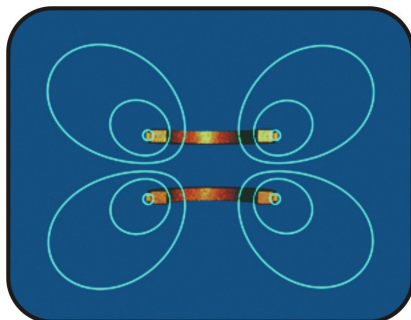


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

IX. Zdroje magnetických polí



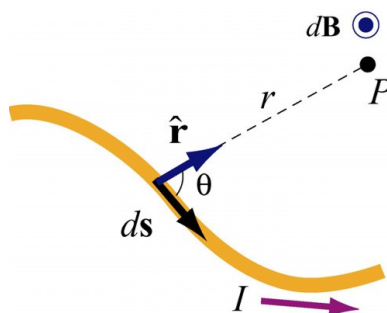
Obsah

9	ZDROJE MAGNETICKÝCH POLÍ	2
9.1	BIOTŮV-SAVARTŮV ZÁKON	2
9.1.1	MAGNETICKÉ POLE POHYBUJÍCÍHO SE BODOVÉHO NÁBOJE	8
9.2	SÍLY MEZI DVĚMA PARALELNÍMI VODIČI	10
9.3	AMPÉRŮV ZÁKON	11
9.4	SOLENOID	16
9.5	MAGNETICKÉ POLE DIPÓLU	19
9.5.1	ZEMSKÉ MAGNETICKÉ POLE V PRAZE	20
9.6	MAGNETICKÉ MATERIÁLY	22
9.6.1	MAGNETIZACE	23
9.6.2	PARAMAGNETISMUS	24
9.6.3	DIAMAGNETISMUS	25
9.6.4	FEROMAGNETISMUS	25
9.7	SHRNUTÍ	27
9.8	DODATEK 1: MAGNETICKÉ POLE MIMO OSU SYMETRIE PROUDOVÉ SMYČKY	28
9.9	DODATEK 2: HELMHOLTZOVY CÍVKY	32
9.10	ALGORITMY ŘEŠENÍ ÚLOH	37
9.10.1	BIOTŮV-SAVARTŮV ZÁKON	37
9.10.2	AMPÉRŮV ZÁKON	39
9.11	ŘEŠENÉ ÚLOHY	39
9.12	TÉMATICKÉ OTÁZKY	50
9.13	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	50

9 Zdroje magnetických polí

9.1 Biotův-Savartův zákon

Proudy, které vznikají díky pohybu nábojů, jsou zdroji magnetických polí. Když se nabitě částice pohybují vodičem a vytvářejí proud I , pak magnetické pole, které je v nějakém bodě P vytvořeno tímto proudem, můžeme spočítat sečtením jednotlivých příspěvků magnetického pole $d\mathbf{B}$ od malých částí vodiče ds (viz obrázek 9.1.1).



Obr. 9.1.1: Magnetické pole $d\mathbf{B}$ v bodě P způsobené proudovým elementem $I ds$.

Tyto segmenty vodiče můžeme považovat za vektorové veličiny mající velikost délky daného segmentu a směr proudu, který danou částí vodiče protéká. Infinitesimální proudový zdroj magnetického pole může být tedy zapsán ve tvaru $I ds$.

Nechť r označuje vzdálenost od proudového zdroje k bodu P , ve kterém sledujeme pole a $\hat{\mathbf{r}}$ je odpovídající jednotkový vektor. Biotův-Savartův zákon nám udává příspěvek magnetického pole $d\mathbf{B}$, který je vytvořený elementárním proudovým zdrojem $I ds$:

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}}, \quad (9.1.1)$$

kde konstanta μ_0 se nazývá *permeabilita vakua* a její velikost je

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} . \quad (9.1.2)$$

Všimněme si, že výraz je nápadně podobný Coulombovu zákonu pro elektrické pole, které je generované elementárním nábojem dq :

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.1.3)$$

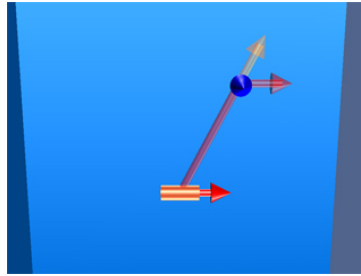
Pro získání celkové hodnoty magnetického pole v bodě P musíme všechny příspěvky proudového zdroje sečíst

$$\mathbf{B} = \int_{\text{zdroj}} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{zdroj}} \frac{ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} . \quad (9.1.4)$$

Tento integrál je vektorový integrál, to znamená, že hodnota \mathbf{B} je ve skutečnosti dána třemi integrály, každým pro jednu komponentu \mathbf{B} . Vektorový charakter integrálu je dán vektorovým součinem $I ds \times \hat{\mathbf{r}}$. Pochopení, jak vyhodnotit tento vektorový součin a jeho úlohu ve výpočtu celkového integrálu, bude klíčové ke správnému použití Biotova-Savartova zákona.

