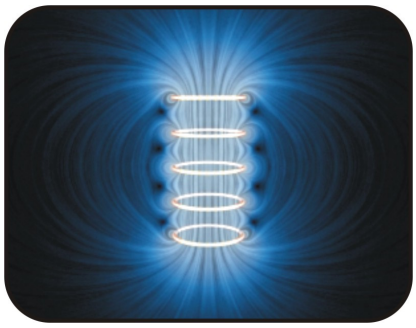
ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

XI. Indukčnost a magnetická energie



Obsah

11 INDUKČNOST A MAGNETICKÁ ENERGIE 2

11.1 VZÁJEMNÁ INDUKČNOST 2

11.2 VLASTNÍ INDUKČNOST 4

11.3 ENERGIE ULOŽENÁ V MAGNETICKÝCH POLÍCH 7

11.4 RL OBVODY 12

11.4.1 VLASTNÍ INDUKČNOST, MODIFIKOVANÝ KIRCHHOFFŮV ZÁKON O SMYČKÁCH 12

11.4.2 ROSTOUCÍ PROUD 14

11.4.3 KLESAJÍCÍ PROUD 16

11.5 LC OSCILACE 17

11.6 SÉRIOVÝ RLC OBVOD 21

11.7 SHRNUTÍ 22

11.8 DODATEK 1: ÚPLNÉ ŘEŠENÍ SÉRIOVÉHO RLC OBVODU 23

11.8.1 ČINITEL JAKOSTI OSCILACÍ 25

11.9 DODATEK 2: PNUTÍ PŘENÁŠENÁ MAGNETICKÝM POLEM 26

11.10 ALGORITMY ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ 30

11.10.1 VÝPOČET VLASTNÍ INDUKČNOSTI 30

11.10.2 OBVODY S INDUKTORY 30

11.11 ŘEŠENÉ ÚLOHY 31

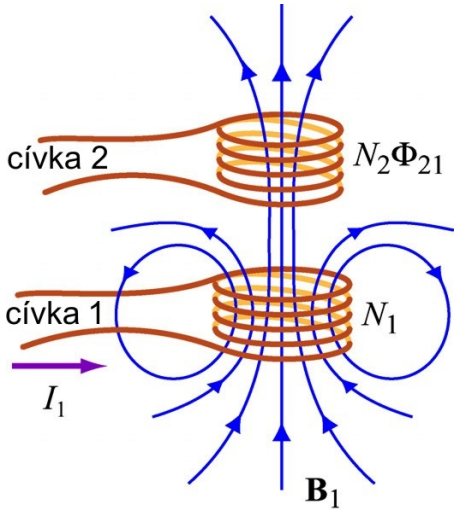
11.12 TÉMATICKÉ OTÁZKY 36

11.13 NEŘEŠENÉ ÚLOHY 37

11 Indukčnost a magnetická energie

11.1 Vzájemná indukčnost

Předpokládejme, že dvě cívky jsou umístěny blízko sebe, viz Obr. 11.1.1.



Obr. 11.1.1: Měnící se proud v cívce 1 způsobí vznik proměnného magnetického indukčního toku v cívce 2.

První cívka má N_1 závitů a protéká jí proud I_1, čímž vzniká magnetické pole $\mathbf{B}_1$. Jelikož jsou obě cívky v těsné blízkosti, procházejí některé silokřivky magnetického pole, vznikající v první cívce, i druhou cívkou. Označme ϕ_{21} magnetický tok způsobený proudem I_1, který prochází jedním závitem cívky 2. Pokud budeme elektrický proud I_1 měnit s časem, vznikne indukované elektromotorické napětí způsobené měnícím se magnetickým tokem v druhé cívce:

$$\varepsilon_{21} = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{cívka 2}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}_2 \,. \tag{11.1.1}$$

Magnetický tok ϕ_{21} v cívce 2 musí být úměrný elektrickému proudu v cívce 1:

$$N_2\phi_{21} = M_{21} I_1 \,, \tag{11.1.2}$$

kde konstantu úměrnosti M_{21} nazýváme vzájemná indukčnost. Můžeme ji také napsat jako

$$M_{21} = \frac{N_2\phi_{21}}{I_1} \,. \tag{11.1.3}$$

V soustavě jednotek SI má vzájemná indukčnost jednotku henry (H).

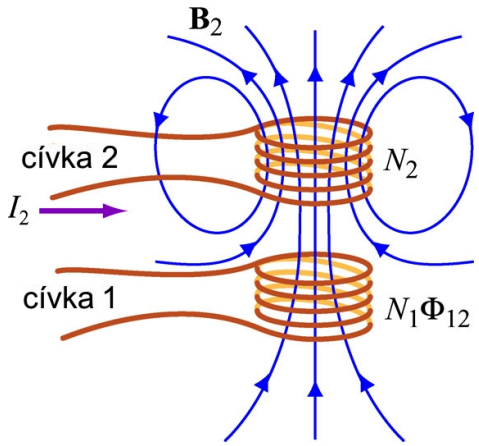
$$1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T m}^2/\text{A}. \tag{11.1.4}$$

Uvidíme, že vzájemná indukčnost závisí jen na geometrických vlastnostech obou cívek, jako jsou počty závitů, poloměry a vzájemná orientace.

Obdobným způsobem může téci elektrický proud I_2 cívkou 2 a měnit se s časem (viz. Obr. 11.1.2). Indukované elektromotorické napětí v cívce 1 za této situace bude

$$\varepsilon_{12} = -N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{cívka 1}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{A}_1 \tag{11.1.5}$$

a proud je indukován v cívce 1.



Obr. 11.1.2: Měnící se proud v cívce 2 způsobí vznik proměnného magnetického indukčního toku v cívce 1.

Magnetický tok ϕ_{12} v cívce 1 musí být úměrný elektrickému proudu v cívce 2:

$$N_1\phi_{12} = M_{12}I_2\,, \tag{11.1.6}$$

kde konstanta úměrnosti M_{12} je další vzájemná indukčnost, pro kterou lze psát

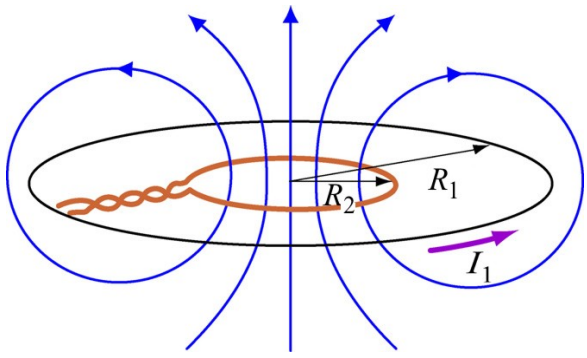
$$M_{12} = \frac{N_1\phi_{12}}{I_2}\,. \tag{11.1.7}$$

Z *relací reciprocity* (pro kombinaci Biotova-Savartova a Ampérova zákona) lze ukázat, že pro tyto konstanty platí

$$M_{12} = M_{21} = M\,. \tag{11.1.8}$$

P Příklad 11.1: Vzájemná indukčnost dvou soustředných rovinných smyček

Uvažujme dvě jednozávitové soustředné cívky o poloměrech R_1 a R_2 ($R_1 \gg R_2$) podle obrázku 11.1.3. Jaká je vzájemná indukčnost mezi těmito smyčkami?



Obr. 11.1.3: Dvě soustředné proudové smyčky.

Řešení:

Vzájemnou indukčnost můžeme vypočítat následovně. Využijeme rovnici (9.1.15) z kapitoly 9, pomocí které určíme magnetické pole v centru způsobené elektrickým proudem I_1 tekoucím vnější smyčkou:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}. \tag{1.1.9}$$

Vzhledem k tomu, že $R_1 \gg R_2$, můžeme aproximovat magnetické pole v celé vnitřní smyčce hodnotou B_1. Proto odhadneme tok vnitřní smyčkou na

$$\phi_{21} = B_1 A_2 = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\right)\pi R_2^2 = \frac{\mu_0 \pi I_1 R_2^2}{2R_1}. \tag{11.1.10}$$

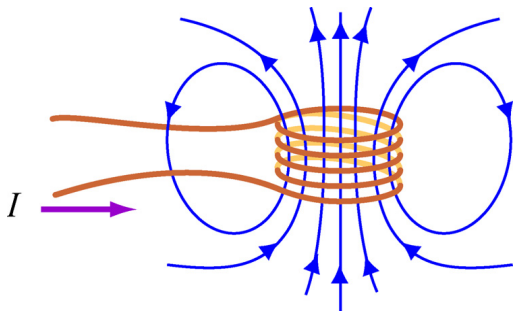
Vzájemná indukčnost je dána vztahem

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}. \tag{11.1.11}$$

Výsledek závisí jen na geometrických faktorech, tj. na R_1 a R_2 a nezávisí na proudu I_1 tekoucím cívkou.

11.2 Vlastní indukčnost

Uvažujme opět cívku s N závity, kterou protéká elektrický proud I proti směru hodinových ručiček, viz Obr. 11.2.1. Pokud se nemění proud, je magnetický tok smyčkou konstantní. Předpokládejme ale, že se proud I mění s časem, potom podle Faradayova zákona vznikne elektromotorické napětí působící proti změně, která ho vyvolala. Indukovaný elektrický proud bude téci ve směru hodinových ručiček, pokud $dI/dt > 0$ a proti směru hodinových ručiček, pokud $dI/dt < 0$. Vlastnost smyčky, při které její vlastní pole působí proti změnám proudu, nazýváme vlastní indukčnost a generované elektromotorické napětí nazýváme vlastní (zpětné) elektromotorické napětí ε_L. Všechny smyčky protékané proudem mají tuto vlastnost. Prvek obvodu, který má velkou vlastní indukčnost nazýváme induktor (cívka) a značíme ho symbolem .



Obr. 11.2.1: Magnetický tok proudovou smyčkou.

V jazyce matematiky můžeme vlastní indukované elektromotorické napětí napsat jako

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \tag{11.2.1}$$

a přidružená vlastní indukčnost L bude splňovat

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}. \tag{11.2.2}$$

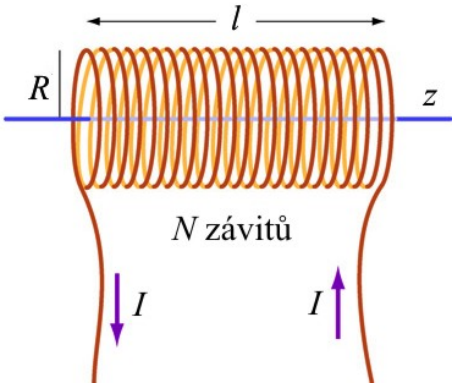
Kombinací obou výrazů získáme vztah

$$L = \frac{N\phi_B}{I}.$$

Fyzikálně je vlastní indukčnost L mírou „odporu“ induktoru proti změně elektrického proudu. Čím větší je hodnota L, tím menší bude skutečná změna proudu.

P Příklad 11.2: Vlastní indukčnost solenoidu (rovné cívky)

Vypočtěte vlastní indukčnost cívky, která má N závitů, délku l a poloměr R. Cívkou protéká elektrický proud I podle obrázku 11.2.2.



Obr. 11.2.2: Solenoid (rovná cívka).

Řešení:

Pokud zanedbáme okrajové jevy, můžeme použít Ampérův zákon a snadno určit magnetické pole uvnitř cívky pomocí rovnice (9.4.3):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{l}\hat{\mathbf{k}} = \mu_0 nI\,\hat{\mathbf{k}}, \tag{11.2.4}$$

kde $n = N/l$ je počet závitů cívky vztažený na jednotku délky. Magnetický tok každým jednotlivým závitem je

$$\phi_B = BA = \mu_0 nI \cdot \pi R^2. \tag{11.2.5}$$

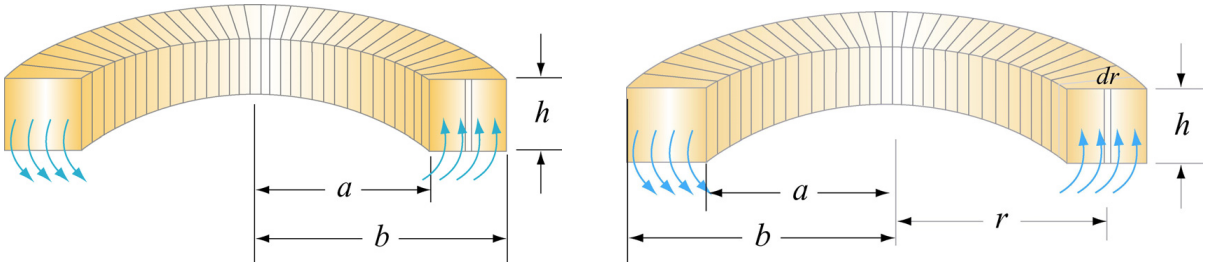
Vlastní indukčnost proto je

$$\boxed{L = \frac{N\phi_B}{I} = \mu_0 n^2 \pi R^2 l.} \tag{11.2.6}$$

Vidíme, že indukčnost L závisí jen na geometrických faktorech (n, R, l) a je nezávislá na proudu I.

P Příklad 11.3: Vlastní indukčnost toroidální cívky

Určete vlastní indukčnost toroidu složeného z N pravoúhlých závitů. Vnitřní poloměr toroidu je a, vnější b a výška h, viz Obr. 11.2.3 nalevo.



Obr. 11.2.3: Toroid s N závity.

