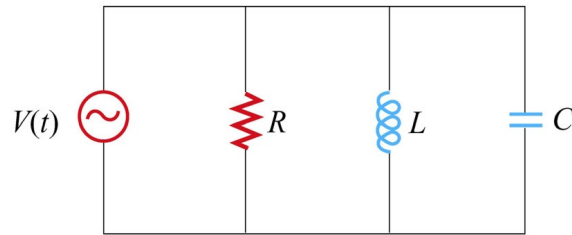
Z rovnic získáme i vztahy popisující proudy na cívkách transformátoru

$$I_1 = \left(\frac{V_2}{V_1} \right) I_2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) I_2. \quad (12.5.5)$$

Z toho je zřejmé, že poměr mezi vstupním a výstupním napětím je dán *převodním poměrem transformátoru* N_2/N_1 . Pokud $N_2 > N_1$, pak $V_2 > V_1$, což znamená, že výstupní napětí na sekundární cívce je vyšší, než je napětí vstupní na cívce primární. Transformátor, kde $N_2 > N_1$, nazýváme *zvyšovací transformátor*. Na druhou stranu, pokud $N_2 < N_1$, pak $V_2 < V_1$ a výstupní napětí je nižší než vstupní. Transformátor s $N_2 < N_1$ nazýváme proto *snižovací transformátor*.

12.6 Paralelní RLC obvod

Mějme paralelní RLC obvod zobrazený na obrázku 12.6.1. Zdroj střídavého napětí je dán vztahem $V(t) = V_0 \sin \omega t$.



Obr. 12.6.1: Paralelní RLC obvod.

Na rozdíl od sériového RLC obvodu je v paralelním odvodu napětí na všech třech elementech R , L a C stejné, všechna napětí jsou ve fázi, jsou rovněž ve fázi s proudem, který protéká rezistorem. Ostatní proudy mají však fázi rozdílnou.

Pro analýzu tohoto obvodu vyjdeme z výsledků z kapitol 12.2 až 12.4. Proud rezistorem je dán vztahem

$$I_R(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_{R0} \sin \omega t, \quad (12.6.1)$$

kde $I_{R0} = V_0/R$. Napětí na cívce je

$$V_L(t) = V(t) = V_0 \sin \omega t = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (12.6.2)$$

z čehož dostáváme

$$I_L(t) = \int_0^t \frac{V_0}{L} \sin \omega t' dt' = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_0}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_{L0} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (12.6.3)$$

kde $I_{L0} = V_0/X_L$ a $X_L = \omega L$ je indukance cívky.

Podobně, napětí na kondenzátoru $V_C(t) = V_0 \sin \omega t = Q(t)/C$, z čehož plyne

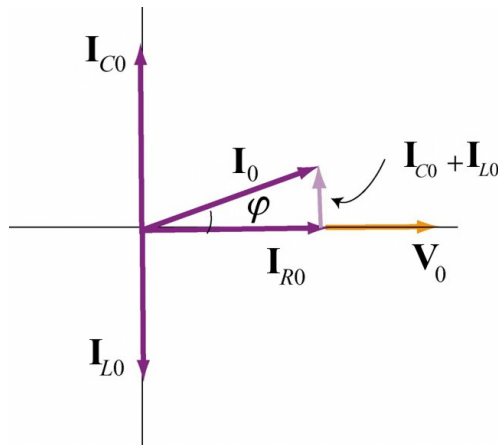
$$I_C = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t = \frac{V_0}{X_C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_{C0} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (12.6.4)$$

kde $I_{C0} = V_0/X_C$ a $X_C = 1/\omega C$ je kapacitance kondenzátoru.

Z Kirchhoffova zákona pro uzly dostaneme, že proud jdoucí obvodem je jednoduše suma všech tří proudů, tedy

$$\begin{aligned} I(t) &= I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) = \\ &= I_{R0} \sin \omega t + I_{L0} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + I_{C0} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (12.6.5)$$

Proudy můžeme zakreslit do fázorového diagramu, viz Obr. 12.6.2.



Obr 12.6.2: Fázorový diagram pro paralelní RLC obvod.

Z fázorového diagramu je vidět, že

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{R0} + \mathbf{I}_{L0} + \mathbf{I}_{C0} \quad (12.6.6)$$

a maximální amplitudu celkového proudu I_0 můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} I_0 = |\mathbf{I}_0| &= |\mathbf{I}_{R0} + \mathbf{I}_{L0} + \mathbf{I}_{C0}| = \sqrt{I_{R0}^2 + (I_{C0} - I_{L0})^2} = \\ &= V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)^2} = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}. \end{aligned} \quad (12.6.7)$$

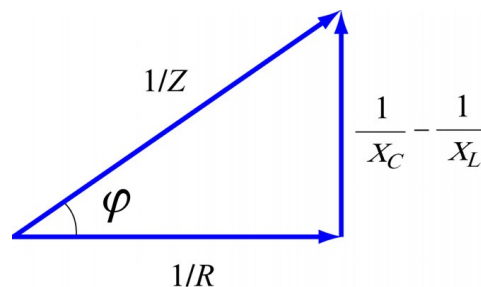
Protože jednotlivé proudy $I_R(t)$, $I_L(t)$ a $I_C(t)$ nejsou vzájemně ve fázi, nemůžeme jednoduše napsat, že maximální amplituda je rovna sumě jednotlivých amplitud

$$I_0 \neq I_{R0} + I_{L0} + I_{C0}. \quad (12.6.8)$$

Z rovnice $I_0 = V_0/Z$ můžeme vyjádřit inverzí impedanci (admitanci)

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}. \quad (12.6.9)$$

Vztah mezi Z , R , X_L a X_C je na obrázku 12.6.3.