S Interaktivní simulace 9.1: Magnetické pole malého úseku vodiče s proudem

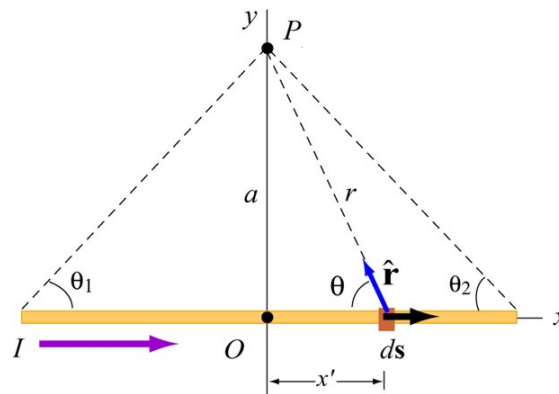
Na obrázku 9.1.2 je snímek interaktivní ShockWave simulace, která znázorňuje magnetické pole proudového elementu, daného rovnicí (9.1.1). Na interaktivní simulaci můžeme měnit polohu místa pozorovatele vůči zdrojovému proudovému elementu a sledovat tak, jak se na její závislosti mění hodnota magnetického pole. Pozorovacím bodem (černou kuličkou) můžete pohybovat kurzorovými klávesami a pozorovat pole v různých místech vzhledem k proudovému elementu. Červená šipka v místě proudového elementu a průhledná červená šipka v pozorovacím místě ukazují směr elektrického proudu. Průhledná oranžová šipka v místě pozorování ukazuje směr od proudového elementu k místu pozorování. Modrá šipka znázorňuje magnetické pole v místě pozorování.



Obr. 9.1.2: Magnetické pole elementárního proudového příspěvku.

P Příklad 9.1: Magnetické pole vytvořené rovným vodičem konečné délky

Tenký přímý vodič, kterým prochází proud I , je umístěn podél osy x tak, jak je znázorněno na obrázku 9.1.3. Spočítejte magnetické pole v bodě P . Předpokládejte, že přívody ke koncům vodiče nemají žádný vliv na celkové magnetické pole v bodě P .



Obr. 9.1.3: Tenký přímý drát, kterým prochází proud I .

Řešení:

Toto je typický příklad vyžadující použití Biotova-Savartova zákona. Problém budeme řešit pomocí metodiky shrnuté v kapitole 9.10.

- (1) *Bod zdroje (souřadnice označená čárkou).* Uvažujme nekonečně malý element $ds = dx' \hat{i}$, kterým protéká proud I ve směru x . Poloha tohoto elementárního zdroje magnetického pole je dána vztahem $\mathbf{r}' = x' \hat{i}$.
- (2) *Bod, ve kterém počítáme magnetické pole (označený „P“).* Bod P je umístěn v poloze $(x, y) = (0, a)$, jeho polohový vektor má tvar $\mathbf{r}_p = a \hat{j}$.

(3) *Relativní polohový vektor.* Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$ je „vzájemný“ polohový vektor, který ukazuje z místa zdroje do místa P , kde sledujeme pole. V našem případě je $\mathbf{r} = a \hat{\mathbf{j}} - x' \hat{\mathbf{i}}$ a velikost $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2 + x'^2}$ je vzdálenost mezi zdrojem pole a bodem P . Odpovídající jednotkový vektor je dán vztahem

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{a \hat{\mathbf{j}} - x' \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{a^2 + x'^2}} = \sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}.$$

(4) *Vektorový součin $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$.* Vektorový součin je dán vztahem

$$d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = (dx' \hat{\mathbf{i}}) \times (-\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) = (dx' \sin \theta) \hat{\mathbf{k}}$$

(5) *Zapišeme příspěvek magnetického pole způsobeného $I ds$:*

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} \hat{\mathbf{k}},$$

že magnetické pole v bodě P míří ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$, tj. ven z nárysny.

(6) *Zjednodušení a integrace.* Proměnné θ , x a r nejsou navzájem nezávislé. Abychom mohli provést integraci, přepíšeme proměnné x a r pomocí proměnné θ . Z obrázku 9.1.3 vidíme, že

$$\begin{cases} r = a / \sin \theta = a \csc \theta \\ x = a \cot \theta \Rightarrow dx = -a \csc^2 \theta d\theta \end{cases}$$

Po substituci do předchozího výrazu obdržíme příspěvek magnetického pole ve tvaru

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-a \csc^2 \theta d\theta) \sin \theta}{(a \csc \theta)^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

Po integrování přes všechny úhly mezi $-\theta_1$ a θ_2 (protože integrujeme přes zápornou část osy x , musíme mít u úhlu θ_1 záporné znaménko). Potom obdržíme

$$\boxed{B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1)} \quad (9.1.5)$$

První člen obsahující θ_2 je příspěvek od kladné části osy x a člen s θ_1 je příspěvek od záporné části osy x . Oba členy se sčítají!