Řešení:

Podle Ampérova zákona diskutovaného v kapitole 9.3 je magnetické pole ve vzdálenosti r od středu toroidu dáno vztahem

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint B ds = B\oint ds = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI\,, \tag{11.2.7}$$

odkud

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \tag{11.2.8}$$

Magnetický tok procházející jedním závitem získáme integrací přes pravoúhlý průřez závitu, element plochy bude $dA=hdr$, viz Obr. 11.2.3 napravo

$$\phi_B = \iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\, h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{11.2.9}$$

Celkový magnetický indukční tok je $N\phi_B$. Vlastní indukčnost proto je

$$L = \frac{N\phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{11.2.10}$$

Povšimněte si, že vlastní indukčnost opět závisí jen na geometrických faktorech. V limitě $a \gg b-a$ lze logaritmický člen rozvinout jako

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a} \tag{11.2.11}$$

a vlastní indukčnost přejde na vztah

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\cdot\frac{b-a}{a} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi a} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}\,, \tag{11.2.12}$$

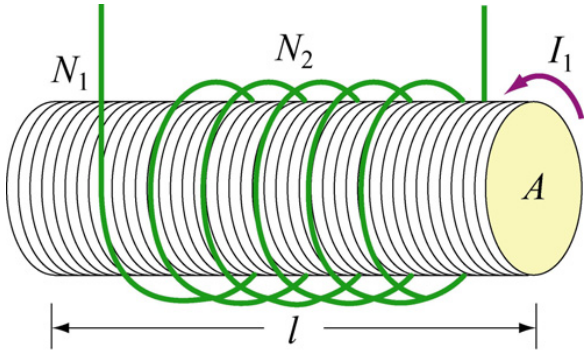
kde jsme označili příčný průřez $A = h(b–a)$ a obvod $l = 2\pi a$. V této limitě je vlastní indukčnost toroidální cívky stejná jako vlastní indukčnost solenoidu.

P Příklad 11.4: Vzájemná indukčnost solenoidu a cívky na něm navinuté

Dlouhý solenoid délky l má průřez A a sestává z N_1 závitů. Kolem je navinuta cívka s N_2 závity (viz Obr. 11.2.4). Cívka nemá se solenoidem elektrický dotek.

(a) Určete vzájemnou indukčnost M za předpokladu, že veškerý magnetický indukční tok procházející solenoidem prochází také vnější cívkou.

(b) Najděte vztah mezi vzájemnou indukčností M a vlastními indukčnostmi solenoidu a cívky.



Obr. 11.2.4:Cívka navinutá kolem solenoidu.

Řešení:

(a) Magnetický tok skrze každý závit vnější cívky, který je způsobený solenoidem, má hodnotu

$$\phi_{21} = BA = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} A\,, \tag{11.2.13}$$

kde $B = \mu_0 N_1 I_1 / l$ je homogenní pole uvnitř solenoidu. Vzájemná indukčnost tedy je

$$\boxed{M = \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}\,.} \tag{11.2.14}$$

(b) Z příkladu 11.2 víme, že vlastní indukčnost solenoidu s N_1 závity je dána vztahem

$$L_1 = \frac{N_2 \phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l}\,, \tag{11.2.15}$$

kde ϕ_{11} je magnetický tok skrze jeden závit solenoidu způsobený elektrickým proudem I_1. Obdobně pro vnější cívku máme $L_2 = \mu_0 N_2^2 A / l$. Vzájemnou indukčnost můžeme tedy za pomoci obou vlastních indukčností napsat jako

$$M = \sqrt{L_1 L_2}\,. \tag{11.2.16}$$

V obecnějších případech pro vzájemnou indukčnost platí

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}\,, \qquad 0 \le k \le 1\,,$$

kde k nazýváme *vazební koeficient*. V našem příkladě je $k = 1$, což znamená idealizovaný případ, kdy veškerý indukční tok solenoidu prochází navinutou cívkou a naopak.

11.3 Energie uložená v magnetických polích

Vzhledem k tomu, že induktor působí vždy proti změně proudu, musí být vnějším zdrojem, jakým je například baterie, vykonána práce při vzniku proudu v induktoru. Tato práce je ve formě energie uložena v induktoru. Induktor tak v magnetizmu hraje podobnou úlohu jako kondenzátor v elektrostatice.

Výkon, neboli časová změna práce, kterou vnější elektromotorické napětí vykonává k překonání elektromotorického napětí indukovaného induktorem je

$$P_L = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = I\varepsilon_{\text{ext}} . \tag{11.3.1}$$

Pokud je v obvodu jen vnější elektromotorické napětí a induktor, platí $\varepsilon_{\text{ext}} = -\varepsilon_L$, odkud plyne

$$P_L = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = -I\varepsilon_L = +IL\frac{dI}{dt} . \tag{11.3.2}$$

Pokud proud narůstá ($dI/dt > 0$), je $P > 0$ a vnější zdroj koná při přesunu energie do induktoru kladnou práci a vnitřní energie induktoru U_B roste. Naopak, pokud proud klesá ($dI/dt < 0$), je $P < 0$ a vnější zdroj odnímá energii z induktoru za současného poklesu vnitřní energie. Celková práce vykonaná vnějším zdrojem na zvýšení elektrického proudu z nuly na hodnotu I je dána vztahem

$$W_{\text{ext}} = \int dW_{\text{ext}} = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2 . \tag{11.3.3}$$

Tato práce je ekvivalentní magnetické energii uložené v induktoru:

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}LI^2 .} \tag{11.3.4}$$

Dříve jsme odvodili obdobný vztah pro elektrickou energii uloženou v kondenzátoru:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} . \tag{11.3.5}$$

Povšimněte si, že z energetického hlediska je podstatný rozdíl mezi induktorem a rezistorem. Kdykoli prochází rezistorem elektrický proud, je energie tekoucí do rezistoru disipována ve formě tepla a to bez ohledu na to, zda je proud ustálený nebo se mění v čase. Připomeňme si, že energie disipovaná v rezistoru je $P_R = IV_R = I^2R$. Naopak, do ideálního induktoru teče energie jen v případě $dI/dt > 0$. Energie není disipována, ale uložena v induktoru a uvolněna později, když proud klesá a $dI/dt < 0$. Pokud je proud tekoucí induktorem v čase neproměnný, nedochází k žádné změně energie a $P_L = LI \cdot dI/dt = 0$.

P Příklad 11.5: Energie uložená v solenoidu

Dlouhý solenoid má délku l, poloměr R a je složen z N závitů vodiče. Solenoidem prochází proud I. Nalezněte energii uloženou v systému.

Řešení:

Za pomoci vztahů (11.2.6) a (11.3.4) ihned získáme

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 l . \tag{11.3.6}$$

Tento výsledek můžeme přepsat za pomoci indukce magnetického pole $B = \mu_0 nI$:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 nI)^2(\pi R^2 l) = \frac{B^2}{2\mu_0}(\pi R^2 l) . \tag{11.3.7}$$

Vzhledem k tomu, že $\pi R^2 l$ je objem solenoidu a magnetické pole uvnitř je homogenní, představuje člen

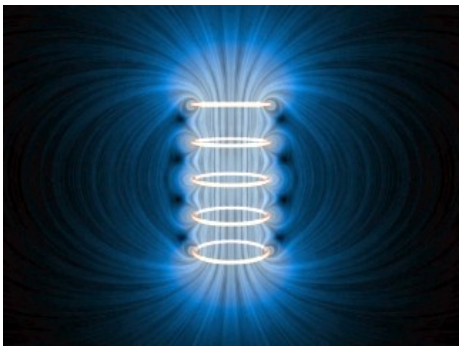
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{11.3.8}$$

hustotu magnetické energie neboli energii magnetického pole vztaženou na jednotku objemu. Tento vztah platí i tehdy, pokud magnetické pole není homogenní. Dříve jsme odvodili obdobný vztah pro hustotu energie elektrického pole:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 . \tag{11.3.9}$$

V Animace 11.1: Vznik a zánik magnetické energie

Uvažujme následující proces, při kterém vzniká magnetická energie za pomoci vnějších sil podle obrázku 11.2.1. Předpokládejme, že máme pět prstenců s velkým počtem volných kladných nábojů, které se nepohybují. Dokud prstenci neteče proud, neexistuje žádné magnetické pole. Představme si nyní, že existuje jakási vnější síla, která začne všemi náboji pohybovat a urychlovat je. Náboje začnou obíhat prstence se synchronně se zvětšující rychlostí a to proti směru hodinových ručiček při pohledu shora. Jakmile se začnou náboje zrychlovat, objeví se mezi prstenci magnetické pole, jehož silokřivky míří především ve směru společné osy prstenců. Pole je silnější uvnitř prstenců než vně. Této konfiguraci říkáme solenoid.



Obr. 11.3.1: Vznik a zánik magnetické energie.

Magnetický tok skrze prstence v animaci roste. Podle Faradayova zákona je časově proměnným magnetickým polem indukováno pole elektrické, jehož silokřivky mají směr pohybu hodinových ručiček při pohledu shora. Vzniklé elektrické pole působí na náboje silou, která má opačný směr než vnější síla, která způsobila pohyb. Vnější síla působí proti tomuto poli a to je zdrojem energie, která se projeví jako energie magnetického pole mezi prstenci.

V době nárůstu magnetického pole v prstencích koná vnější síla pohybující náboji práci proti indukovanému elektrickému poli. Vytvářená elektromagnetická energie proudí z místa svého vzniku (dráhy, po které se pohybují náboje) jak směrem dovnitř prstenců, tak směrem ven. Směr toku energie je vidět na textuře zobrazující silokřivky pole. Tok energie při urychlování kladných nábojů na stále větší a větší rychlost způsobuje zvýšení intenzity magnetického pole v prostoru mezi prstenci. Jakmile přestanou vnější síly urychlovat náboje, nastane ustálený stav. Náboje budou kroužit s konstantní rychlostí a uvnitř solenoidu bude konstantní magnetické pole. V této fázi bude indukované elektrické pole nulové ve shodě s Faradayovým indukčním zákonem.

S obrázkem 11.3.1 je také svázána animace zániku magnetické energie. Předpokládejme nyní, že existuje vnější síla, která začne synchronně brzdit pohyb nábojů. Ty se neustále pohybují proti směru hodinových ručiček, jak bylo ukázáno výše. Jakmile se začne pohyb nábojů zpomalovat, magnetické pole bude slábnout.

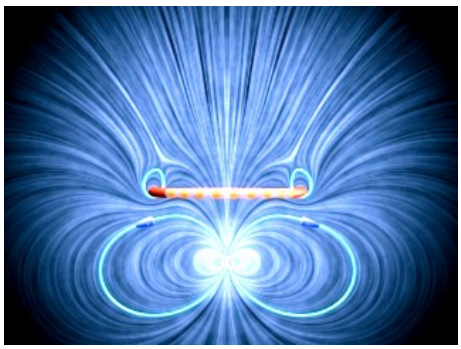
Magnetický tok skrze prstence v animaci slábne. Podle Faradayova zákona je časově proměnným magnetickým polem indukováno pole elektrické, jehož silokřivky mají směr proti pohybu hodinových ručiček při pohledu shora. Vzniklé elektrické pole působí na náboje silou, která má opačný směr než vnější síla brzdící pohyb. Vnější síla působící proti tomuto poli vykonává práci, která se projeví snížením energie magnetického pole.

Intenzita magnetického pole klesá a energie obsažená v tomto poli teče zpět na dráhu, po které se pohybují náboje a je předávána vnějším činitelům, které brzdí pohyb nábojů. Pokud zanedbáme ztráty způsobené zářením, je tato energie stejná jako byla energie potřebná ke vzniku pole a jde o vratný (reverzibilní) proces. Energie potřebná vnějšími činiteli ke vzniku pole je při zániku pole těmto činitelům beze zbytku navrácena.

A na závěr ještě poznámku. Kdekoliv je vytvářena elektromagnetická energie, elektrický náboj se pohybuje (nebo je jím pohybováno) proti elektrickému poli ($q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}<0$). Kdekoliv elektromagnetická energie zaniká, elektrický náboj se pohybuje (nebo je jím pohybováno) podél elektrického pole ($q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}>0$). Toto pravidlo je stejné, jako jsme viděli výše při diskusi o vzniku a zániku elektrické energie.

V Animace 11.2: Magnety a vodivé prstence

V příkladu Faradayova zákona, který jsme uvedli výše, byl smysl elektrického pole spojeného s časově proměnným magnetickým polem vždy takový, aby bránil změnám. Uveďme si jiný příklad Faradayova zákona, který ilustruje tuto snahu také, ale jiným způsobem. Na obrázku 11.3.2 je ukázán permanentní magnet, který je upevněn v počátku a jehož dipólový moment míří vzhůru. Na ose z nad magnetem máme souosý, vodivý, nemagnetický prstenec s poloměrem a, indukčností L a odporem R. Střed vodivého prstence se může pohybovat podél svislé osy. Prstenec je uvolněn z klidu a padá v gravitačním poli směrem k permanentnímu magnetu. V prstenci se díky změně magnetického toku objeví proudy a indukované elektrické pole, jak prstenec padá směrem k magnetu. Nad magnetem je směr elektrického proudu v prstenci takový, že je odpuzován od magnetu.



Obr. 11.3.2: Dokonale vodivý prstenec padá v ose permanentního magnetu. Proudové smyčky a výsledná magnetická napětí jsou takové, že pád prstence zpomalí. Jestliže je prstenec dostatečně lehký (nebo magnet dostatečně silný), prstenec se zůstane vznášet nad magnetem.

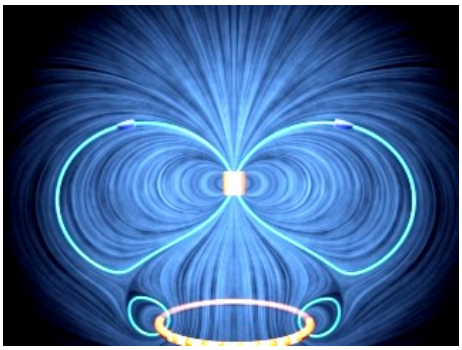
Tato fyzikální situace může být formulována matematicky pomocí soustavy tří obyčejných diferenciálních rovnic pro polohu prstence, jeho rychlost a proud protékající prstencem.

Na obrázku 11.3.2 je uvažována specifická situace, ve které je odpor prstence identicky nulový. Hmotnost kroužku je malá (nebo intenzita magnetického pole je dostatečně vysoká), takže se kroužek vznáší nad magnetem. Na počátku simulace je kroužek v klidu ve vzdálenosti 2*a* nad magnetem. Kroužek začne vlivem gravitace padat. Když se prstenec dostane do vzdálenosti *a* nad magnetem, začne se jeho rychlost zpomalovat, protože prstencem začíná protékat proud. Jak proud narůstá, jeho energie se ukládá do magnetického pole a v okamžiku, kdy se kroužek zastaví, se jeho veškerá potenciální energie přemění na energii magnetického pole. Tato magnetická energie se pak vrací do prstence a ten se „odrazí" a vrací do původní polohy ve vzdálenosti 2*a* nad magnetem. Protože v našem příkladu neuvažujeme tření, bude se tento pohyb opakovat trvale.