Obr. 12.6.3: Vztah mezi Z , R , X_L a X_C v paralelním RLC obvodu.

Z tohoto obrázku, nebo z fázorového diagramu na Obr. 12.6.2 fázi φ spočítáme jako

$$\tan \varphi = \left(\frac{I_{C0} - I_{L0}}{I_{R0}} \right) = \frac{\frac{V_0}{X_C} - \frac{V_0}{X_L}}{\frac{V_0}{R}} = R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (12.6.10)$$

Podmínka pro rezonanci paralelního RLC obvodu je $\varphi = 0$, z čehož plyne

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_L}. \quad (12.6.11)$$

Rezonanční frekvence je pak

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (12.6.12)$$

a je stejná jako u sériového RLC obvodu. Z rovnice (12.6.9) vidíme, že při rezonanci je $1/Z$ minimální (nebo Z maximální). Proud cívku je přesně opačný, než proud kondenzátorem, takže celkový proud je tak minimální a je roven proudu na rezistoru

$$I_0 = \frac{V_0}{R}.$$

Stejně jako v sériovém RLC obvodu je výkon disipován jen na rezistoru. Průměrný výkon je

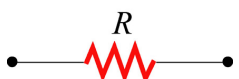
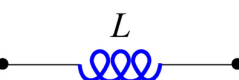

$$\langle P(t) \rangle = \langle I_R(t)V_R(t) \rangle = \langle I_R^2(t)R \rangle = \frac{V_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_0^2}{2Z} \left(\frac{Z}{R} \right). \quad (12.6.14)$$

Účinnost proto v tomto případě je

$$\frac{\langle P(t) \rangle}{V_0^2 / 2Z} = \frac{Z}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(R\omega C - \frac{R}{\omega L} \right)^2}} = \cos \varphi.$$

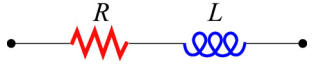

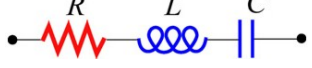
12.7 Shrnutí

- V střídavém obvodu se zdrojem napětí, jehož časový průběh napětí je $V(t) = V_0 \sin \omega t$, je proud obvodem dán předpisem $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$, kde I_0 je amplituda a φ je fáze. Následující tabulka shrnuje jednoduchá zapojení (pouze s jedním prvkem – kondenzátorem, cívku nebo rezistorem):

Prvek obvodu	Odpor / Reaktance	Amplituda proudu	Fázový úhel φ
	R	$I_{R0} = \frac{V_0}{R}$	0
	$X_L = \omega L$	$I_{L0} = \frac{V_0}{X_L}$	$\pi/2$ proud se opožďuje za napětím o 90°
	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$I_{C0} = \frac{V_0}{X_C}$	$-\pi/2$ proud předbíhá napětí o 90°

X_L je **induktance** a X_C je **kapacitance**.

- Pro zapojení, kde je více jak jeden prvek v sérii výsledky jsou:

Prvek obvodu	Impedance Z	Amplituda proudu	Fázový úhel φ
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$	$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$	$\varphi > 0 \quad (X_L > X_C)$ $\varphi < 0 \quad (X_L < X_C)$

Z je **impedance** obvodu. Pro sériový RLC obvod je $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Fázový úhel mezi napětím a proudem ve střídavém obvodu je $\varphi = \tan^{-1}[(X_L - X_C)/R]$.

- V paralelním RLC obvodu je impedance a fáze dána vztahy

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2},$$

$$\varphi = \tan^{-1} R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = \tan^{-1} R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

- Efektivní** napětí a proud jsou ve střídavém obvodu $V_{ef} = V_0/\sqrt{2}$, $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$.
- Průměrný výkon je u střídavých obvodů $\langle P(t) \rangle = I_{ef} V_{ef} \cos \varphi$, kde $\cos \varphi$ je **účinník**.
- Rezonanční frekvence** je $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Při **rezonanci** je proud sériově zapojeným RLC obvodem maximální, v paralelně zapojeném RLC obvodu je proud naopak minimální.
- Rovnice popisující **transformátor** je $V_2/V_1 = N_2/N_1$, kde V_1 je napětí zdroje na primárním vinutí (cívce) o N_1 závitů a V_2 je výstupní napětí na sekundární cívce o N_2 závitů. Transformátor, kde $N_2 > N_1$, nazýváme *zvýšovací transformátor*. Transformátor s $N_2 < N_1$ nazýváme *snižovací transformátor*.

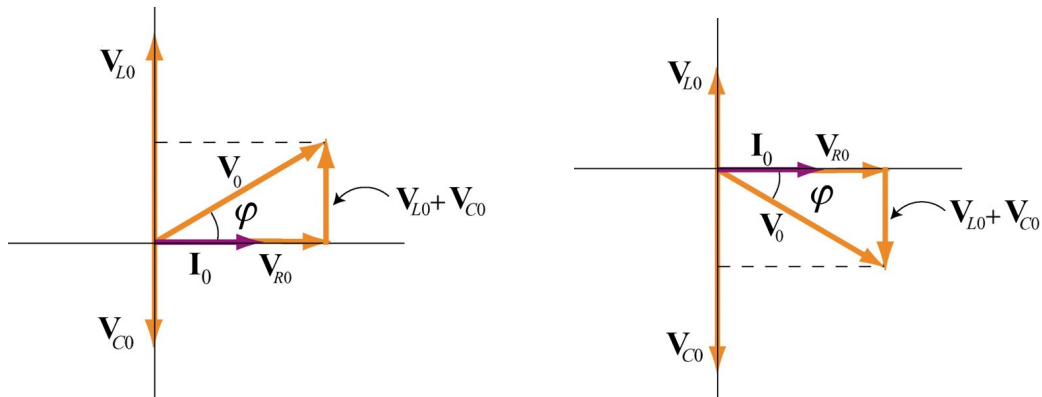
12.8 Algoritmy pro řešení střídavých obvodů