Nyní můžeme vyzkoušet následující případy:

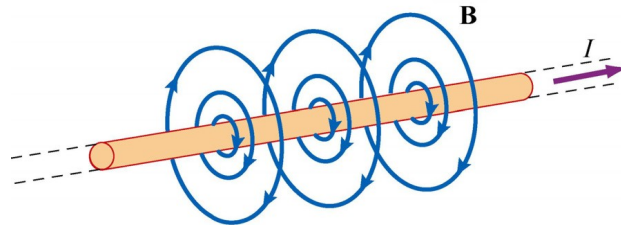
(i) V symetrickém případě, kdy $\theta_2 = -\theta_1$ je zkoumaný bod pole P umístěn na přímce, která dělí osu x kolmo na dvě stejné části. Délka vodiče je $2L$. Potom je $\cos \theta_1 = L / \sqrt{L^2 + a^2}$ a magnetické pole bude

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos \theta_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}. \quad (9.1.6)$$

(ii) Vodič je nekonečně dlouhý, tj. $L \rightarrow \infty$. Výsledek tohoto limitního případu získáme tak, že dosadíme za $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Magnetické pole ve vzdálenosti a pak bude

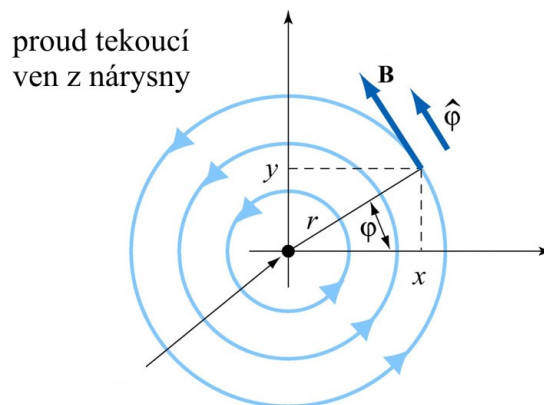
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (9.1.7)$$

Poznamenejme jen, že v limitě (ii) systém získává cylindrickou, tj. válcovou symetrii a siločivky magnetického pole jsou pak kruhové, jak je ukázáno na obrázku 9.1.4



Obr. 9.1.4: Siločivky magnetického pole v okolí nekonečně dlouhého vodiče, kterým protéká proud I .

Směr vektorů magnetického pole podél přímého vodiče můžeme určit pomocí pravidla pravé ruky (Obr. 9.1.5)



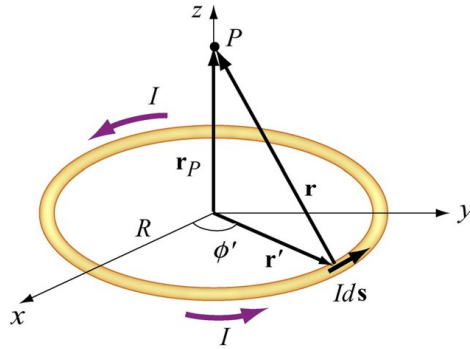
Obr. 9.1.5: Směr siločivek magnetického pole vytvořeného nekonečně dlouhým drátem.

Jestliže namíříte palec pravé ruky ve směru proudu procházejícího vodičem, pak se prsty pravé ruky stáčí ve směru magnetických siločivek. Ve válcových souřadnicích (r, φ, z) , kde jednotkové vektory vzájemně splňují $\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$, platí, že jestliže tok proudu je ve směru $+z$, pak s použitím Biotova-Savartova zákona musí magnetické pole mířit ve směru φ .

P Příklad 9.2: Magnetické pole vytvořené kruhovou proudovou smyčkou

Kruhovou smyčkou v rovině xy s poloměrem R probíhá proud I (viz obr. 9.1.6).

- Jaké je magnetické pole v bodě P ležícím na ose smyčky ve vzdálenosti z od jejího středu?
- Jestliže umístíme magnetický dipól $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ do bodu P , nalezneme magnetickou sílu, která na dipól působí. Je síla přitažlivá nebo odpuzivá? Co se stane, jestliže obrátíme směr dipólu, tj. jestliže bude $\boldsymbol{\mu} = -\mu_z \hat{\mathbf{k}}$?



Obr. 9.1.6: Magnetické pole způsobené kruhovou smyčkou, kterou prochází stejnosměrný proud.

Řešení (a):

Toto je další příklad na Biotův-Savartův zákon. Znovu budeme hledat magnetické pole užitím stejné metody, jako jsme použili v příkladu 9.1.

- (1) *Bod zdroje.* V kartézských souřadnicích můžeme proudový element ležící v místě $\mathbf{r}' = R(\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi'\hat{\mathbf{j}})$ vyjádřit ve tvaru

$$Id\mathbf{s} = I(d\mathbf{r}'/d\phi')d\phi' = IRd\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}}).$$

- (2) *Bod, kde sledujeme pole.* Bod P volíme v ose smyčky ve vzdálenosti z od jejího středu, polohový vektor bodu P potom je $\mathbf{r}_P = z\hat{\mathbf{k}}$.