Které důležité jevy můžeme z této animace pochopit? Na počátku situace je veškerá volná energie uložena v gravitační potenciální energii prstence. Jak začíná prstenec padat, jeho potenciální energie se přeměňuje do jeho energie kinetické. Také se začíná projevovat ukládání energie do magnetického pole. Stlačené pole pod prstencem umožňuje přenos síly působící zdola na pohybující se prstenec, ale stejně tak i přenos síly působící shora na magnet. Tato komprese pole také váže energii v magnetickém poli. Při pohledu na tuto animaci je zřejmě možné říci, že jak se kinetická energie padajícího prstence zmenšuje, tak více a více přibývá energie vázaná v magnetickém poli a obráceně, když se prstenec vrací vzhůru. Navíc, protože pohyb silokřivek pole jsou ve směru Poyntingova vektoru, můžeme přímo vidět tok elektromagnetické energie z bezprostředního sousedství prstence do pole, které ho obklopuje v okamžiku, kdy prstenec padá. Stejně tak můžeme pozorovat tok energie z pole zpět do okolí prstence v čase, kdy prstenec stoupá vzhůru.

Na obrázku 11.3.3 je ukázán realističtější případ, kdy je odpor prstence konečný. Energie se nyní nezachovává a prstenec může případně propadnout kolem magnetu. Při pádu kolem magnetu se obrátí směr indukovaného elektrického pole a tím i vířivých proudů v prstenci. Prstenec je přitahován k magnetu nad ním a jeho pád je brzděn.

Je jistě mnoho jiných příkladů na padající prstenec a stacionární magnet nebo padající magnet na stacionární prstenec, které si můžete prohlédnout v části věnované **vizualizacím**. Všechny popisují tentýž jev. Tj. jak elektrické pole provázané s časově proměnlivým magnetickým polem brání změnám. V limitním případě nulového odporu můžeme dosáhnout takového výsledku (viz. Obr. 11.3.2), že magnetický tok skrze prstenec se v průběhu pohybu nemění.



Obr. 11.3.3: Prstenec s nenulovým odporem padající v ose magnetu. Je ukázán prstenec v průběhu pádu kolem magnetu, kdy je přitahován jeho magnetickým polem.

11.4 RL obvody

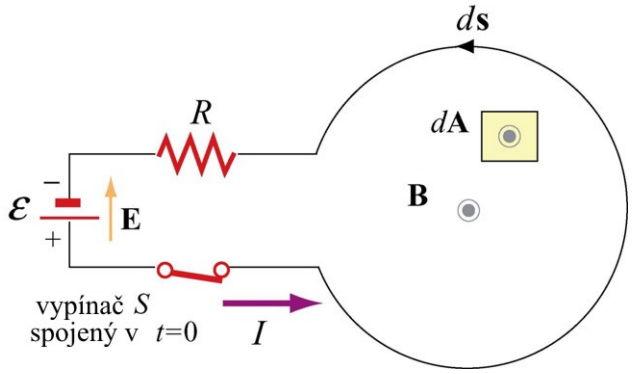
11.4.1 Vlastní indukčnost, modifikovaný Kirchhoffův zákon o smyčkách

Přidání časově proměnných magnetických polí do jednoduchých obvodů znamená, že integrál z elektrického pole po uzavřené křivce již nadále není nulový. Pro libovolný otevřený povrch nyní platí

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}\,. \qquad (11.4.1)$$

Libovolný obvod, ve kterém se mění elektrický proud s časem, produkuje časově proměnná magnetická pole a proto i indukovaná pole elektrická. Jak se řeší jednoduché obvody, uvážíme-li tyto jevy? V následujícím ukážeme konzistentní cestu, jak zavést proměnná magnetická pole a indukčnost do teorie obvodů.

V okamžiku, kdy zavedeme časově proměnná magnetická pole, přestane být rozdíl potenciálu mezi dvěma body dobře definovaný. Je to proto, že křivkový integrál elektrického pole podél uzavřené křivky je nenulový a potenciál mezi dvěma body, například *a* a *b*, začne záviset na cestě, po které probíhá mezi těmito body integrace. Elektrické pole již nadále není konzervativním polem a elektrický potenciál není vhodnou veličinou pro popis pole. Nadále nelze elektrické pole spočítat jako záporně vzatý gradient skalárního potenciálu. Je ale možné postupovat přímočaře a napsat rovnici určující chování obvodu.



Obr. 11.4.1: Obvod s induktorem ve tvaru jediné smyčky.

Postup ukážeme na jednoduchém obvodu znázorněném na obrázku 11.4.1. Obvod se skládá z baterie, odporu, spínače *S*, který spojí obvod v čase $t = 0$ a jednosmyčkového induktoru. Důsledky přítomnosti indukčnosti budou zřejmé z následujícího postupu. V čase $t > 0$ poteče obvodem elektrický proud v naznačeném směru (z kladné svorky baterie do záporné). Jaká rovnice popisuje časovou závislost elektrického proudu $I(t)$ pro $t > 0$?

Abychom odpověděli, použijeme Faradayův indukční zákon na otevřenou plochu, která je ohraničena obvodem. Element plochy d**A** zvolíme směrem z nárysny a křivku ohraničující plochu budeme probíhat proti směru hodinových ručiček. V tomto směru míří i element křivky d**s**. Nejprve se zabývejme tím, jaký je integrál z elektrického pole podél celého obvodu. V baterii míří elektrické pole od kladné svorky směrem k záporné, a pokud procházíme baterií ve směru naší křivky, budeme se pohybovat proti elektrickému poli, a proto $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} < 0$. Příspěvek baterie k celkovému integrálu tedy je $-\varepsilon$. Další příspěvek je od rezistoru, ve kterém míří elektrické pole ve směru naší křivky a proto je $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} > 0$. Příspěvek rezistoru k integrálu tedy je $+IR$. A co když se pohybujeme podél smyčky induktoru? Pokud

je odpor vodiče smyčky nulový, nebude v ní žádné elektrické pole a proto je celkový integrál z elektrického pole podél naší smyčky

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon + IR\,. \qquad (11.4.2)$$

Určeme nyní magnetický tok ϕ_B tekoucí plochou obvodu. Obvod jsme navrhli tak, aby část, kde se nachází baterie, spínač a rezistor měla výrazně menší plochu než smyčka induktoru a magnetický tok touto částí obvodu byl zanedbatelný. Magnetický tok bude kladný, protože proud teče obvodem proti směru hodinových ručiček a proto generované magnetické pole míří směrem z nárysny, což je ve směru normály plochy a proto skalární součin $\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} > 0$. Povšimněte si, že **B** je *vlastní* magnetické pole, tj. pole vytvářené proudem tekoucím obvodem, nikoli nějakými vnějšími proudy.

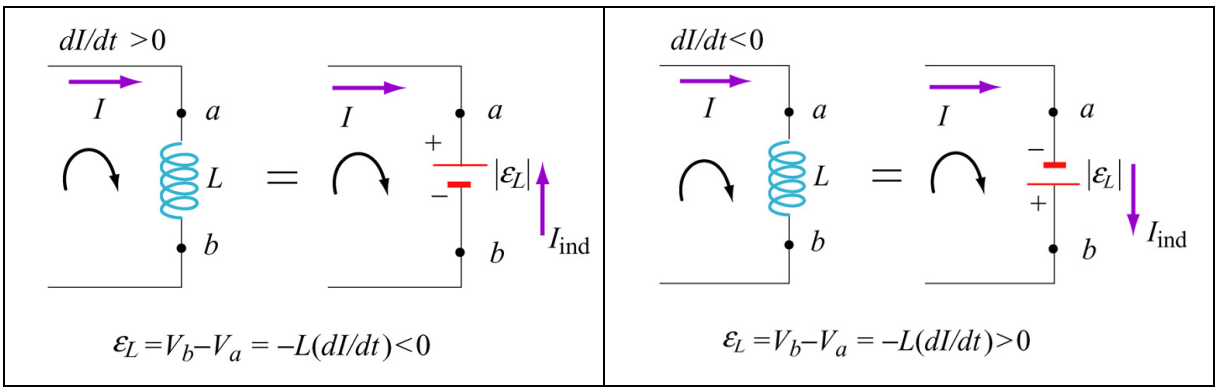
Z kapitoly 11.1 víme, že magnetický tok ϕ_B je úměrný elektrickému proudu I a proto můžeme psát $\phi_B = LI$, kde L je vlastní indukčnost závisící jen na geometrii obvodu. Časová změna indukčního toku proto je LdI/dt a Faradayův zákon má tvar

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon + IR = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}\,. \qquad (11.4.3)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že základní rovnice pro výpočet $I(t)$ v našem obvodu je

$$\Delta V = \varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

Výraz jsme úmyslně přepsali do takové podoby, aby připomínal Kirchhoffův zákon pro smyčku, ve kterém je součet všech napětí podél smyčky nulový. Pokud chceme tento Kirchhoffův zákon používat nadále, musíme definovat potenciálový spád na induktoru.



Obr. 11.4.2: Modifikované Kirchhofovo pravidlo pro induktor s narůstajícím proudem (nalevo) a s klesajícím proudem (napravo).

Modifikované pravidlo pro induktor můžeme získat takto: Polarita vlastního elektromotorického napětí je taková, aby podle Lenzova zákona byla opačná než změna, která ji vyvolala. Pokud je časová změna proudu kladná (viz Obr. 11.4.2 nalevo), vlastní indukované elektromotorické napětí ε_L vytvoří indukovaný proud I_{ind} mířící v opačném směru než proud I (tím působí proti změně). Induktor můžeme nahradit elektromotorickým napětím $|\varepsilon_L| = L|dI/dt| = +LdI/dt$ s polaritou ukázanou na Obr. 11.4.2 nalevo. Naopak, pro zápornou časovou změnu proudu $dI/dt/ < 0$ (viz Obr. 11.4.2 napravo) teče indukovaný proud I_{ind}, vytvořený elektromotorickým napětím ε_L, ve stejném směru jako proud I. Tím bude působit proti změně, která ho vyvolala.

Vidíme, že v obou případech ($dI/dt/ > 0$ nebo $dI/dt/ < 0$) je změna potenciálu při pohybu z *a* do *b* ve směru tekoucího proudu *I* vždy $V_b - V_a = -LdI/dt$ a proto platí

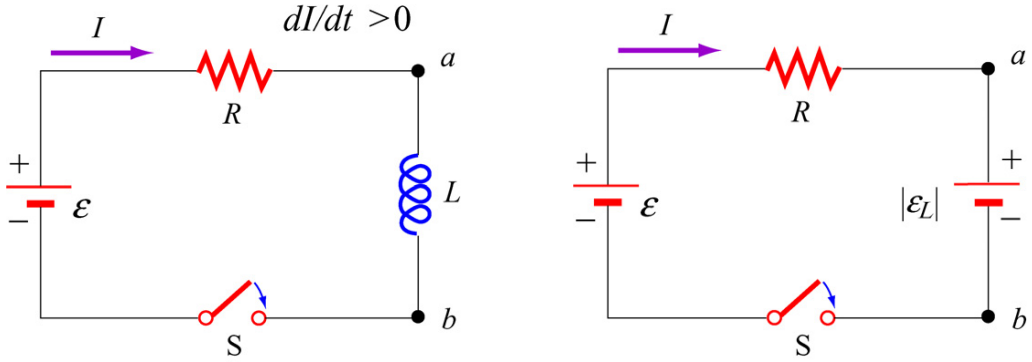
Modifikované Kirchhoffovo pravidlo pro smyčku s induktorem:

Pokud procházíme induktorem ve směru tekoucího proudu, bude změna „potenciálu“ $-LdI/dt$.
Pokud procházíme induktorem proti směru proudu, bude změna „potenciálu“ $+LdI/dt$.

Využití modifikovaného Kirchhoffova pravidla dá správné rovnice pro obvody obsahující induktory. Mějte ovšem na paměti, že je to **zavádějící** a v některých případech fyzikálně **nesprávné**. Zdůrazněme, že Kirchhoffovo pravidlo bylo původně získáno za předpokladu, že křivkový integrál elektrického pole podél uzavřené křivky je nulový. V časově proměnném magnetickém poli to ale neplatí a tak je součet spádů potenciálů podél obvodu nenulový a roven $\pm L\,dI\,/\,dt$.

11.4.2 Rostoucí proud

Uvažujme nyní *RL* obvod podle obrázku 11.4.3. V čase $t = 0$ sepneme spínač. Uvidíme, že nebude mít hned na začátku maximální hodnotu ε/R, ale bude narůstat postupně. To je způsobeno přítomností vlastního elektromotorického napětí na induktoru.



Obr. 11.4.3: *Nalevo* – obvod s narůstajícím proudem. *Napravo* – ekvivalentní obvod podle modifikovaného Kirchhoffova pravidla pro smyčku.

Za pomoci modifikovaného Kirchhoffova pravidla pro rostoucí proud ($dI/dt > 0$) je *RL* obvod popsán následující obyčejnou diferenciální rovnicí:

$$\varepsilon - IR - |\varepsilon_L| = \varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0\,. \qquad (11.4.5)$$

Všimněte si, že mezi induktorem a rezistorem je podstatný rozdíl. Rozdíl potenciálů na rezistoru závisí na protékajícím elektrickém proudu, zatímco rozdíl potenciálů na induktoru závisí na časové změně proudu dI/dt. Vlastní indukované elektromotorické napětí nepůsobí proti samotnému proudu, ale proti změně proudu dI/dt.