V této kapitole si ukážeme, jak mocný nástroj jsou fázory pro analýzu a řešení střídavých obvodů. Následuje seznam důležitých doporučení:

- Fázová zpoždění napětí a proudu vůči sobě jsou:
 - Pro rezistor jsou napětí i proud ve fázi.
 - Pro cívku se proud opožďuje za napětím o 90° .
 - Pro kondenzátor proud předbíhá napětí o 90° .
- Pokud jsou jednotlivé elementy zapojeny *sériově*, je na všech prvcích obvodu stejný proud (jak velikost, tak fáze), okamžitá napětí se však liší (jak do velikosti, tak i fáze). Pro

paralelní zapojení platí opak, tedy na všech prvcích je stejné napětí a ve fázi, proud jednotlivými prvky se však liší.

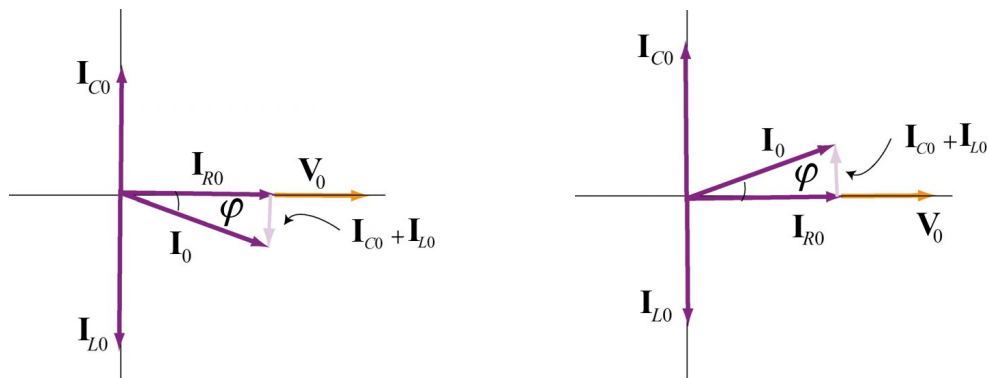
- Pro sériová zapojení si nakreslete fázorový diagram pro napětí. Amplitudy napětí na jednotlivých prvcích jsou délky jednotlivých fázorů v diagramu. Na obrázku 12.8.1 jsou zakresleny fázorové diagramy pro sériový RLC obvod, pro oba případy – nalevo je větší indukance $X_L > X_C$, napravo je větší kapacitance $X_L < X_C$.



Obr. 12.8.1: Fázorový diagram pro sériově zapojený RLC obvod; nalevo – $X_L > X_C$, napravo – $X_L < X_C$.

Z obrázku 12.8.1 nalevo je větší indukance, tedy $V_{L0} > V_{C0}$ a napětí V_0 předbíhá proud I_0 ve fázi φ . V případě, že je větší kapacitance, viz Obr. 12.8.1 napravo, $V_{L0} < V_{C0}$ a proud I_0 předbíhá napětí V_0 ve fázi φ .

- Pokud $V_{L0} = V_{C0}$ nebo $\varphi = 0$ obvod je v rezonanci. Odpovídající rezonanční frekvence $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ a na odporu je maximální výkon.
- Pro paralelní zapojení si nakreslete fázorový diagram pro proudy. Amplitudy proudů na všech prvcích v zapojení odpovídají velikostem fázorů v diagramu. Na obrázku 12.8.2 jsou zobrazeny fázorové diagramy paralelně zapojeného RLC obvodu pro oba případy, kdy $X_L > X_C$, nebo $X_L < X_C$.



Obr. 12.8.2: Fázorový diagram paralelního RLC obvodu; nalevo – $X_L > X_C$, napravo – $X_L < X_C$.

Z obrázku 12.8.2 nalevo, kdy je větší indukance, vidíme, že $I_{L0} > I_{C0}$ a napětí V_0 předbíhá proud I_0 ve fázi φ . V případě, že je větší kapacitance, viz Obr. 12.8.2 napravo, $I_{L0} < I_{C0}$ a proud I_0 předbíhá napětí V_0 ve fázi φ .

12.9 Řešené úlohy

P 12.9.1: Sériový RLC obvod

Mějme sérově zapojený RLC obvod s $L = 160$ mH, $C = 100$ μ F a $R = 40,0$ Ω připojený ke zdroji střídavého napětí $V(t) = (40,0 \text{ V}) \sin \omega t$, kde $\omega = 200$ rad/s.

- (a) Jaká je impedance zapojení?
- (b) Necht' obvodem teče proud $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$. Spočítejte I_0 .
- (c) Kolik je fáze φ ?