- (3) *Relativní polohový vektor* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$. Vzájemný polohový vektor je dán

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}' = -R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad (9.1.8)$$

jehož velikost

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(-R\cos\phi')^2 + (-R\sin\phi')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (9.1.9)$$

je vzdálenost mezi proudovým elementem a bodem P . Odpovídající jednotkový vektor z $I d\mathbf{s}$ do P je

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|}.$$

- (4) *Zjednodušení vektorového součinu.* Vektorový součin $d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')$ se dá zjednodušit následovně:

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}') &= Rd\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}}) \times (-R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= Rd\phi'(z\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + z\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

- (5) *Vyjádření $d\mathbf{B}$.* Užitím Biotova-Savartova zákona zjistíme, že příspěvek proudového elementu do magnetického pole je v bodě P roven

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{z \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9.1.11)$$

(6) *Výpočet integrace.* S využitím výpočtů získaných výše obdržíme velikost magnetického pole v bodě P

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \quad (9.1.12)$$

Velikosti x -ové a y -ové komponenty \mathbf{B} snadno spočteme jako nulové:

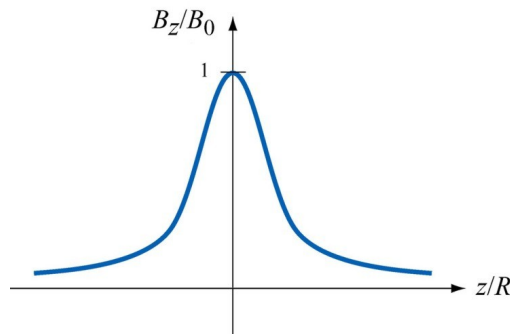
$$B_x = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \left[\frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \sin \phi' \right]_0^{2\pi} = 0, \quad (9.1.13)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \left[-\frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \cos \phi' \right]_0^{2\pi} = 0, \quad (9.1.14)$$

a z -ová komponenta je

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (9.1.15)$$

Vidíme tudíž, že díky symetrii úlohy je podél osy z jedinou nenulovou složkou magnetického pole B_z . Závislost B_z/B_0 jako funkce z/R , kde $B_0 = \mu_0 I/2R$ je velikost magnetického pole v $z = 0$, je znázorněna na obrázku 9.1.7:



Obr. 9.1.7: Magnetické pole B_z/B_0 jako funkce z/R .

Řešení (b):

Jestliže umístíme magnetický dipól $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ do bodu P , jak bylo diskutováno v kapitole 8, bude díky nehomogenosti magnetického pole působit na dipól síla

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (9.1.16)$$

Po provedení derivace (9.1.15) a dosazení do (9.1.16) obdržíme

$$\mathbf{F}_B = -\frac{3\mu_z\mu_0 IR^3 z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{k}} \quad (9.1.17)$$

Z výsledku (9.1.17) vidíme, že dipól je přitahován směrem ke středu kruhu. A naopak, pokud směr dipólu otočíme, tj $\boldsymbol{\mu} = -\mu_z \hat{\mathbf{k}}$, bude výsledná síla odpudivá.

9.1.1 Magnetické pole pohybujícího se bodového náboje

Předpokládejme, že máme nekonečně malý proudový element ve tvaru válce s průřezem A a výškou ds obsahující n nosičů náboje na jednotku objemu. Všechny nosiče se pohybují stejnou rychlostí \mathbf{v} podél osy válce. Necht' I je proud v elementárním objemu, který definujeme jako množství náboje procházející za jednotku času plochou řezu válečku. Z kapitoly 6 víme, že můžeme proud I vyjádřit jako

$$nAq|\mathbf{v}| = I. \quad (9.1.18)$$

Celkové množství nábojových nosičů v proudovém objemu je jednoduše $dN = nAds$, takže s použitím (9.1.1) je magnetické pole $d\mathbf{B}$ vybuzené dN nábojovými nosiči dáno výrazem

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nAq|\mathbf{v}|) ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nAds) q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dN) q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (9.1.19)$$

kde r je vzdálenost mezi nábojem a bodem P , ve kterém měříme magnetické pole, jednotkový vektor $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ míří od zdroje pole (náboje) směrem k bodu P . Přírůstek vektoru ds je definován tak, aby byl rovnoběžný s \mathbf{v} . V případě jednoho náboje $dN = 1$ přejde tento výraz na