Předchozí rovnici můžeme separovat do tvaru

$$\frac{dI}{I - \varepsilon/R} = -\frac{dt}{L/R}\,. \qquad (11.4.6)$$

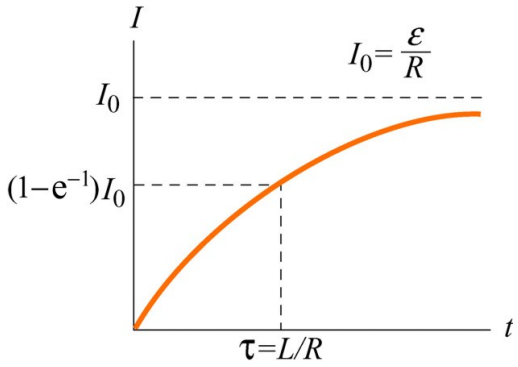
Integrací obou stran rovnice s počáteční podmínkou $I(t = 0) = 0$ nalezneme řešení původní diferenciální rovnice:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \tag{11.4.7}$$

kde jsme označili časovou konstantu *RL* obvodu jako

$$\tau = \frac{R}{L}. \tag{11.4.8}$$

Kvalitativní chování proudu jako funkce času je na obrázku 11.4.4.



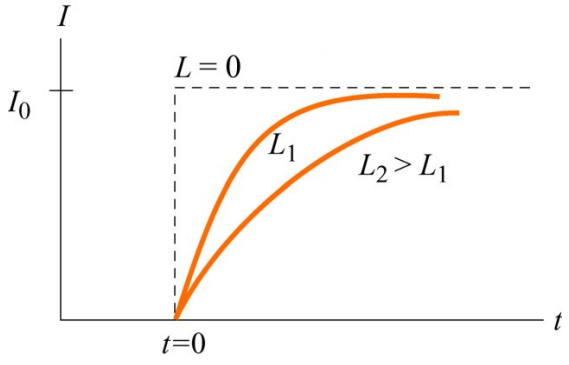
Obr. 11.4.4: Proud v *RL* obvodu jako funkce času.

Povšimněte si, že po dostatečně dlouhém čase dosáhne proud rovnovážné hodnoty ε/R. Časová konstanta je míra rychlosti dosažení ustáleného stavu; čím větší je hodnota *L*, tím déle bude trvat nárůst proudu na konečnou hodnotu. Porovnání chování obvodů s induktorem a bez induktoru je na obrázku 11.4.5 dále.

Velikost vlastního indukovaného elektromotorického napětí získáme obdobně:

$$\left|\varepsilon_L\right| = \left|-L\frac{dI}{dt}\right| = \varepsilon\,\mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{11.4.9}$$

Tato funkce má maximum pro $t = 0$ a v limitě $t \to \infty$ vymizí. Z toho plyne, že dostatečně dlouhý čas po sepnutí spínače vlastní indukčnost vymizí a induktor se chová jako vodič spojující dvě části obvodu.



Obr. 11.4.5: Chování proudového obvodu s různými indukčnostmi a bez indukčnosti.

Zákon zachování energie v *RL* obvodu získáme vynásobením rovnice (11.4.7) elektrickým proudem *I*:

$$I\varepsilon = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}. \tag{11.4.10}$$

Levá strana je časová změna energie dodávané baterií do obvodu (výkon). První člen na pravé straně je výkon disipovaný v rezistoru ve formě tepla a druhý člen časová změna energie uložené v induktoru. Zatímco energie disipovaná v rezistoru je nevratná, magnetická energie uložená v induktoru může být později uvolněna.

11.4.3 Klesající proud

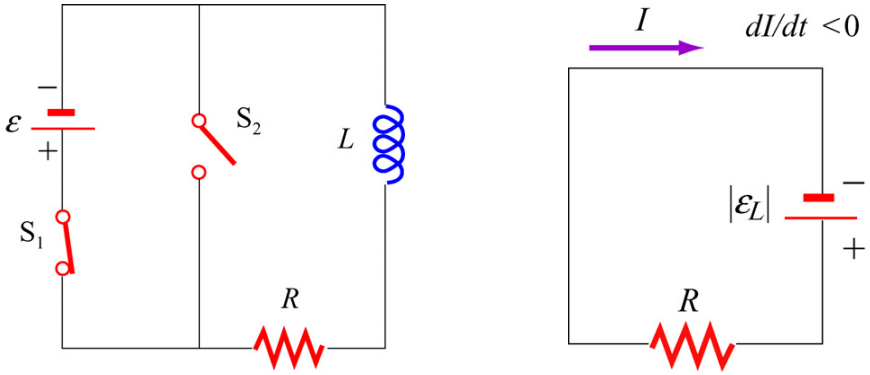
Uvažujme nyní *RL* obvod podle obrázku 11.4.6. Předpokládejme, že spínač S_1 byl po dlouhou dobu sepnutý, takže elektrický proud v obvodu dosáhl rovnovážné hodnoty $\mathcal{E}/R$. Co se stane, pokud v čase $t = 0$ spínač S_1 rozpojíme a S_2 spojíme?

Použijme modifikované Kirchhoffovo pravidlo pro pravou smyčku v případě klesajícího proudu, tj. $dI/dt < 0$:

$$|\varepsilon_L| - IR = -L\frac{dI}{dt} - IR = 0\,. \tag{11.4.11}$$

Tento vztah můžeme separovat do tvaru

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{L/R}\,.$$

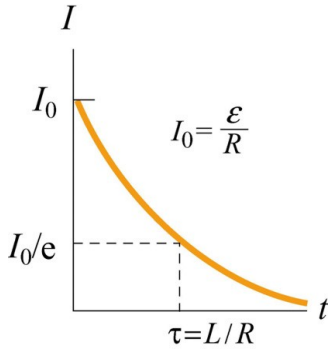


Obr. 11.4.6: *Nalevo – RL* obvod s klesajícím proudem. *Napravo* – ekvivalentní obvod.

Řešení separované diferenciální rovnice získáme integrací:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,, \tag{11.4.13}$$

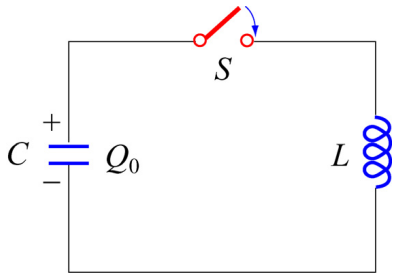
kde $\tau = L/R$ je stejná časová konstanta jako v případě *RL* obvodu s narůstajícím proudem. Průběh proudu jako funkce času je na obrázku 11.4.7.



Obr. 11.4.7: Klesající proud v *RL* obvodu.

11.5 LC oscilace

Uvažujme *LC* obvod, ve kterém je kondenzátor spojený s induktorem, viz obrázek 11.5.1.



Obr. 11.5.1: RL obvod.

Předpokládejme, že kondenzátor má na začátku náboj Q. Pokud je spínač sepnutý, kondenzátor se vybíjí a elektrická energie v něm uložená klesá. Na druhé straně proud způsobený vybíjením kondenzátoru vytváří magnetickou energii, která se ukládá v induktoru. Pokud v obvodě není žádný odpor, transformuje se veškerá energie kondenzátoru do energie induktoru a poté naopak z induktoru do kondenzátoru. Tento jev nazýváme elektromagnetické oscilace.

Celková energie v *LC* obvodu v určitém okamžiku po sepnutí spínače je

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 . \tag{11.5.1}$$

Z faktu, že celkové napětí je konstantní plyne

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + L I \frac{dI}{dt} = 0 \tag{11.5.2}$$

neboli

$$\boxed{\frac{Q}{C} + L\frac{d^2 Q}{dt^2} = 0 ,} \tag{11.5.3}$$

kde $I = -dQ/dt$ (a $dI/dt = -d^2Q/dt^2$). Povšimněte si znaménkové konvence, kterou jsme zvolili. Záporné znaménko znamená, že proud I je úbytek náboje na kondenzátoru bezprostředně poté, co byl spínač sepnutý. Stejnou rovnici získáme aplikací modifikovaného Kirchhoffova pravidla pro smyčku obvodu

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{11.5.4}$$

po dosazení definice proudu $I = -dQ/dt$. Obecné řešení rovnice (11.5.3) je

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) , \tag{11.5.5}$$

kde Q_0 je amplituda náboje a φ je fáze. Úhlová frekvence oscilací je dána výrazem

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \tag{11.5.6}$$

Odpovídající elektrický proud procházející induktorem je

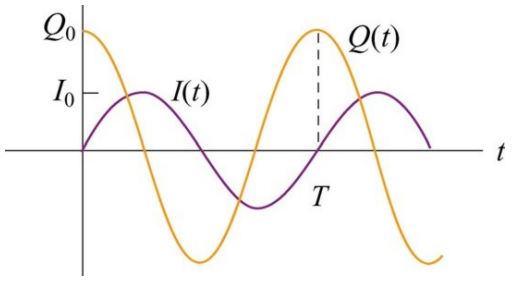
$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{11.5.7}$$

kde $I_0 = \omega_0 Q_0$. Z počátečních podmínek $Q(t=0) = Q_0$ a $I(t=0) = 0$ vychází fáze $\varphi = 0$. Řešení pro náboj a proud v našem *LC* obvodu tedy je

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t\,, \tag{11.5.8}$$

$$I(t) = I_0 \sin \omega_0 t\,. \tag{11.5.9}$$

Obě časové závislosti jsou zobrazeny na obrázku 11.5.2.



Obr. 11.5.2: Náboj a proud v *LC* obvodu jako funkce času.

Za pomoci rovnic (11.5.8) a (11.5.9) můžeme určit elektrickou a magnetickou energii v kterémkoli čase:

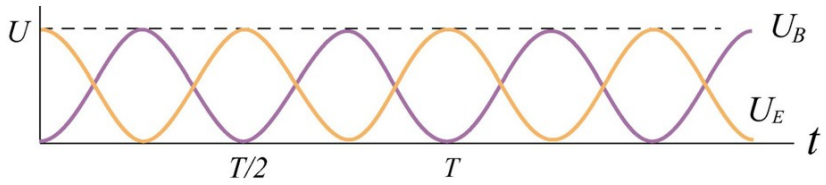
$$U_E = \frac{Q^2(t)}{2C} = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\cos^2 \omega_0 t\,, \tag{11.5.10}$$

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{L I_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\sin^2 \omega_0 t\,. \tag{11.5.11}$$

Celková energie zjevně zůstává konstantní:

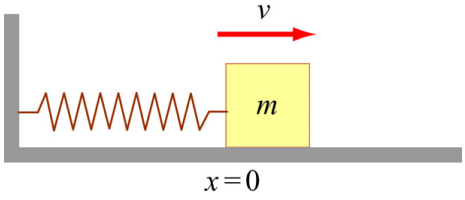
$$U = U_E + U_B = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\cos^2 \omega_0 t \; + \; \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\sin^2 \omega_0 t \; = \; \frac{Q_0^2}{2C}\,. \tag{11.5.12}$$

Elektrická a magnetická energie oscilací je znázorněna na obrázku 11.5.3.



Obr. 11.5.3: Elektrická a magnetická energie oscilací.

Mechanickou analogií *LC* oscilací je soustava hmotného tělesa a pružiny, viz obrázek 11.5.4.



Obr. 11.5.4: Mechanické oscilace jako analogie *LC* obvodu.

Pokud se těleso připojené k pružině o tuhosti k pohybuje rychlostí v a je právě vychýleno z rovnovážné polohy o hodnotu x, potom je celková energie mechanického systému

$$U = W_{\mathrm{K}} + W_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \tag{11.5.13}$$

kde W_{K} a W_{P} jsou kinetická energie tělesa a potenciální energie pružiny. Pokud v systému není tření, energie se zachovává, a proto platí

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0\,. \tag{11.5.14}$$

Za pomoci známých vztahů $v = dx/dt$ a $dv/dt = d^2x/dt^2$ předchozí rovnice přejde na rovnici kmitů

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{11.5.15}$$

s obecným řešením

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{11.5.16}$$

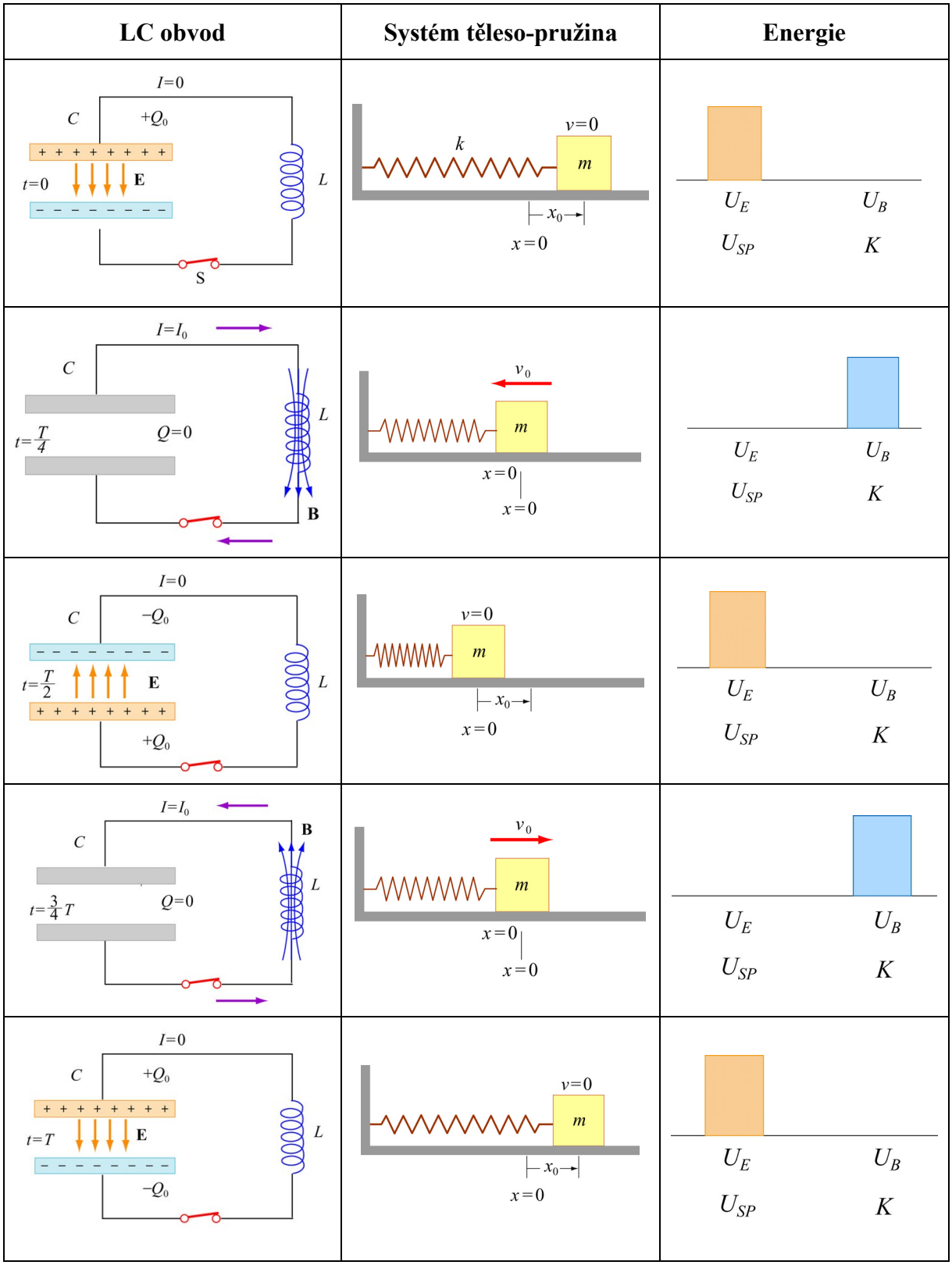
kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11.5.17}$$

je úhlová frekvence a x_0 je amplituda oscilací. V kterémkoli okamžiku může být energie napsána jako

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}kx_0^2\,. \end{aligned} \tag{11.5.18}$$

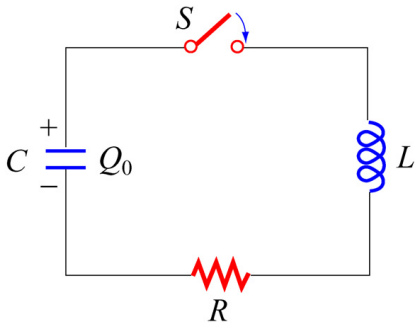
Na obrázku 11.5.5 je porovnání energie oscilací LC obvodu a soustavy těleso-pružina (harmonického oscilátoru).