Řešení:

- (a) Impedanci zapojení spočítáme dle vzorce

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (12.9.1)$$

kde

$$X_L = \omega L \quad (12.9.2)$$

a

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (12.9.3)$$

jsou induktance a kapacitance. Průběh proudu zdroje střídavého napětí je $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, kde V_0 je maximální výstupní napětí a ω je úhlová frekvence, ze zadání $V_0 = 40$ V a $\omega = 200$ rad/s. Impedance Z proto po dosazení je

$$Z = 43,9 \Omega. \quad (12.9.4)$$

- (b) Pro $V_0 = 40,0$ V je amplituda dána vzorcem

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{40,0 \text{ V}}{43,9 \Omega} = 0,911 \text{ A}. \quad (12.9.5)$$

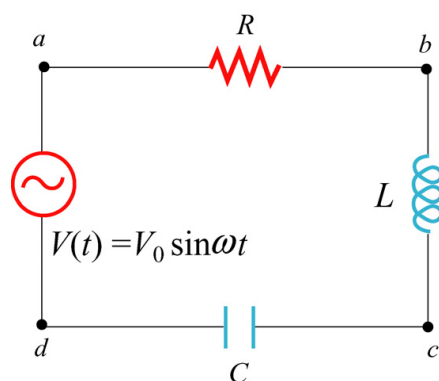
- (c) Fázový rozdíl mezi proudem a napětím je dán

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = -24,2^\circ. \quad (12.9.6)$$

P 12.9.2: Sériový RLC obvod

Mějme střídavý zdroj $V(t) = (150 \text{ V}) \sin(100t)$ připojený k sériovému RLC obvodu s parametry $L = 80,0$ mH, $C = 50,0$ μ F a $R = 40,0$ Ω , viz Obr. 12.9.1.

- (a) Spočítejte amplitudy napětí na jednotlivých prvcích zapojení V_{R0} , V_{L0} , V_{C0} .
- (b) Spočítejte maximální rozdíl potenciálů na cívce a kondenzátoru – mezi body b a d, viz Obr. 12.9.1.



Obr. 12.9.1: Střídavý RLC obvod.

Řešení:

(a) Induktance, kapacitance a impedance zapojeného obvodu jsou:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 200 \, \Omega, \quad (12.9.7)$$

$$X_L = \omega L = 8,00 \, \Omega, \quad (12.9.8)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 196 \, \Omega. \quad (12.9.9)$$

Proto amplituda proudu je

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{150 \, \text{V}}{196 \, \Omega} = 0,765 \, \text{A}. \quad (12.9.10)$$

Amplitudu napětí na rezistoru spočítáme jednoduše, jako součin amplitudy proudu a odporu

$$V_{R0} = I_0 R = 30,6 \, \text{V}. \quad (12.9.11)$$

Obdobně počítáme amplitudu napětí na cívce

$$V_{L0} = I_0 X_L = 6,12 \, \text{V} \quad (12.9.12)$$

a amplitudu napětí na kondenzátoru

$$V_{C0} = I_0 X_C = 153 \, \text{V}. \quad (12.9.13)$$

Všimněte si, že vztah mezi amplitudami napětí je

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2}. \quad (12.9.14)$$

(b) Maximální napětí mezi body b a d je rozdíl mezi V_{L0} a V_{C0} :

$$V_{bd} = |V_{L0} + V_{C0}| = |V_{L0} - V_{C0}| = 147 \, \text{V}. \quad (12.9.15)$$

P 12.9.3: Rezonance

Zdroj se sinusovým průběhem napětí $V(t) = (200 \, \text{V}) \sin \omega t$ je připojen k sériovému RLC obvodu s následujícími prvky v zapojení: $L = 10,0 \, \text{mH}$, $C = 100 \, \text{nF}$ a $R = 20,0 \, \Omega$. Spočítejte následující veličiny:

- (a) rezonanční frekvenci,
- (b) amplitudu proudu při rezonanci,
- (c) činitel jakosti Q zapojení,
- (d) amplitudu napětí na cívce při rezonanční frekvenci.

Řešení:

- (a) Rezonanční frekvence obvodu je dána vztahem

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = 5033 \text{ Hz} . \quad (12.9.16)$$

- (b) Při rezonanci je proud

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{200 \text{ V}}{20,0 \text{ } \Omega} = 10,0 \text{ A} . \quad (12.9.17)$$

- (c) Činitel jakosti Q spočítáme jako

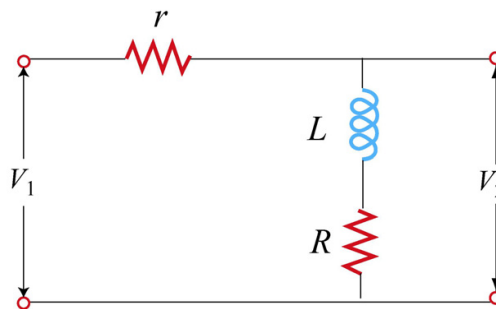
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 15,8 . \quad (12.9.18)$$

- (d) Amplituda proudu při rezonanci je dána

$$V_{L0} = I_0 X_L = I_0 \omega_0 L = 3,16 \times 10^3 \text{ V} . \quad (12.9.19)$$

P 12.9.4: RL horní propust

RL horní propust (zapojení, které filtruje nízkofrekvenční střídavé proudy) může být zapojena podle schématu na obrázku 12.9.2, kde odpor R je vnitřní odpor cívky.



Obr. 12.9.2: RL filtr.

- (a) Zjistěte podíl V_{20}/V_{10} amplitud výstupního napětí V_{20} ku vstupnímu napětí V_{10} .
- (b) Předpokládejte, že $r = 15,0 \text{ } \Omega$, $R = 20,0 \text{ } \Omega$ a $L = 250 \text{ mH}$. Zjistěte frekvenci, při níž je $V_{20}/V_{10} = 1/2$.