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (9.1.20)$$

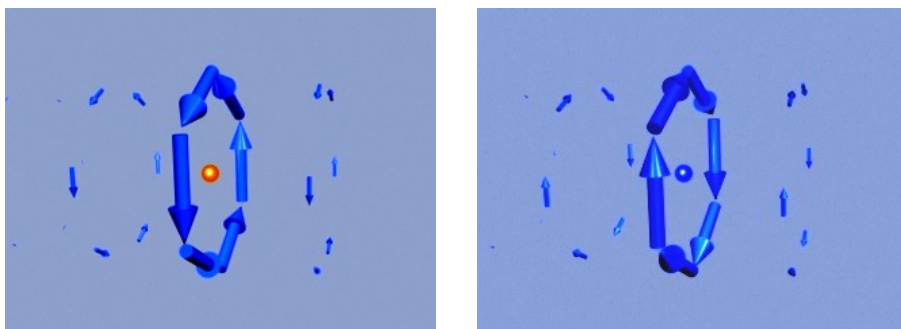
Nicméně poznamenejme toto: jelikož jeden bodový náboj nemůže vytvořit ustálený elektrický proud, tato rovnice je platná jen pro nerelativistickou limitu, kdy rychlost $v \ll c$ (rychlost světla) a tudíž efekt „retardace“ můžeme zcela ignorovat.

Tento výsledek můžeme okamžitě zobecnit na soubor N nábojů, z nichž každý se pohybuje rozdílnou rychlostí. Necht' i -tý náboj q_i je umístěn v bodě (x_i, y_i, z_i) a pohybuje se rychlostí \mathbf{v}_i . S využitím principu superpozice obdržíme pro magnetické pole vztah

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \mathbf{v}_i \times \left[\frac{(x-x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{j}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \right]^{3/2}} \right]. \quad (9.1.21)$$

V Animace 9.1: Magnetické pole pohybujícího se náboje

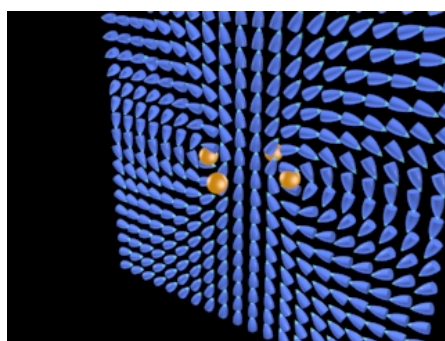
Obrázek 9.1.18 ukazuje snímky animace magnetického pole pohybujícího se kladného a záporného bodového náboje. Předpokládáme, že rychlost náboje je malá ve srovnání s rychlostí světla.



Obr. 9.1.8: Magnetické pole pohybujícího se **kladného** náboje (nalevo) a pohybujícího se **záporného** náboje (napravo) Rychlost náboje je malá oproti rychlosti světla.

V Animace 9.2: Magnetické pole několika nábojů pohybujících se po kružnici.

Předpokládejme, že chceme spočítat magnetická pole většího počtu nábojů pohybujících se po obvodu kružnice a majících mezi sebou stejné vzdálenosti. Pro spočítání tohoto pole, musíme sečíst vektorově magnetická pole všech jednotlivých částic užitím vztahu (9.1.21).



Obr. 9.1.9: Magnetické pole čtyř nábojů pohybujících se po kružnici. Směry vektorů magnetického pole jsou zobrazeny pouze v jedné rovině. Kuličky představují pohybující se náboje, které magnetické pole vytvářejí.

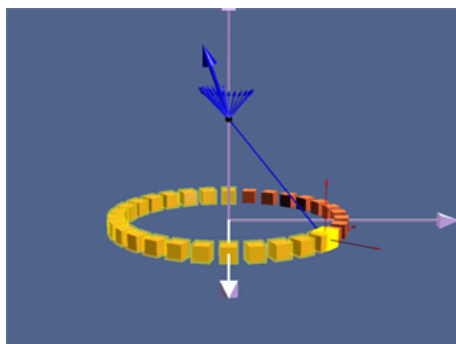
Obrázek 9.1.9 je odkazem na animaci, ve které jsou 4 pohybující se náboje. Další **animace** ukazují stejnou situaci pro 1, 2 a 8 nábojů. Když se dostáváme k počtu osmi nábojů, začíná se vynořovat charakteristický obrazec – tvar magnetického dipólu. Daleko od prstence je tvar silokřivek stejného tvaru, jako je tvar silokřivek elektrického dipólu.

S Interaktivní simulace 9.2: Magnetické pole prstence pohybujících se nábojů

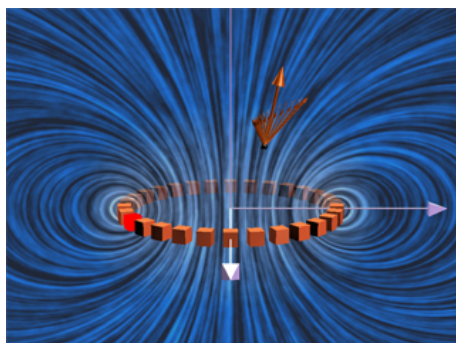
Obrázek 9.1.10 odkazuje ShockWave simulaci, která znázorňuje magnetické pole generované prstencovým proudem a ukazuje, že podle principu superpozice lze spojitě rozložení proudu chápat jako výsledek součtu velkého počtu proudových elementů (zde třiceti). Každý element vytváří své vlastní pole, popsatelné Biotovým-Savartovým zákonem (reprezentované zde malými vektory v místě pozorování), které po sečtení dají vzniknout celkovému výslednému poli prstence (velký výsledný vektor). V této animaci je k celkovému poli přidáván element za elementem (zvýrazněná část prstence) a výsledné pole se příslušně mění. Protože integrace se týká celého prstence, příspěvky složek v rovině prstence se vyruší a v ose prstence je výsledné pole kolmé na prstencec.