Obr. 11.5.5: Energie oscilací *LC* obvodu a systému těleso – pružina.

11.6 Sériový RLC obvod

Uvažujme nyní *RLC* obvod sestávající z rezistoru, induktoru a kondenzátoru podle obrázku 11.6.1.



Obr. 11.6.1: Sériový *RLC* obvod.

Kondenzátor je původně nabitý nábojem Q_0. Po sepnutí spínače začne obvodem téci elektrický proud. Na rozdíl od *LC* obvodu bude ale část energie disipována na rezistoru. Energie disipovaná za jednotku času je

$$\frac{dU}{dt} = -RI^2 . \tag{11.6.1}$$

Záporné znaménko na pravé straně vyjadřuje úbytek celkové energie. Po substituci rovnice (11.5.2) do levé strany této rovnosti získáme následující diferenciální rovnici

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -RI^2 . \tag{11.6.2}$$

Opět volíme znaménkovou konvenci tak, že proud je roven *úbytku* náboje na deskách kondenzátoru, tj. $I = -dQ/dt$. Obě strany rovnice vydělíme I a získáme:

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 .} \tag{11.6.3}$$

Pro malé R (tlumený případ, viz dodatek 1) snadno nalezneme řešení rovnice

$$Q(t) = Q_0\, \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi), \tag{11.6.4}$$

kde

$$\gamma = \frac{R}{2L} \tag{11.6.5}$$

je koeficient útlumu a

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{11..6.6}$$

je úhlová frekvence tlumených oscilací. Konstanty Q_0 a φ jsou reálné veličiny, které je třeba určit z počátečních podmínek. V limitě nulového odporu dostaneme netlumené oscilace s frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Existují tři možné scénáře, které jsou diskutovány v Dodatku 1 (kapitola 11.8).

Mechanickou analogií sériového *RLC* obvodu je tlumený harmonický oscilátor. Rovnice pohybu tohoto systému je

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0\,, \tag{11.6.7}$$

kde člen s rychlostí představuje nekonzervativní disipativní sílu

$$F=-b\frac{dx}{dt}\,. \tag{11.6.8}$$

Koeficient b je koeficient útlumu. Korespondence mezi *RLC* obvodem a mechanickým systémem je v tabulce 11.6.1. Poznamenejme, že znaménko proudu I záleží na uvažované fyzikální situaci.

	***RLC* obvod**	**Tlumený harmonický oscilátor**
proměnná s	Q	x
proměnná ds/dt	$\pm I$	v
koeficient u s	$1/C$	k
koeficient u ds/dt	R	b
koeficient u d^2s/dt^2	L	m
energie, část 1	$LI^2/2$	$mv^2/2$
energie, část 2	$Q^2/2C$	$kx^2/2$

Tabulka 11.6.1: Vzájemný vztah mezi *RLC* obvodem a tlumeným oscilátorem.

11.7 Shrnutí

- Za pomoci Faradayova indukčního zákona je možné určit **vzájemnou indukčnost** dvou cívek $M_{12}=N_1\phi_{12}/I_2=M_{21}=N_2\phi_{21}/I_1=M$.
- Indukované elektromotorické napětí v cívce 2 způsobené změnou proudu v cívce 1 je dáno vztahem $\varepsilon_2=-MdI_1/dt$.
- **Vlastní indukčnost** cívky s N závity je $L=N\phi_B/I$, kde ϕ_B je magnetický indukční tok jedním závitem cívky.
- **Vlastní indukované elektromotorické napětí** způsobené změnou proudu uvnitř proudové cívky je $\varepsilon_L=-LdI/dt$.
- Indukčnost solenoidu s N závity, průřezem A a délkou l je $L=\mu_0N^2A/l$.
- Magnetická energie uložená v induktoru protékaným proudem I je $U_B=LI^2/2$.
- Hustota magnetické energie v místě s magnetickým polem B je $u_B=B^2/2\mu_0$.

- ***RL* obvod.** Baterie dodávající elektromotorické napětí ε je v čase $t = 0$ sériově propojena s induktorem a rezistorem. Časová konstanta obvodu je $\tau = R/L$. Při sepnutí proud narůstá podle formule

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

  Po odpojení baterie proud klesá podle vztahu

$$I(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

- Diferenciální rovnice oscilací ***LC* obvodu** je $d^2Q/dt^2 + \omega_0^2 Q = 0$, kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ je úhlová frekvence oscilací. Náboj odtékající z kondenzátoru je jako funkce času roven $Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ a elektrický proud v obvodu je $I(t) = +\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
- Celková energie v *LC* obvodu je ($I_0 = \omega_0 Q_0$)

$$U = U_E + U_B = \left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)\cos^2\omega_0 t \;+\; \frac{LI_0^2}{2}\sin^2\omega_0 t \;=\; \frac{Q_0^2}{2C}\,.$$

- Diferenciální rovnice ***RLC* obvodu** je $d^2Q/dt^2 + 2\gamma\, dQ/dt + \omega_0^2 Q = 0$, kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ a $\gamma = R/2L$. V tlumeném případě pro náboj odtékající z kondenzátoru platí $Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)$, kde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

11.8 Dodatek 1: Úplné řešení sériového RLC obvodu

V kapitole 11.6 jsme ukázali, že *RLC* obvod je popsán diferenciální rovnicí

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0\,, \tag{11.8.1}$$

jejíž řešení je dáno vztahem

$$Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)\,, \tag{11.8.2}$$

kde

$$\gamma = \frac{R}{2L} \tag{11.8.3}$$

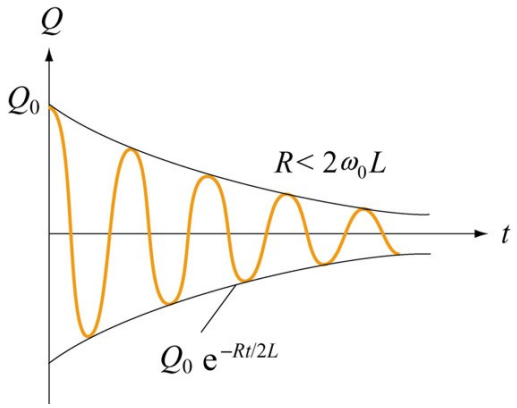
je koeficient útlumu a

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{11.8.4}$$

je úhlová frekvence tlumených oscilací. Řešení může být trojího typu, záleží na hodnotách γ a ω_0.

Typ 1: Tlumené oscilace

Pokud je $\omega_0 > \gamma$, znamená to, že frekvence ω' je reálná a kladná, hovoříme, že systém je tlumený. Je to případ malého odporu obvodu. Náboj osciluje (podle funkce sinus) a amplituda oscilací je exponenciálně tlumená jako $Q_0 \exp[-\gamma t]$. Frekvence tlumených oscilací je menší než frekvence netlumených, $\omega' < \omega_0$. Kvalitativní chování náboje kondenzátoru je znázorněno na obrázku 11.8.1.



Obr. 11.8.1: Tlumené oscilace *RLC* obvodu.

Uvažujme jako příklad počáteční podmínku $Q(t=0) = Q_0$. Fáze je $\varphi = 0$ a řešení má tvar

$$Q(t) = Q_0 \, \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos \omega' t \, . \tag{11.8.5}$$

Odpovídající proud je

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega' \, \mathrm{e}^{-\gamma t} \left[\sin \omega' t + \frac{\gamma}{\omega'} \cos \omega' t \right]. \tag{11.8.6}$$

Pro malý odpor *R* lze předchozí výraz aproximovat jako

$$I(t) \approx \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \delta) \, , \tag{11.8.7}$$

kde

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\omega'} \right) . \tag{11.8.8}$$

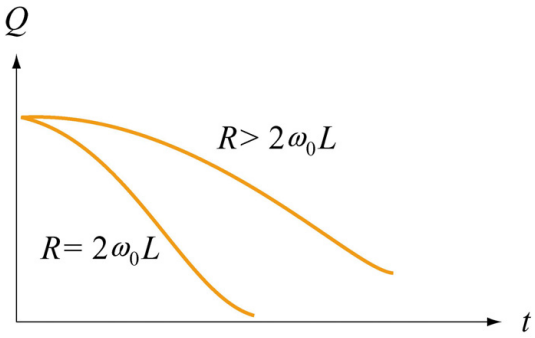
Odvození ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Typ 2: Přetlumení

V případě, že $\omega_0 < \gamma$ hovoříme o přetlumených oscilacích, frekvence ω' je imaginární. V tomto případě k žádným oscilacím nedochází. Napíšeme-li $\omega' = i\beta$, kde $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, můžeme obecné řešení napsat ve tvaru

$$Q(t) = Q_1 \, \mathrm{e}^{-(\gamma+\beta)t} + Q_2 \, \mathrm{e}^{-(\gamma-\beta)t} \, . \tag{11.8.9}$$

Konstanty Q_1 a Q_2 jsou dány počátečními podmínkami.



Obr. 11.8.2: Přetlumený a kritický útlum *RLC* obvodu.

Typ 3: Kritický útlum

Hovoříme o kritickém tlumení, pokud $\omega_0 = \gamma, \omega' = 0$. K oscilacím opět nedochází a obecné řešení je dáno vztahem

$$Q(t) = (Q_1 + Q_2 t)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{11.8.10}$$

kde konstanty Q_1 a Q_2 jsou dány počátečními podmínkami. V tomto případě lze ukázat, že energie systému ubývá nejrychleji s časem. Kvalitativní chování $Q(t)$ při přetlumení a kritickém tlumení je znázorněno na obrázku 11.8.2.

11.8.1 Činitel jakosti oscilací

Při malém odporu je systém tlumený a amplituda oscilací ubývá exponenciálně podle vztahu $Q_0 \exp[-\gamma t]$. *Kvalita* tlumených oscilací je měřena tzv. *činitelem jakosti* Q (nezaměňte s nábojem!). Čím vyšší je hodnota Q, tím menší je útlum a větší kvalita. Činitel jakosti Q je definován jako

$$Q = \omega' \left(\frac{\text{uložená energie}}{\text{disipovaná energie}} \right) = \omega' \frac{U}{|dU/dt|}. \tag{11.8.11}$$

Za pomoci vztahu (11.8.2) napíšeme energii uloženou v kondenzátoru jako

$$U_E = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\cos^2(\omega' t + \varphi). \tag{11.8.12}$$

Abychom získali magnetickou energii, provedeme aproximaci vztahu pro proud

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0\omega'\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\sin(\omega' t + \varphi) + \frac{\gamma}{\omega'}\cos(\omega' t + \varphi)\right] \approx$$
$$\approx Q_0\omega'\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \varphi) \approx$$
$$\approx \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \varphi).$$

Aproximace platí za předpokladu, že $\omega' \gg \gamma$ a $\omega'^2 \approx \omega_0^2 = 1/LC$. V tomto případě je magnetická energie uložená v induktoru rovna

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \approx \frac{LQ_0^2}{2}\omega'^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}\sin^2(\omega' t + \varphi) \approx \frac{Q_0^2}{2C}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\sin^2(\omega' t + \varphi). \tag{11.8.14}$$

Oba členy sečteme a získáme celkovou energii systému

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C} \mathrm{e}^{-2\gamma t} \left[\cos^2(\omega' t + \varphi) \; + \; \sin^2(\omega' t + \varphi) \right] = \frac{Q_0^2}{2C} \mathrm{e}^{-2\gamma t} \,. \quad (11.8.15)$$

Derivováním vztahu podle času získáme změnu energie

$$\frac{dU}{dt} = -2\gamma \frac{Q_0^2}{2C} \mathrm{e}^{-2\gamma t} = -2\gamma U \,. \quad (11.8.16)$$

Činitel jakosti potom je

$$\boxed{Q = \omega' \frac{U}{|dU/dt|} = \frac{\omega'}{2\gamma} = \frac{\omega' L}{R} \,.} \quad (11.8.17)$$

Jak jsme očekávali, je činitel jakosti nepřímo úměrný odporu, tj. čím menší je hodnota odporu, tím větší je činitel jakosti oscilací.