Řešení:

- (a) Impedance vstupního zapojení je $Z_1 = \sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}$, kde $X_L = \omega L$ a $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ pro výstupní obvod. Amplituda proudu je dána vztahem

$$I_0 = \frac{V_{10}}{Z_1} = \frac{V_{10}}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}} . \quad (12.9.20)$$

Obdobně amplituda výstupního napětí na impedanci s odporem je dána vztahem

$$V_{20} = I_0 Z_2 = I_0 \sqrt{R^2 + X_L^2} , \quad (12.9.21)$$

z toho plyne, že hledaný poměr napětí je

$$\frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}} . \quad (12.9.22)$$

(b) Z podmínky $V_{20}/V_{10} = 1/2$ dostaneme

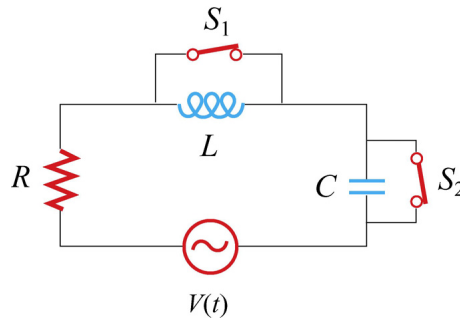
$$\frac{R^2 + X_L^2}{(R+r)^2 + X_L^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow X_L = \sqrt{\frac{(R+r)^2 - 4R}{3}} . \quad (12.9.23)$$

Protože $X_L = \omega L = 2\pi f L$, mezní frekvence pro tento poměr je

$$f = \frac{X_L}{2\pi L} = 5,51 \text{ Hz} . \quad (12.9.24)$$

P 12.9.5: RLC zapojení

Nechť máme zapojení podle obrázku 12.9.3. Střídavý zdroj napětí má průběh $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Oba spínače S_1 a S_2 jsou na počátku sepnuty. Najděte následující veličiny (při výpočtu zanedbejte přechodové jevy), pokud znáte R , L , V_0 a ω :



Obr. 12.9.3.

- proud $I(t)$ jako funkci času,
- průměrný příkon obvodu,
- proud jako funkci času, když je spínač S_1 otevřen,
- kapacitu kondenzátoru C , když jsou oba spínače S_1 i S_2 otevřeny po dlouhou dobu a proud i napětí jsou ve fázi,
- impedanci obvodu, pokud jsou oba spínače S_1 i S_2 otevřeny,
- maximální energii uloženou v kondenzátoru během oscilací,
- maximální energii uloženou v cívce během oscilací,

- (h) fázový rozdíl proudu a napětí, pokud zdvojnásobíme úhlovou rychlost ω zdroje střídavého napětí $V(t)$,
- (i) frekvenci, při které je induktance X_L rovna polovině kapacitance X_C .

Řešení:

- (a) Pokud jsou oba spínače S_1 a S_2 sepnuty, proud ze zdroje napětí jde pouze rezistorem, celková impedance obvodu je pak rovna odporu rezistoru R a proud můžeme napsat jako

$$I_R(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t . \quad (12.9.25)$$

- (b) Průměrný výkon je dán středováním

$$\langle P(t) \rangle = \langle I_R(t)V(t) \rangle = \frac{V_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{V_0^2}{2R} . \quad (12.9.26)$$

- (c) pokud je spínač S_1 otevřen delší dobu, proud jde ze zdroje na rezistor a cívku. Impedance RL obvodu je

$$Z = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (12.9.27)$$

a fázový rozdíl φ je

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) . \quad (12.9.28)$$

Proud jako funkci času můžeme napsat ve tvaru

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) . \quad (12.9.29)$$

Povšimněte si, že v limitě, kdy odpor R jde k nule je fázový rozdíl $\varphi = \pi/2$ a proud získá předpis stejný jako pro obvod, kde je zapojena jenom cívka.

- (d) V případě obou otevřených spínačů jde o klasický sériový RLC obvod, kde je fázový rozdíl φ dán vztahem

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} . \quad (12.9.30)$$

Pokud mají být napětí i proud ve fázi, potom $\varphi = 0$, a tedy $\tan \varphi = 0$, pro úhlovou frekvenci zdroje ω dostáváme

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} . \quad (12.9.31)$$

Kapacita kondenzátoru tedy je

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} . \quad (12.9.32)$$

- (e) Z bodu (d) víme, že zapojení je v rezonanci, indukance je rovna kapacitanci, impedance je tedy rovna odporu R

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R. \quad (12.9.33)$$

- (f) Elektrická energie uložená v kondenzátoru je

$$U_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C (I X_C)^2. \quad (12.9.34)$$

Maximální energii vyjádříme pomocí amplitudy proudu jako

$$U_{C, \max} = \frac{1}{2} C I_0^2 X_C^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_0}{R} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{V_0^2 L}{2R^2}, \quad (12.9.35)$$

kde jsme využili vztahu $\omega^2 = 1/LC$.