Na obrázku 9.1.11 je ukázána ShockWave aplikace, která je podobná té předchozí (9.1.10). V simulaci vidíte magnetické pole vytvořené prstencem protékaným proudem. Při konstrukci pole využijeme princip superpozice. Spojitý elektrický proud si představíme jako součet mnoha diskrétních proudových elementů (v našem případě třiceti). Každý z nich generuje

pole popsané Biotovým-Savartovým zákonem (v animaci je ukázáno malými vektory v místě pozorování). Po sečtení příspěvků od všech částí prstence získáme celkové pole generované prstencem (zobrazené výsledným vektorem a dvourozměrnou mapou pole). Místo pozorování můžete měnit pomocí kurzorových kláves. V simulaci vidíte magnetické pole vytvořené prstencem protékaným proudem. Při konstrukci pole využijeme princip superpozice. Spojitý elektrický proud si představíme jako součet mnoha diskretních proudových elementů. (v našem případě třiceti). Každý z nich generuje pole popsané Biotovým-Savartovým zákonem (v animaci je ukázáno malými vektory v místě pozorování). Po sečtení příspěvků od všech částí prstence získáme celkové pole generované prstencem (zobrazené výsledným vektorem a dvourozměrnou mapou pole). Místo pozorování můžete měnit pomocí kurzorových kláves



Obr. 9.1.10: ShockWave simulace užití principu superpozice k určení magnetického pole způsobeného třiceti elementy pohybujícími se v kruhu. Bod pozorovatele je v ose kružnice.

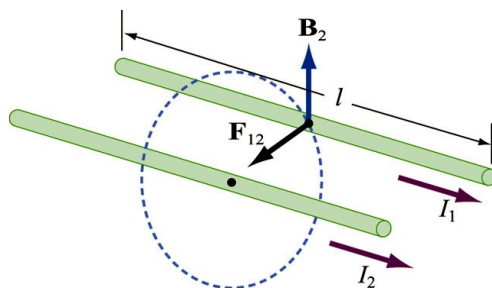


Obr. 9.1.11: Magnetické pole způsobené třiceti náboji pohybujícími se po kružnici. Polohu bodu pozorovatele je možné měnit, abychom snáze porozuměli, jak jednotlivé náboje přispívají v různých místech celkovému magnetickému poli.

9.2 Síly mezi dvěma paralelními vodiči

V předchozím jsme se přesvědčili, že proud protékající vodičem generuje magnetické pole. Navíc po umístění vodivého drátu do magnetického pole pozorujeme, že na něj také začne působit síla. Tudíž očekáváme, že dva rovnoběžné vodiče, kterými prochází proud, budou na sebe vzájemně působit silou.

Uvažujme dva paralelní vodiče vzdálené od sebe navzájem a . Vodiči prochází proudy I_1 a I_2 vkladným směru osy x tak, jak znázorňuje obrázek 9.2.1.



Obr. 9.2.1: Síly mezi dvěma paralelními vodiči

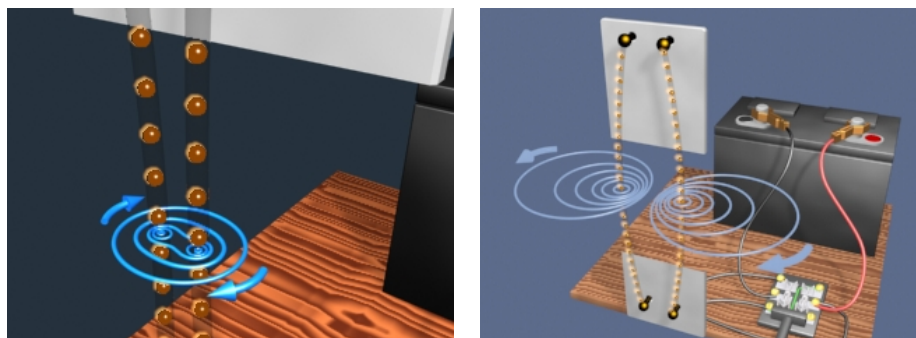
Magnetická síla \mathbf{F}_{12} , kterou vodič 2 působí na vodič 1, může být spočtena s využitím výsledků z předchozího příkladu následovně: magnetické siločivky pole, které generuje proud I_2 tekoucí v kladném směru osy x , jsou soustředné kružnice s vodičem 2 ve svých středech. Pole \mathbf{B}_2 směřuje v tangenciálním směru. Tudiž v libovolném bodě umístěném na vodiči 1 budeme mít pole $\mathbf{B}_2 = (\mu_0 I_2 / 2\pi a) \hat{\mathbf{j}}$, které míří ve směru kolmém k vodiči 1 tak, jak je znázorněno na obrázku 9.2.1. Je tedy

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 \mathbf{l} \times \mathbf{B}_2 = I_1 (l \hat{\mathbf{i}}) \times \left(-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \hat{\mathbf{j}} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \hat{\mathbf{k}} \quad (9.2.1)$$

Je vidět, že \mathbf{F}_{12} míří ve směru k vodiči 2. Závěrem tohoto jednoduchého výpočtu můžeme říci, že pokud v obou vodičích teče proud stejným směrem, bude výsledná síla přitažlivá. A na druhou stranu, pokud proudy tekou v opačných směrech, výsledná síla bude vždy odpuzivá.