11.9 Dodatek 2: Pnutí přenášená magnetickým polem

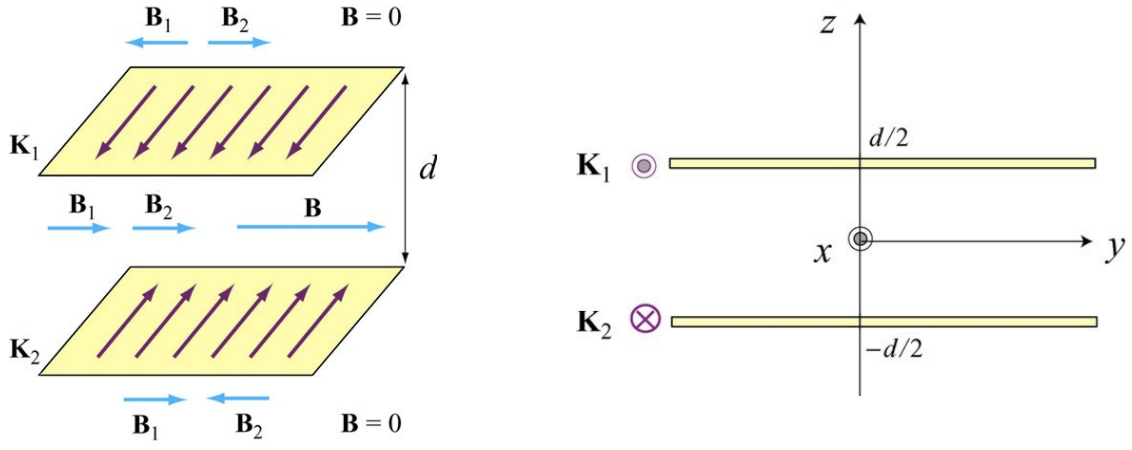
„*... Zdá se, že pnutí podél magnetických silokřivek se projevuje jako tah obdobný tahu lana...*“

J. C. Maxwell [1861]

V kapitole 9 jsme ukázali, že magnetické pole nekonečné roviny xy protékané plošným proudem $\mathbf{K} = K\,\hat{\mathbf{i}}$ je dáno vztahem

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\,, & z > 0\,, \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\,, & z < 0\,. \end{cases} \quad (11.9.1)$$

Uvažujme nyní dvě proudové vrstvy, jejichž vzdálenost je d a plošné proudy v nich mají opačný směr, viz obrázek 11.9.1.



Obr. 11.9.1: Magnetické pole dvou vrstev s proudem tekoucím v opačném směru.

Za pomoci principu superpozice můžeme snadno ukázat, že magnetické pole nevymizí jen v prostoru mezi vrstvami a je dáno vztahem

$$\mathbf{B} = \mu_0 K\,\hat{\mathbf{j}}\,; \qquad -d/2 < y < d/2\,. \quad (11.9.2)$$

Magnetickou energii uloženou v systému určíme s pomocí rovnice (11.3.8):

$$U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}(Ad) = \frac{(\mu_0 K)^2}{2\mu_0}(Ad) = \frac{\mu_0}{2}K^2 Ad\,, \tag{11.9.3}$$

kde A je plocha vrstvy. Odpovídající hustota magnetické energie je

$$u_B = \frac{U_B}{Ad} = \frac{\mu_0}{2}K^2\,. \tag{11.9.4}$$

Uvažujme nyní malý proudový element $Id\mathbf{s}_1 = (K\Delta y)\Delta x\,\hat{\mathbf{i}}$ na horní vrstvě (připomínáme, že K má rozměr proudu na jednotku délky). Síla, která působí na tento element (díky magnetickému poli dolní vrstvy) je

$$d\mathbf{F}_{21} = Id\mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2 = (K\Delta y\Delta x\,\hat{\mathbf{i}})\times\left(\frac{\mu_0}{2}K\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \frac{\mu_0 K^2}{2}\Delta x\Delta y\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

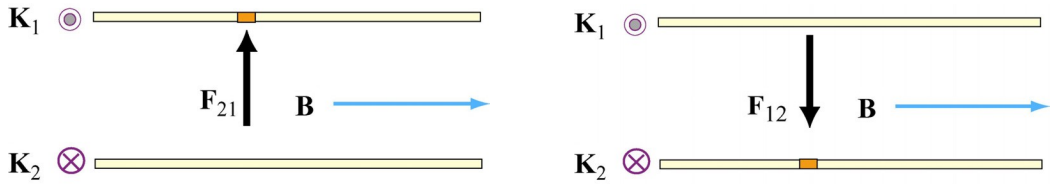
Síla míří ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$ a je proto odpudivá. To jsme očekávali, protože proudy tekou v opačných směrech. Element síly $d\mathbf{F}_{21}$ je úměrný ploše proudového elementu a proto zavedeme s využitím (11.9.4) sílu $\mathbf{f}_{21}$ na jednotkovou plochu

$$\mathbf{f}_{21} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 K^2}{2}\hat{\mathbf{k}} = u_B\,\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{11.9.6}$$

Velikost síly působící na jednotkovou plochu je přesně rovna hustotě magnetické energie. Fyzikálně může být tato síla interpretována jako magnetický tlak

$$f_{21} = P = u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}\,. \tag{11.9.7}$$

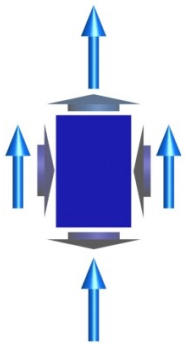
Odpudivá síla působící na element vrstvy je ukázána na Obr. 11.9.2.



Obr. 11.9.2: Magnetický tlak působící na horní vrstvu (nalevo) a na dolní vrstvu (napravo).

Uvažujme nyní obecnější případ pnutí (tlaku a tahu) přenášeného magnetickým polem. Na obrázku 11.9.3 je znázorněn pomyslný uzavřený prostor (myšlený kvádr) umístěný v magnetickém poli. Pokud se díváme na jeho levou plochu, pole u této plochy je kolmé k vnější normále. Podle výsledku z obrázku 11.9.2 přenáší pole na tuto stěnu *tlak* a působí na ni směrem *doprava*. Pokud se podíváme na pravou stěnu tohoto myšleného kvádru, tak i zde uvidíme pole, jehož silokřivky jsou kolmé k normálovému vektoru této plochy a pole vykazuje *tlak* kolmý na tuto stěnu mířící směrem *doleva*.

Jestliže chceme znát celkovou elektromagnetickou sílu přenášenou na vnitřek tohoto myšleného kvádru v pravolevém směru, oba tyto tlaky silokřivek musíme sečíst. Jestliže je magnetické pole homogenní, jsou velikosti obou přenášených tlaků z levé strany směrem doprava a z pravé strany směrem doleva stejné a jejich výsledný silový účinek se vyruší.



Obr. 11.9.3: Myšlený kvádr vnořený do magnetického pole (vektory pole jsou modré). Krátké vektory ukazují směry pnutí přenášeného polem. Jde buď o tlak (napříč silokřivek, v levopravém směru) nebo tah (podél silokřivek, na horní a dolní stěnu).

Představme si nyní, že pravá strana pomyslného kvádru je umístěna dovnitř svislého solenoidu, ve kterém je magnetické pole svislé a konstantní, a levá strana je umístěna vně tohoto solenoidu, kde je magnetické pole nulové. V tomto případě na kvádr působí výsledný tlak silokřivek směrem doleva a my řekneme, že magnetické pole vyvolává tlak silokřivek směrem na vnější stěny solenoidu. Tento dojem získáme jednoduše i z pohledu na topologii magnetického pole. A skutečně, opravdu silné magnetické pole může způsobit tak velké síly, že se stěny solenoidu mohou roztrhnout a solenoid explodovat.

A podobně, jestliže se díváme na horní plochu pomyslného kvádru na obrázku 11.9.3, vidíme, že pole je zde rovnoběžné s normálou této plochy a lze ukázat, že pole na této straně podél svých silokřivek táhne za tuto plochu. V tomto případě je to tah směrem vzhůru, podobně jako bychom tuto plošku *táhli vzhůru* napjatou strunou. Stejně tak můžeme pozorovat i spodní stranu myšleného kvádru, kde je pole antiparalelní k normále této plošky a lze ukázat, že pole na tuho plošku působí tahem silokřivek, v tomto případě tahem směrem dolů podobně, jako bychom plošku *táhli dolů* napjatou strunou. Poznamenejme, že tento tah je rovnoběžný s vnějším normálovým vektorem plochy, kde silokřivky pole vstupují do povrchu nebo vystupují z povrchu, a tlaky a tahy silokřivek jsou úměrné druhým mocninám velikosti pole.

Pokud chceme znát celkovou elektromagnetickou sílu, která je přenášena dovnitř myšleného kvádru, musíme sečíst oba přenášené tahy silokřivek. Jestliže je magnetické pole homogenní, je celková elektromagnetická síla působící na vršek kvádru stejně veliká, ale opačně orientovaná jako síla, která působí na spodní část, a obě se ve výsledném působení vyruší.

Velikost těchto tlaků a tahů na různé stěny myšleného kvádru z obrázku 11.6.3 je dána podle rovnice (11.9.7) vztahem $B^2/2\mu_0$. Celá diskuze může být shrnuta takto:

Tlaky a tahy (pnutí) přenášené magnetickými poli

Elektromagnetické pole je zprostředkovatelem interakce mezi hmotnými objekty. Pole přenáší prostorem pnutí. Pnutí magnetického pole se projevuje jako tah podél silokřivek a tlak napříč silokřivkám. Velikost tahu nebo tlaku přenášeného magnetickým pole je dána vztahem

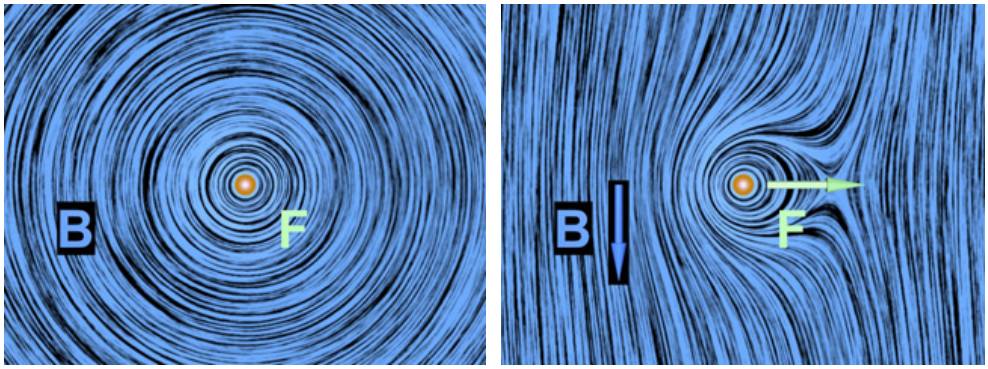
$$P = u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

V Animace 11.3: Nabitá částice v časově proměnném magnetickém poli

Jako příklad na napětí silokřivek přenášená magnetickými poli uvažujme pohyb kladného bodového náboje v počátku v rychle se měnícím časově závislém vnějším poli. Toto vnější pole je homogenní v prostoru, ale proměnné v čase podle rovnice

$$\mathbf{B} = -B_0 \sin^4\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{11.9.8}$$

Předpokládejme, že proměnlivost pole je tak rychlá, že se náboj během jedné periody T přemístí jen o zanedbatelnou vzdálenost. Obrázek 11.9.4 ukazuje dva snímky animace celkového magnetického pole řešeného v této situaci. Obrázek 11.9.4 (nalevo) je pro čas $t = 0$, kdy je svislá složka magnetického pole nulová a je patrné pouze magnetické pole pohybujícího se náboje (náboj se pohybuje z nákresny směrem ven, tudíž pole cirkuluje proti směru hodinových ručiček). Snímek 11.9.4 (napravo) byl pořízen o čtvrt periodu později, kdy svislá složka pole mířícího dolů má maximum. Vlevo od náboje, kde je pole náboje ve stejném směru jako vnější (směrem dolů) je celkové magnetické pole intenzivnější. Napravo od náboje, kde pole náboje míří opačným směrem než vnější, se pole odečítají (na jednom místě je dokonce nulové).



Obr. 11.9.3: Dva snímky **animace** magnetického pole obklopujícího kladný náboj. Náboj se pohybuje ven z nákresny pod vlivem časově proměnného homogenního magnetického pole, které míří svisle dolů. Modrý vektor je velikost magnetického pole a bílý vektor je síla, která na náboj působí.

Na konfiguraci polí na obrázku 11.9.3 (napravo) můžeme pozorovat sílu, která působí na náboj směrem doprava. Ta se zde projeví proto, že tlak silokřivek pole je vlevo od náboje mnohem vyšší než napravo. Poznamenejme jen, že pokud by se náboj pohyboval směrem do nárysny, pak by síla mířila opačným směrem, protože tlak magnetického pole by byl mnohem vyšší zprava. Animace spojená s obrázky 11.9.3 velmi dobře ukazuje přítok energie do nejbližšího okolí náboje, když vnější pole roste. Je z ní patrný i následný vznik tlaku silokřivek, který přináší do strany mířící sílu působící na náboj.

Velikost síly působící na pohybující se náboj na obrázku 11.9.3 můžeme odhadnout následovně. V čase zachyceném na snímku 11.9.4 (napravo) je vzdálenost r_0 mezi nábojem a místem, kde se pole vyruší s vnějším polem dána vztahem

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r_0^2}\,. \tag{11.9.9}$$

Povrch sféry s tímto poloměrem je $A = 4\pi r_0^2 = \mu_0 qv/B_0$. Nyní podle rovnice (11.9.7) je tlak (síla na jednotku plochy) nebo tah přenášený touto plochou za pomoci pole roven řádově

$P = B^2/2\mu_0$. Magnetické pole na povrchu této sféry je řádově B_0, a proto je celková síla přenášená polem dána jako součin

$$F = PA = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 4\pi r_0^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{\mu_0 qv}{B_0} \approx qvB_0 \,. \tag{11.9.10}$$

Samozřejmě, že tato síla je kombinací tlaku silokřivek působících doprava na levou stranu sféry a tahů silokřivek působících doleva na její pravou stranu. Přesný výraz pro sílu, kterou působí pole na nabitou pohybující se částici je

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \,. \tag{11.9.11}$$

Hrubý odhad, který jsme právě předvedli výše, ukazuje, že tlaky na povrch myšlené sféry obklopující pohybující se náboj jsou řádu $B^2/2\mu_0$. Navíc nám tato diskuse umožňuje pochopit fakt, proč je magnetická síla působící na pohybující se částici kolmá k rychlosti náboje a ke směru vnějšího pole. Je to proto, že se tlak silokřivek magnetického pole zvýší jen na jedné straně pohybujícího se náboje. Tento tlak silokřivek způsobuje změnu směru pohybu náboje.