- (g) Maximální energie uložená v cívce je dána vztahem

$$U_{L, \max} = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{L V_0^2}{2R^2}. \quad (12.9.36)$$

- (h) Pokud zdvojnásobíme frekvenci zdroje, tedy $\omega_2 = 2\omega = 2/\sqrt{LC}$, fáze φ je

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{LC}} L - \frac{\sqrt{LC}}{2C}}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right). \quad (12.9.37)$$

- (i) Pokud indukance je polovina kapacitance, pak platí

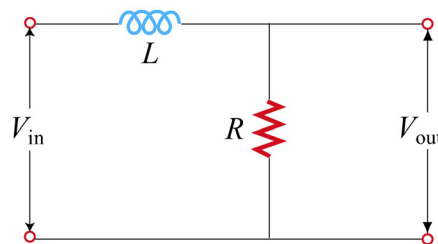
$$X_L = \frac{1}{2} X_C \Rightarrow \omega_3 L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_3 C} \right), \quad (12.9.38)$$

tedy

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\sqrt{2}\omega}{2}. \quad (12.9.39)$$

P 12.9.6: RL filtr

Schéma na obrázku 12.9.4 představuje RL filtr.



Obr. 12.9.4.

Nechť je $L = 400$ mH a vstupní napětí $V_{in} = (20,0 \text{ V}) \sin \omega t$, kde $\omega = 200$ rad/s.

- (a) Jaký musí být odpor R , aby výstupní napětí bylo zpožděno oproti vstupnímu napětí o $30,0^\circ$?
- (b) Najděte poměr vstupního ku výstupnímu napětí. Jakým typem filtru je tento obvod? Dolní nebo horní propustí?
- (c) Pokud zaměníme pozice cívky a rezistoru, bude filtr horní, nebo dolní propustí?

Řešení:

- (a) Fáze mezi napětími V_L a V_R je dán

$$\tan \varphi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{IX_L}{IR} = \frac{\omega L}{R}. \quad (12.9.40)$$

Z toho vyjádříme odpor R

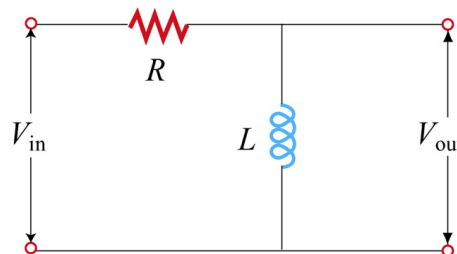
$$R = \frac{\omega L}{\tan \varphi} = 139 \, \Omega. \quad (12.9.41)$$

- (b) Poměr je dán vztahem

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{V_R}{V_{\text{in}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \cos \varphi = \cos 30,0^\circ = 0,866. \quad (12.9.42)$$

Jedná se o dolní propust, neboť poměr výstupního napětí ku vstupnímu napětí klesá s rostoucí úhlovou frekvencí ω .

- (c) V tomto případě je schéma zapojení na následujícím obrázku:



Obr 12.9.5: RL horní propust.

Poměr vstupního a výstupního napětí je dán

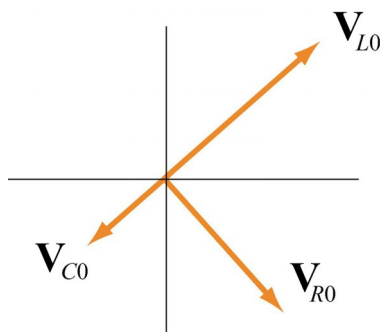
$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{V_L}{V_{\text{in}}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \left[1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Zapojení je horní propustí, protože poměr $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$ se blíží jedné pro vysoké hodnoty úhlové frekvence ω .

12.10 Tématické otázky

1. Mějme kondenzátor připojený ke zdroji střídavého napětí.
 - a. Jak se změní kapacitance, pokud zdvojnásobíme frekvenci zdroje? Co se stane, pokud snížíme frekvenci zdroje na polovinu?
 - b. Dodává v takovémto zapojení někdy kondenzátor energii do zdroje napětí?

2. Pokud napětí předbíhá proud v sériovém RLC obvodu, je frekvence zdroje nad nebo pod rezonanční frekvencí?
3. Na obrázku 12.10.1 je fázorový diagram pro RLC obvod.



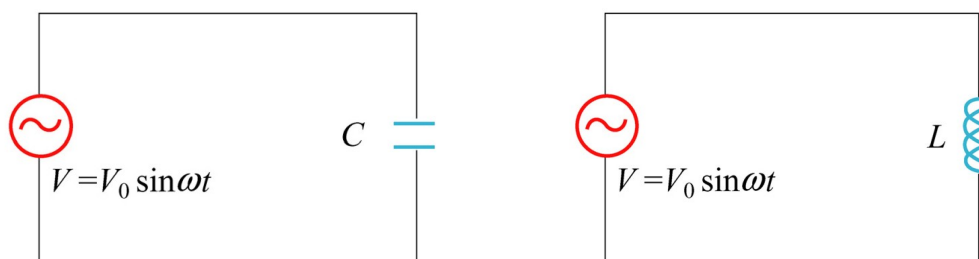
Obr. 12.10.1: Fázorový diagram RLC obvodu.

- a. Je frekvence zdroje pod nebo nad rezonanční frekvencí?
 - b. Nakreslete fázor V_0 zdroje střídavého napětí.
 - c. Odhadněte fázový rozdíl φ zdroje střídavého napětí a proudu.
4. Jak se účinník v RLC obvodu mění s odporem R , indukčností L a kapacitou C ?
 5. Můžeme použít baterii jako zdroj primárního napětí u transformátoru?
 6. Co můžete říci o fázi mezi proudem a napětím, pokud je účinník RLC obvodu $\cos \varphi = 1/2$? Předbíhá napětí proud nebo naopak? Vysvětlete!