V Animace 9.3: Síly mezi dráty, jimiž protékají proudy

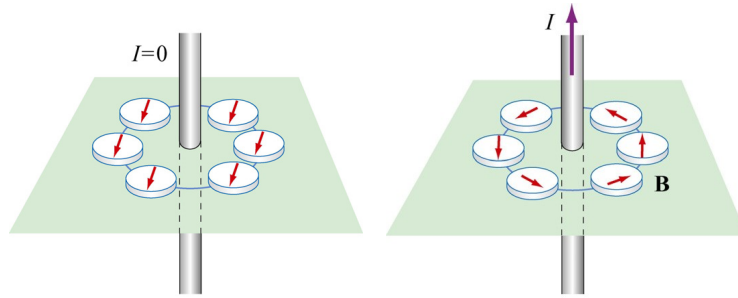
Obrázek 9.2.2 ukazuje rovnoběžné vodiče, kterými protékají proudy ve stejném a opačném směru. V prvním případě konfigurace magnetického pole takto vytváří přitažlivou sílu mezi oběma dráty. Ve druhém případě, opačné proudy vytváří magnetické pole, které dráty odpuzuje.



Obr. 9.2.2: *Nalevo* – přitažlivé působení mezi dvěma vodiči, jimiž protéká proud ve stejných směrech. Směr pohybu oranžových kuliček ve vizualizaci ukazuje směr toku kladného náboje. *Napravo* – odpuzivé působení mezi dvěma vodiči, jimiž protéká proud v opačných směrech.

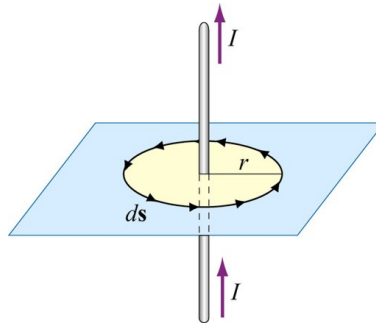
9.3 Ampérův zákon

Viděli jsme, že pohybující se náboje nebo elektrické proudy jsou zdroji magnetismu. To můžeme snadno demonstrovat tím, že do blízkosti drátu protékaného proudem umístíme kompas. Jak je vidět na obrázku 9.3.1 nalevo, pokud vodičem neprochází žádný proud, ukazují všechny střílky kompasů stejným směrem. Ale pokud je $I \neq 0$, stočí se všechny střílky do tangenciálního (tečného) směru ke kruhovým siločivkám (obrázek 9.3.1 napravo).



Obr. 9.3.1: Stáčení magnetických střepek v blízkosti vodiče, kterým protéká proud.

Rozdělme nyní kruhovou dráhu s poloměrem r do velkého počtu malých vektorů délky $\Delta s = \Delta s \hat{\phi}$, které míří v tečném směru a mají velikost Δs (obrázek 9.3.2).

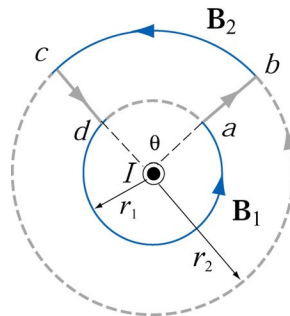


Obr. 9.3.2: Ampérova smyčka.

V limitě $\Delta s \rightarrow 0$, obdržíme

$$\oint \mathbf{B} ds = B \oint ds = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (2\pi r) = \mu_0 I . \quad (9.3.1)$$

Tento výsledek získáme tak, že zvolíme uzavřenou (v tomto případě kruhovou) smyčku, která sleduje jednu magnetickou silokřivku. Uvažujme nyní trochu složitější křivku, takovou, která je znázorněna na obrázku 9.3.3.



Obr. 9.3.3: Ampérova smyčka sestávající ze dvou silokřivek.

Křivkový integrál magnetického pole po dráze $abcda$ je

$$\begin{aligned} \oint_{abcda} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= 0 + B_2 (r_2 \theta) + 0 + B_1 [r_1 (2\pi - \theta)], \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

kde délka oblouku bc je $r_2 \theta$ a $r_1 (2\pi - \theta)$ je oblouk da . První a třetí integrál je nulový, protože magnetické pole je kolmé k integrační křivce. Pro hodnoty $B_1 = \mu_0 I / 2\pi r_1$ a $B_2 = \mu_0 I / 2\pi r_2$ bude integrál (9.3.2) roven

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (r_2 \theta) + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} [r_1 (2\pi - \theta)] = \mu_0 I . \quad (9.3.3)$$

Vidíme, že jsme obdrželi stejný výsledek, jako když jsme volili integrační cestu po jedné magnetické siločivce.