11.10 Algoritmy řešení problémů

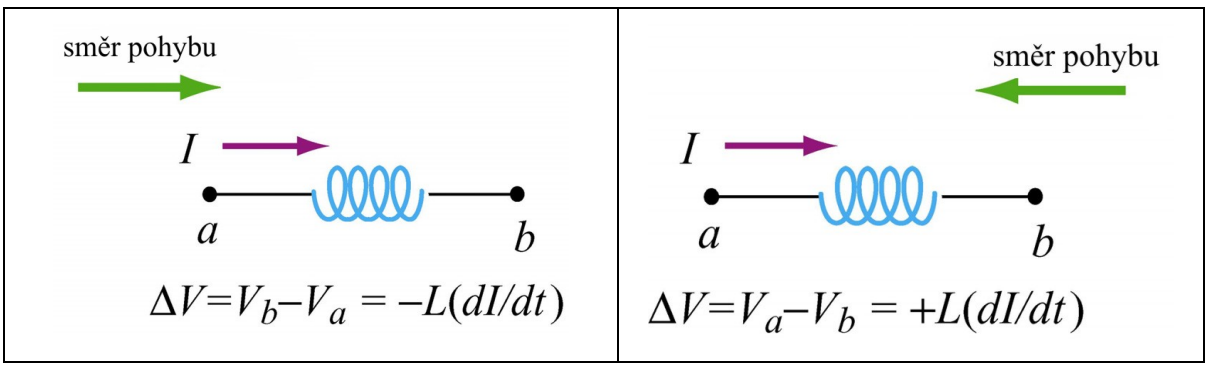
11.10.1 Výpočet vlastní indukčnosti

Vlastní indukčnost induktoru určíme pomocí těchto kroků:

1. Předpokládáme, že induktorem prochází ustálený proud. Může jít o vodivou smyčku, solenoid, toroid či koaxiální kabely.
2. Vyberte vhodný průřez S a spočtěte magnetický tok tímto průřezem $\phi_B = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A}$. Pokud je tato plocha obtočena N závity, bude celkový tok $N\phi_B$.
3. Určete indukčnost jako poměr $L = B\phi_B / I$.

11.10.2 Obvody s induktory

V této kapitole jsme se zabývali třemi typy obvodů: *RL*, *LC* a *RLC*. Diferenciální rovnici pro obvod sestavíte za pomoci Kirchhoffova pravidel pro smyčky a uzly. Modifikované Kirchhoffovo pravidlo pro induktor přítomný ve smyčce je na obrázku



Povšimněte si, že „rozdíl potenciálů“podél induktoru je úměrný dI/dt, tedy časové změně proudu. Situaci zjednodušuje fakt, že nás zajímá jen chování v dlouhých časech, kdy proudy

dosáhly ustáleného stavu a $dI/dt = 0$. V této limitě se induktor chová jako zkratovaný obvod a můžeme ho nahradit ideálním vodičem.

11.11 Řešené úlohy

P 11.11.1: Energie uložená v toroidu

Toroid se skládá z N závitů pravoúhlého průřezu s vnitřním poloměrem a, vnějším b a výškou h (viz Obr. 11.2.3). Nalezněte celkovou magnetickou energii uloženou v toroidu.

Řešení:

V příkladu 11.3 jsme ukázali, že vlastní indukčnost toroidu je

$$L = \frac{N\phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Magnetická energie uložená v toroidu je proto jednoduše

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{11.11.1}$$

Existuje i jiný postup. Energii můžeme určit jako energii magnetického pole. V toroidální cívce je magnetické pole (určili jsme ho v kapitole 9) $B = \mu_0 NI/2\pi r$ a odpovídající hustota magnetického pole je

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{11.11.2}$$

Celkovou energii uloženou v magnetickém poli určíme integrací přes objem toroidu. Zvolíme diferenciální element objemu jako válec o poloměru r, tloušťce dr a výšce h, takže $dV = 2\pi r h dr$. Tato volba vede na

$$U_B \int u_B dV = \int_a^b \left(\frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}\right) 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Oba způsoby vedou na stejný výsledek.

P 11.11.2: Hustota magnetické energie

Vodičem z nemagnetického materiálu s poloměrem R a délkou l protéká elektrický proud I, který je rovnoměrně rozprostřen v průřezu vodiče. Určete magnetickou energii uvnitř vodiče.

Řešení:

Magnetické pole uvnitř vodiče ($r \le R$) získáme snadno z Ampérova zákona:

$$B\, 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \tag{11.11.4}$$

neboli

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \tag{11.11.5}$$

Hustota magnetické energie (energie na jednotku objemu) je dána vztahem

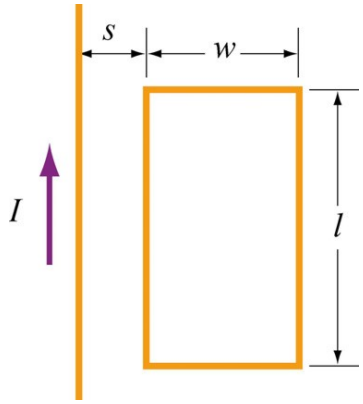
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \ . \tag{11.11.6}$$

Celková magnetická energie uložená v systému je

$$U_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} .$$

P 11.11.3: Vzájemná indukčnost

Nekoneční přímý vodič protékaný proudem I je umístěný nalevo od pravoúhlé vodivé smyčky šířky w a délky l, viz obrázek 11.11.3. Určete vzájemnou indukčnost systému.



Obr. 11.11.3: Pravoúhlá smyčka umístěná v blízkosti dlouhého vodiče s proudem.

Řešení:

K výpočtu vzájemné indukčnosti M nejprve potřebujeme znát magnetický tok skrze obdélníkovou smyčku. Z Ampérova zákona víme, že magnetické pole ve vzdálenosti r od přímého vodiče je $B = \mu_0 / 2\pi r$. Celkový magnetický tok ϕ_B smyčkou získáme integrací přes všechny diferenciální plošné elementy $dA = ldr$:

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_s^{s+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{s}\right). \tag{11.11.8}$$

Vzájemná indukčnost proto je

$$\boxed{M = \frac{\phi_B}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{s}\right).} \tag{11.11.9}$$

P 11.11.4: RL obvod

Uvažujte RL obvod podle obrázku 11.11.4. Určete elektrický proud procházející každým z rezistorů

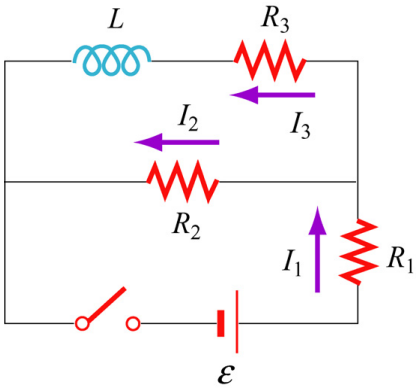
(a) ihned po sepnutí spínače.

(b) za dlouhou dobu po sepnutí spínače.

Předpokládejte, že spínač je po dosti dlouhé době rozpojen. Určete proudy ve všech rezistorech

(c) ihned po rozpojení spínače.

(d) za dlouhou dobu po rozpojení spínače.

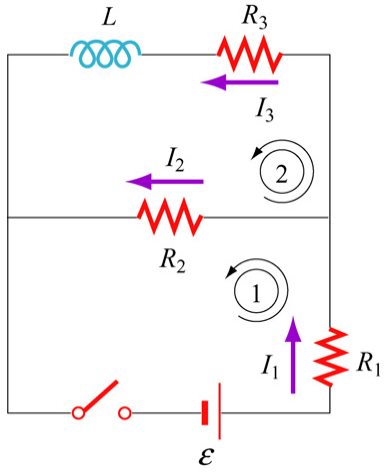


Obr. 11.11.4: RL obvod.

Řešení:

(a) Bezprostředně po sepnutí spínače je proud tekoucí induktorem nulový, protože vlastní indukované elektromotorické napětí zabrání okamžitému nárůstu proudu. Proto je $I_3 = 0$. Vzhledem k tomu, že $I_1 = I_2 + I_3$, platí proto $I_1 = I_2$. Z Kirchhoffova zákona pro první smyčku ukázanou na obrázku 11.11.5 máme

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}. \tag{11.11.10}$$



Obr. 11.11.5.

(b) Pokud byl spínač sepnutý po dosti dlouhou dobu, není v induktoru již žádné indukované elektromotorické napětí a proudy budou konstantní. Kirchhoffovo pravidlo pro první a druhou smyčku bude

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, \tag{11.11.11}$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0. \tag{11.11.12}$$

K oběma rovnicím přidáme podmínku pro uzel $I_1 = I_2 + I_3$, a získáme řešení

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3},$$

$$I_2 = \frac{R_3\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \qquad (11.11.13)$$

$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

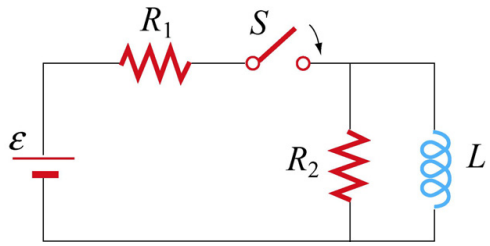
(c) Bezprostředně po rozpojení spínače je proud odporem R_1 nulový, tj $I_1 = 0$. Proto $I_2+I_3 = 0$. Na druhé straně smyčka 2 nyní představuje RL obvod s klesajícím proudem I_3. Proto

$$I_3 = -I_2 = \frac{R_2\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}. \qquad (11.11.14)$$

(d) Dlouhou dobu po rozpojení spínače budou všechny proudy nulové, tj. $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

P 11.11.5: Další RL obvod

Předpokládejte, že obvod na obrázku 11.11.6 je rozpojený. V čase $t = 0$ spínač sepneme. Jaký bude časový vývoj proudu tekoucího induktorem?

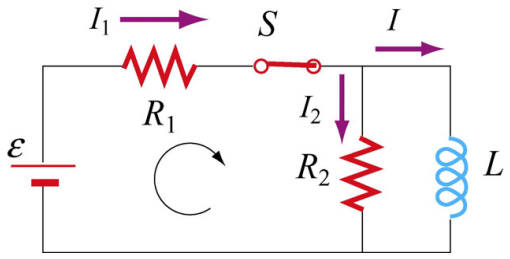


Obr. 11.11.6: RL obvod.

Řešení:

Označme proudy tekoucí prvky R_1, R_2 a L postupně I_1, I_2 a I, viz obrázek 11.11.7. Z Kirchhoffova zákona pro uzly máme $I_1=I_2+I$. Aplikací Kirchhoffova zákona pro levou smyčku získáme vztah

$$\varepsilon - (I + I_2)R_1 - I_2R_2 = 0. \qquad (11.11.15)$$



Obr. 11.11.7.

Pro vnější smyčku získáme z modifikovaného Kirchhoffova zákona další vztah

$$\varepsilon - (I + I_2)R_1 = L\frac{dI}{dt}. \qquad (11.11.16)$$

Kombinací obou rovnic dostaneme

$$I_2 R_2 = L\frac{dI}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt}. \tag{11.11.17}$$

Vyjádření pro I_2 budeme substituovat do rovnice (11.11.15):

$$\begin{aligned} \varepsilon - \left(I + \frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt} \right) R_1 - \frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt} R_2 = 0 \qquad \Rightarrow \\ \varepsilon - IR_1 - \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) L\frac{dI}{dt} = 0 . \end{aligned} \tag{11.11.18}$$

Rovnici vydělíme koeficientem $(R_1+R_2)/R_2$:

$$\varepsilon' - IR' - L\frac{dI}{dt} = 0 , \tag{11.11.19}$$

kde

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \qquad \varepsilon' = \frac{R_2 \varepsilon}{R_1 + R_2}. \tag{11.11.20}$$

Standardní řešení této diferenciální rovnice dává výsledný vztah

$$I(t) = \frac{\varepsilon'}{R'}\left(1 - \mathrm{e}^{-R't/L}\right). \tag{11.11.21}$$

Jelikož platí

$$\frac{\varepsilon'}{R'} = \frac{\varepsilon R_2 /(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 /(R_1 + R_2)} = \frac{\varepsilon}{R_1}, \tag{11.11.22}$$

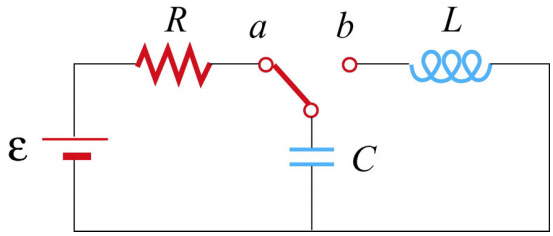
můžeme výsledný vztah pro proud přepsat do tvaru

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \tag{11.11.23}$$

kde jsme označili časovou konstantu $\tau = L / R'$.

P 11.11.6: LC obvod

Uvažujte obvod podle obrázku 11.11.8. Předpokládejte, že přepínač byl po dlouhou dobu zapojen v poloze *a* a v čase $t = 0$ je přepnut do polohy *b*.



Obr. 11.11.8.: *LC* obvod.

Nalezněte následující veličiny:

(a) frekvenci oscilací *LC* obvodu.

(b) maximální náboj na kondenzátoru.

(c) maximální proud tekoucí induktorem.

(d) celkovou energii zadržovanou obvodem v libovolném čase *t*.