12.11 Neřešené úlohy

P 12.11.1: Kapacitance a induktance

- (a) Kondenzátor o kapacitě $C = 0,5 \mu\text{F}$ je připojen ke zdroji střídavého napětí s amplitudou $V_0 = 300 \text{ V}$, viz Obr. 12.11.1 nalevo. Jaká je amplituda proudu I_0 tekoucího kondenzátorem, pokud úhlová frekvence ω je (i) 100 rad/s , nebo (ii) 1000 rad/s ?



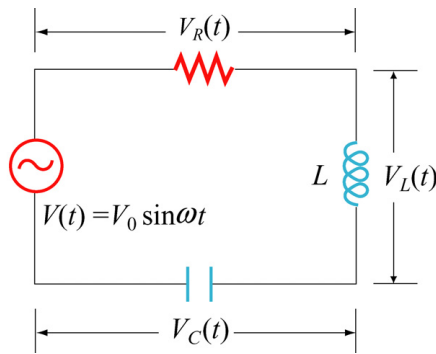
Obr 12.11.1: Střídavý obvod s kondenzátorem (nalevo); s cívkou (napravo).

- (b) Cívka o indukčnosti 45 mH je připojena podle obrázku 12.10.1 napravo ke zdroji střídavého napětí s amplitudou $V_0 = 300 \text{ V}$. Induktance cívky je $X_L = 1300 \Omega$.
- (i) Jaká je úhlová frekvence ω ?
 - (ii) Jaká je frekvence f zdroje střídavého napětí?
 - (iii) Jaká je amplituda I_0 proudu tekoucího cívkou?

- (c) Jaká by byla frekvence f , pokud by měly $0,5 \mu\text{F}$ kondenzátor a $0,5 \text{ mH}$ cívka stejnou reaktanci? Jaká by byla její velikost? Jaká by byla tato frekvence ve srovnání s rezonanční frekvencí LC obvodu složeného z těchto součástí?

P 12.11.2: RLC obvod blízko rezonance

Zapojení na obrázku 12.11.2 se skládá z rezistoru R , cívky L a kondenzátoru C , které jsou sériově spojeny se zdrojem střídavého napětí se sinusovým průběhem elektromotorického napětí $V(t) = V_0 \sin \omega t$.



Obr. 12.11.2.

Obvodem teče proud $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ s úhlovou frekvencí ω .

- (a) Při jaké úhlové frekvenci ω poteče obvodem proud s největší amplitudou I_0 ? Jaká je hodnota maximální amplitudy proudu I_{\max} ?
- (b) Jaká je hodnota fázového rozdílu φ mezi napětím $V(t)$ a proudem $I(t)$ při rezonanční frekvenci?
- (c) Předpokládejte, že jsme zvýšili úhlovou frekvenci ω tak, aby amplituda proudu I_0 klesla z hodnoty I_{\max} na hodnotu $I_{\max}/\sqrt{2}$. Jaký je teď fázový rozdíl mezi elektromotorickým napětím a proudem? Předbíhá proud, nebo je opožděn za napětím?

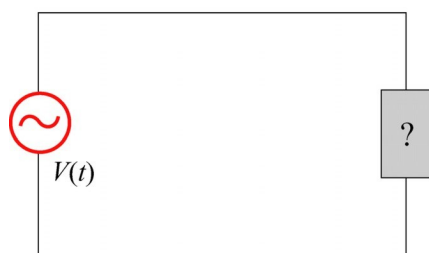
P 12.11.3: RC obvod

Sériově zapojený RC obvod s $R = 4,0 \times 10^3 \Omega$ a $C = 0,40 \mu\text{F}$ je připojen ke zdroji střídavého napětí s průběhem napětí $V(t) = (100 \text{ V}) \sin \omega t$, kde $\omega = 200 \text{ rad/s}$.

- (a) Jaký je efektivní proud v zapojení?
- (b) Jaký je fázový rozdíl mezi napětím a proudem?
- (c) Spočítejte výkon disipovaný v obvodu.
- (d) Spočítejte napětí na obou elementech, jak na kondenzátoru, tak na rezistoru.

P 12.11.4: Černá skříňka

Zdroj střídavého proudu je připojen k černé skříňce, která obsahuje obvod, viz Obr. 12.11.3.



Obr. 12.11.3: Černá skříňka připojená ke zdroji střídavého napětí.

Neznáme jednotlivé součástky zapojené v černé skříňce, ani jejich uspořádání. Jediná informace, kterou známe je, že:

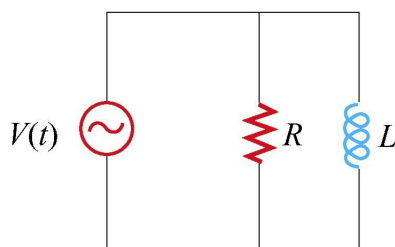
$$V(t) = (80 \text{ V}) \sin \omega t ,$$

$$I(t) = (1,6 \text{ A}) \sin (\omega t + 45^\circ).$$

- Přebíhá proud napětí nebo je za napětím opožděn?
- Je v obvodu černé skříňky větší kapacitance nebo induktance?
- Je obvod v černé skříňce v rezonanci?
- Jaký je jeho účinník?
- Je v obvodu zapojen rezistor? Kondenzátor? Cívka?
- Spočítejte průměrný příkon dodaný černé skříňce zdrojem střídavého napětí.

P 12.11.5: Paralelní RL obvod

Uvažme paralelní *RL* obvod zapojený podle obrázku 12.11.4.



Obr. 12.11.4: Paralelní *RL* obvod.

Zdroj střídavého napětí má průběh $V(t) = V_0 \sin \omega t$.