Řešení:

(a) Úhlová frekvence oscilací *LC* obvodu je dána vztahem $\omega = 2\pi f = 1/\sqrt{LC}$, proto

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{11.11.24}$$

(b) Maximální náboj na kondenzátoru je do okamžiku, než je přepínač přepnut do polohy *b*:

$$Q = C\varepsilon. \tag{11.11.25}$$

(c) Energie na kondenzátoru před přepnutím přepínače je

$$U_E = \frac{1}{2}C\varepsilon^2. \tag{11.11.26}$$

Na druhé straně je magnetická energie v induktoru v libovolném čase

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2. \tag{11.11.27}$$

Pokud má proud maximum, je veškerá původní energie z kondenzátoru uložena v induktoru a platí:

$$\frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{1}{2}LI_0^2. \tag{11.11.28}$$

Z tohoto vztahu snadno určíme maximální proud:

$$I_0 = \varepsilon\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{11.11.29}$$

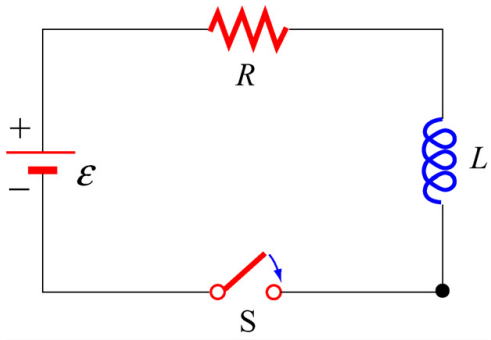
(d) V libovolném čase je celková energie v obvodu rovna původní energii uložené na kondenzátoru, tj

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}C\varepsilon^2. \tag{11.11.30}$$

11.12 Tématické otázky

1. Jak byste vytvarovali vodič konečné délky, aby měl nejmenší (největší) indukčnost?
2. Představte si, že vodič tvořící solenoid rozmotáte a namotáte z něho nový solenoid s třikrát větším průměrem. Jak se změní indukčnost?
3. Jaké znáte analogie mezi ideálním solenoidem a rovinným kondenzátorem?
4. Prohlédněte si *RL* obvod na obrázku 11.12.1. Může být vlastní indukované elektromotorické napětí větší než elektromotorické napětí dodané baterií?
5. Hustota magnetické energie $u_B = B^2/2\mu_0$ může také být interpretována jako magnetický tlak. S využitím koncepce magnetického tlaku vysvětlete přitahování (odpuzování)mezi dvěma závity s proudem stejného (opačného) směru.

6. Vysvětlete, proč pokračují LC oscilace i poté, co byl kondenzátor zcela vybit.
7. Fyzikálně vysvětlete, proč je časová konstanta $\tau = R/L$ v RL obvodu úměrná L a nepřímo úměrná R.



Obr. 11.12.1.

11.13 Neřešené úlohy

P 11.13.1: Solenoid

Solenoid délky 30 cm, poloměru 1 cm s 500 závity je protékám konstantním proudem $I = 2$ A.

(a) Jaké je magnetické pole ve středu solenoidu podél osy symetrie?

(b) Nalezněte magnetický tok solenoidem za předpokladu, že magnetické pole je homogenní.

(c) Jaká je vlastní indukčnost solenoidu?

(d) Jaké je indukované elektromotorické napětí v solenoidu, pokud je časová změna proudu $dI/dt = 100$ A/s ?

P 11.13.2: Vlastní indukčnost

Představte si, ž chcete navinout vodič délky d a poloměru a na válcovou plochu s kruhovým průřezem a poloměrem r. Závity budou navinuty těsně a bez překrývání. Ukažte, že vlastní indukčnost takto vzniklého induktoru je $L = \mu_0 rd / 4a$.

P 11.13.2: Vázané induktory

(a) Ukažte, že ekvivalentní indukčnost dvou induktorů zapojených do série je $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$, kde L_1, L_2 jsou indukčnosti induktorů a M je jejich vzájemná indukčnost. Jak je to s výběrem znaménka u M? Za jakých předpokladů lze vzájemnou indukčnost zanedbat?

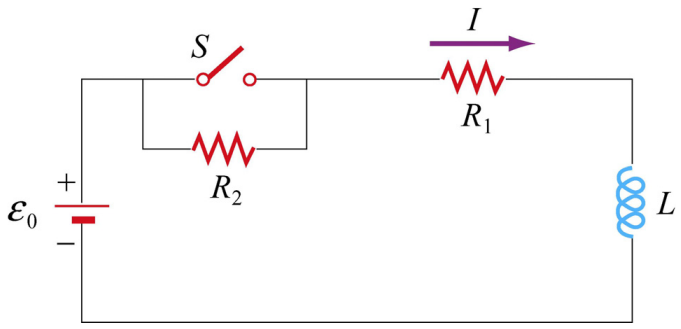
(b) Ukažte, že ekvivalentní indukčnost dvou induktorů zapojených paralelně (vzájemnou indukčnost zanedbejte) je dána vztahem

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} .$$

Jak by ovlivnila výsledek vzájemná indukčnost?

P 11.13.4: RL obvod

LR obvod na obrázku 11.13.1 obsahuje odpor R_1 a indukčnost L zapojené do série s baterií o elektromotorickém napětí ε_0. Spínač S je na počátku sepnutý. V čase $t = 0$ spínač rozpojíme. S ostatními prvky obvodu bude od té chvíle v sérii velmi velký odpor R_2 ($R_2 \gg R_1$).



Obr. 11.13.1: *RL* obvod.

(a) Jaký je ustálený proud I_0 v obvodu, pokud byl spínač po dlouhou dobu před $t = 0$ sepnutý?

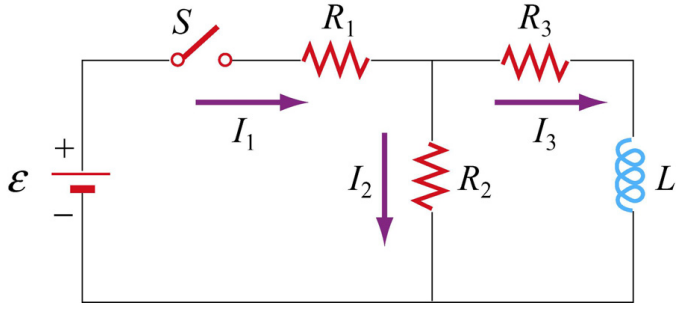
(b) V obvodu teče prud I_0 a v čase $t = 0$ rozpojíme spínač S. Napište diferenciální rovnici pro proud $I(t)$, která popisuje chování obvodu v čase $t \geq 0$. Řešte tuto rovnici integrací v přiblížení $\varepsilon_0 = 0$. (Předpokládejte, že elektromotorické napětí baterie je zanedbatelné ve srovnání s celkovým elektromotorickým napětím v obvodu v čase po rozpojení spínače.) Zapište výsledek za pomoci počátečního proudu I_0, odporů R_1, R_2 a indukčnosti L.

(c) Za pomoci výsledku (b) určete celkové elektromotorické napětí v obvodu) z Faradayova zákona je rovno $-LdI/dt$) po rozpojení spínače. Je předpoklad $\varepsilon_0 = 0$ v (b) po rozpojení spínače správný?

(d) Jaká je velikost spádu potenciálu na rezistoru R_2 v čase $t > 0$ těsně po rozpojení spínače? Vyjádřete výsledný vztah za pomoci veličin ε_0, R_1 a R_2. Jaký je spád potenciálu na odporu R_2 těsně po rozpojení obvodu ve srovnání s elektromotorickým napětím baterie, pokud platí $R_2 = 100\ R_1$?

P 11.13.5 Další RL obvod

Uvažujte obvod z obrázku 11.3.2, $\varepsilon = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $L = 2$ H. Indukčnost levé smyčky obvodu je nulová.



Obr. 11.13.2: *RL* obvod.

(a) Nalezněte proudy I_1 a I_2 těsně po sepnutí spínače S.

(b) Nalezněte proudy I_1 a I_2 po dosti dlouhé době. Jaká bude energie v induktoru?

(c) Po velmi, velmi dlouhé době spínač opět rozpojíme. Nalezněte proudy I_1 a I_2 bezprostředně poté.

(d) Nalezněte proudy I_1 a I_2 dlouho po rozpojení spínače. Kolik energie je disipováno na rezistorech R_1 a R_2 od okamžiku, kdy byl spínač S opětovně rozpojen do dosti dlouhé doby poté.

(e) Zhruba odhadněte, co znamená „dlouhá doba“ v tomto obvodu.

P 11.13.6 Indukčnost solenoidu s železným jádrem a bez jádra

(a) Dlouhý solenoid s N závity má délku l a příčný průřez A. Ukažte, že vlastní indukčnost může být vyjádřena ve tvaru $L = \mu_0 N^2 A / l$. Povšimněte si, že L roste s N^2 a má rozměr μ_0 krát délka.

(b) Solenoid má délku 126 cm a průměr 5,45 cm. Počet závitů je 1870. Určete indukčnost za předpokladu, že uvnitř je vakuum.

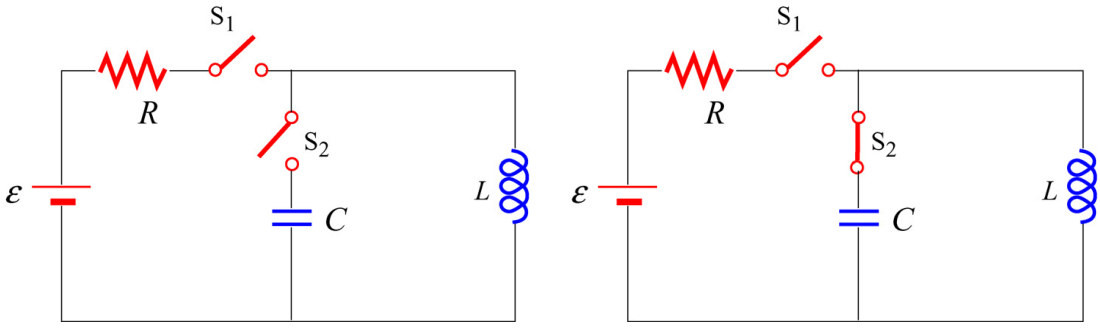
(c) Jaká bude indukčnost, pokud vyplníme vnitřek solenoidu železem s magnetickou konstantou $\kappa_m = 968$?

(d) Předpokládejte, že propojíte solenoid se železným jádrem do série s baterií a rezistorem. Celkový odpor obvodu (včetně baterie a induktoru) je 10 Ω. Za jak dlouho dosáhne proud 50 % konečné hodnoty?

[(b) 8,1 mH; (c) 7,88 H; (d) 0,55 s]

P 11.13.7 RLC obvod

Uvažujte *RLC* obvod s baterií dle obrázku 11.13.3 nalevo. Obvodem neprochází proud do času $t = 0$, kdy je sepnut spínač S_1.



Obr. 11.13.3: *RLC* obvod.

(a) Jaký proud poteče obvodem po sepnutí spínače S_1 ($t > 0$)?

(b) Jaký proud poteče obvodem velmi dlouho ($t \gg R/L$) poté, co byl spínač S_1 sepnut?

(c) Kolik energie je uloženo v magnetickém poli solenoidu velmi dlouho ($t \gg R/L$) po sepnutí spínače?

Pro další dvě otázky předpokládejme, že velmi dlouho ($t \gg R/L$) po sepnutí spínače S_1 odpojíme zdroj napětí od obvodu tak, že rozpojíme spínač S_1 a spojíme spínač S_2 (induktor připojíme ke kondenzátoru), viz obrázek 11.13.3 napravo. Předpokládejte, že tento nový obvod má zanedbatelný odpor.

(d) Jaký je maximální náboj, který bude mít kondenzátor? Vyjádřete za pomoci daných veličin.

(e) Za jak dlouho dosáhne kondenzátor poprvé od sepnutí spínače S_2 maximální hodnotu?

P 11.13.8 Rotující válec

Představte si dvě vodivé válcové plochy. Z vnější plochy odteče náboj $+Q$ na vnitřní plochu. Výsledkem je , že na vnější ploše je náboj $-Q$ a na vnitřní $+Q$. Poloměr vnitřního vodiče je a, vnějšího b, délka obou je l a platí $l \gg a, b$.

(a) Jaké je elektrické pole pro $r < a$, $a < r < b$, $r > b$? Určete jak velikost, tak směr.

(b) Jaké je celkové množství energie uložené v elektrickém poli? (Návod: výpočet můžete provést mnoha způsoby, například přes hustotu elektrické energie, kapacitu nebo potenciál jako funkci Q. Zkuste si výpočet dvěma způsoby.)

(c) Předpokládejte nyní, že oba válce rotují proti směru hodinových ručiček (při pohledu dolů podél osy z) stejnou úhlovou rychlostí ω. Perioda rotace je tedy $T = 2\pi / \omega$. Jaký je celkový proud (velikost i znaménko) tekoucí oběma válci? Výsledek zapište pomocí ω a veličin v zadání. Proud považujte za kladný, pokud míří ve směru rotace.

(d) Jaké je magnetické pole vytvořené rotujícími válci? Určete velikost a směr pole **B** v každé z následujících tří oblastí: $r < a$, $a < r < b$, $r > b$. (Návod: Nejjednodušší je určit pole od každého válce zvlášť a potom je vektorově sečíst).

(e) Jaká je celková energie uložená v magnetickém poli, pokud válce rotují s frekvencí ω?

P 11.3.9 Rotující smyčka

Kruhová vodivá smyčka poloměru a má odpor R a rotuje kolem svého průměru, který leží v ose y, kolmo na vnější magnetické pole $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{k}}$. Úhel mezi normálou smyčky a magnetickým polem je θ. Platí $\theta = \omega t$. Zanedbejte vlastní indukčnost smyčky.

(a) Vyjádřete magnetický tok plochou smyčky jako funkci času.

(b) Vyjádřete elektromotorické napětí generované podél smyčky jako funkci času.

(c) Vyjádřete proud tekoucí smyčkou jako funkci času.

(d) V okamžiku, kdy je normála smyčky ve směru osy x, leží vrchol smyčky na ose z. Míří v tomto okamžiku proud v této části smyčky ve směru $+\hat{\mathbf{j}}$ nebo $-\hat{\mathbf{j}}$?

(e) Jaká je velikost nového magnetického pole B_{ind} (jako funkce času), které je vytvořeno ve středu smyčky indukovaným proudem?

(f) Odhadněte vlastní indukčnost L smyčky, pokud považujete vlastní indukované pole B_{ind} vypočítané v (e) za homogenní.

(g) Při jaké úhlové rychlosti bude indukované magnetické pole rovno externímu poli B? (V tomto případě by nebylo možné vlastní indukčnost zanedbat!) Zapište výsledek za pomoci veličin R a L.