- Spočítejte proud tekoucí rezistorem.
- Spočítejte proud tekoucí cívkou.
- Jaká je velikost celkového proudu?
- Spočítejte impedanci celkového obvodu.
- Jaký je fázový rozdíl mezi proudem a napětím?

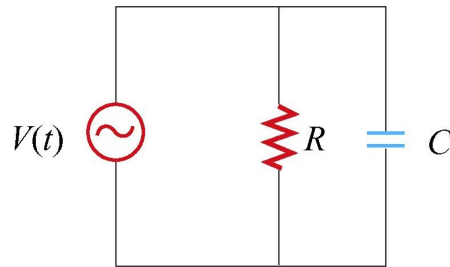
P 12.11.6: LC obvod

Předpokládejte, že v čase $t = 0$ je kondenzátor plně nabit nábojem Q_0 . V pozdějším čase $t = T/6$, kde T je perioda *LC* oscilace, spočítejte poměr následujících veličin k jejich maximálním hodnotám:

- (a) náboje na kondenzátoru,
- (b) energie uložené v kondenzátoru,
- (c) proudu v obvodu,
- (d) energie uložené v cívce.

P 12.11.7: Paralelní RC obvod

Uvažme paralelní RC obvod, který je zapojen podle schématu na obrázku 12.11.5.



Obr 12.11.5: Paralelní RC obvod.

Průběh napětí zdroje je $V(t) = V_0 \sin \omega t$.

- (a) Spočítejte proud tekoucí rezistorem.
- (b) Spočítejte proud tekoucí kondenzátorem.
- (c) Jaká je velikost celkového proudu?
- (d) Spočítejte impedanci zapojení.
- (e) Jaký je fázový rozdíl mezi proudem a napětím v tomto zapojení?

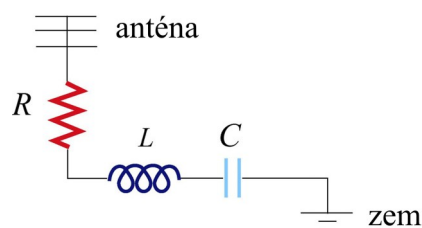
P 12.11.8: Disipace výkonu

Sériově zapojený RLC obvod s parametry $R = 10,0 \Omega$, $L = 400 \text{ mH}$ a $C = 2,0 \mu\text{F}$ je připojen ke zdroji střídavého napětí s amplitudou $V_0 = 100 \text{ V}$.

- (a) Spočítejte rezonanční frekvenci ω_0 .
- (b) Spočítejte efektivní hodnotu proudu při rezonanci.
- (c) Nechť je úhlová frekvence $\omega = 4000 \text{ rad/s}$. Spočítejte X_C , X_L , Z a φ .

P 12.11.9: FM anténa

FM anténa je složena (viz Obr. 12.11.6) z cívky o impedanci $L = 10^{-6} \text{ H}$, kondenzátoru o kapacitě $C = 10^{-12} \text{ F}$ a rezistoru o odporu $R = 100 \Omega$. Rádiový signál na anténě indukuje elektromotorické napětí o amplitudě 10^{-5} V .



Obr. 12.11.6: FM anténa.

- (a) Spočítejte úhlovou frekvenci ω_0 pro elektromagnetické vlnění, pro které je anténa vyladěna – tedy pro které bude obvodem téci maximální proud.
- (b) Jaký je činitel jakosti Q ?
- (c) Předpokládejme, že anténa zachytává signál, pro který je naladěna, jaká je amplituda proudu pro tuto frekvenci?
- (d) Jaká je amplituda potenciálového rozdílu na kondenzátoru při frekvenci, na kterou je anténa naladěna?

P 12.11.10: RLC obvod

Předpokládejme, že chcete navrhnout RLC obvod pro naladění Vašeho oblíbeného rádia vysílajícího na frekvenci 89,7 MHz. Chcete se však vyhnout opovrhlivé stanici, která vysílá na frekvenci 89,5 MHz. Abyste toho mohli dosáhnout, potřebujete pro daný napěťový signál z anténního vstupu vyladit rezonanční obvod tak, aby proud jím tekoucí byl alespoň 10^{-2} krát nižší pro frekvenci 89,5 MHz než pro Vaši oblíbenou frekvenci 89,7 MHz. Odpor R nemůže být nižší než $R = 0,1 \Omega$ a z praktických důvodů musíte použít minimální možnou indukčnost L .

- (a) Nalezněte závislost amplitudy proudu tekoucího RLC obvodem na úhlové frekvenci vysílaného signálu. Vyjádřete jí v závislosti na parametrech R , L a C .
- (b) Spočítejte úhlovou frekvenci vaší oblíbené stanice.
- (c) Jaké hodnoty L a C musíte použít?
- (d) Jaký je činitel jakosti pro tuto rezonanci?
- (e) Ukažte, že při rezonanci je poměr amplitudy napětí na induktoru a amplitudy řídicího signálu roven činiteli jakosti rezonance.
- (f) Ukažte, že při rezonanci je poměr amplitudy napětí na kondenzátoru a amplitudy řídicího signálu roven činiteli jakosti rezonance.
- (g) Jaký je průměrný příkon, který dodá anténní vstup obvodu při rezonanci (89,7 MHz)?
- (h) Jaký je fázový rozdíl pro signál na 89,5 MHz?
- (i) Jaký je průměrný příkon, který dodá anténní vstup při 89,5 MHz?
- (j) Je pro frekvenci 89,5 MHz větší indukčnost nebo kapacitance?