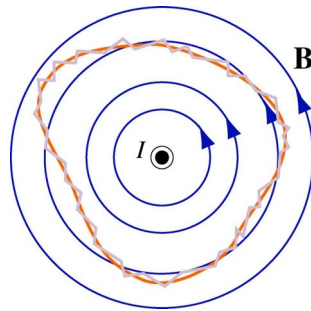
Jak jsme ukázali v příkladu 9.1, je ve válcových souřadnicích (r, θ, φ) magnetické pole generované proudem tekoucím v kladném smyslu podél osy z dáno výrazem $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{\varphi}$. Libovolný element délky můžeme ve válcových souřadnicích napsat ve tvaru

$$d\mathbf{s} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz \hat{\mathbf{z}} . \quad (9.3.4)$$

Proto vidíme, že

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I . \quad (9.3.5)$$

Jinými slovy, křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ přes jakoukoliv uzavřenou křivku je úměrný proudu I_{uz} , který je křivkou uzavřen.



Obr. 9.3.4: Ampérova křivka libovolného tvaru.

Zobecnění na jakoukoliv uzavřenou křivku libovolného tvaru (viz příklad 9.3.4), která obsahuje mnoho magnetických siločivek, je známo jako Ampérův zákon:

$$\boxed{\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 I_{uz}} . \quad (9.3.6)$$

Ampérův zákon je v magnetizmu analogií Gaussovu zákonu elektrostatiky. Abychom ho mohli aplikovat, systém musí mít určitou symetrii. V případě, že lineární vodič je nekonečně dlouhý, systém získá válcovou symetrii a může být okamžitě aplikován Ampérův zákon. V případě, že délka vodiče je konečná, musíme namísto toho užít Biotův-Savartův zákon.

Biotův-Savartův zákon	$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	obecný proudový zdroj Příklad: konečný drát
Ampérův zákon	$\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 I_{uz}$	proudový zdroj má nějakou symetrii Příklad: nekonečný drát (cyklindrická)

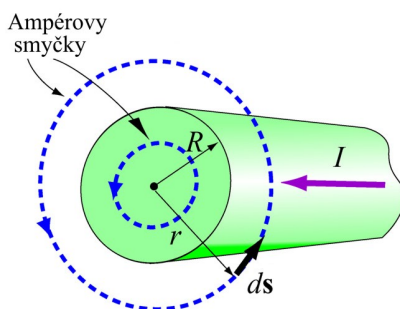
Ampérův zákon je snadno aplikovatelný při následujících konfiguracích:

1. Nekonečně dlouhý přímý vodič protékáný stejnosměrným proudem I (příklad 9.3)
2. Nekonečně velká vodivá plocha tloušťky b s proudovou hustotou J (příklad 9.4)
3. Nekonečný solenoid (kapitola 9.4)
4. Toroid (příklad 9.5)

Ukažme si všechny čtyři konfigurace detailně.

Příklad 9.3: Pole uvnitř a vně drátu, kterým protéká proud

Uvažujme dlouhý přímý vodivý drát s poloměrem R , kterým protéká proud I s rovnoměrnou proudovou hustotou, tak jak je znázorněno na obrázku 9.3.5. Nalezneme průběh magnetického pole.



Obr. 9.3.5: Ampérové smyčky pro výpočet pole \mathbf{B} v okolí drátu s poloměrem R .

Řešení:

- (i) Vně vodiče, kde $r \geq R$, Ampérová smyčka zcela uzavře zdrojový proud, proto je $I_{\text{uz}} = I$. Aplikováním Ampérova zákona obdržíme

$$\oint \mathbf{B} ds = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I .$$

Odtud dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

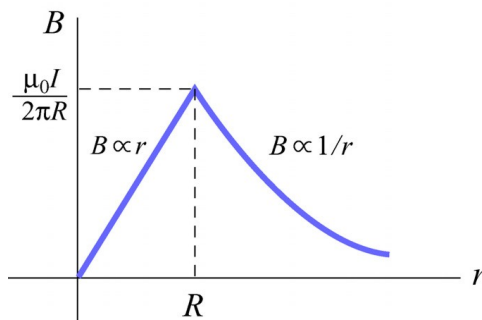
- (ii) Uvnitř vodiče, kde $r < R$, je množství proudu uzavřené Ampérovou smyčkou (na obrázku menší kroužek) úměrné ploše kroužku, tj.

$$I_{\text{uz}} = \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right) I .$$

A tedy máme

$$\oint \mathbf{B} ds = B(2\pi r) = \mu_0 I \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right) \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}} .$$

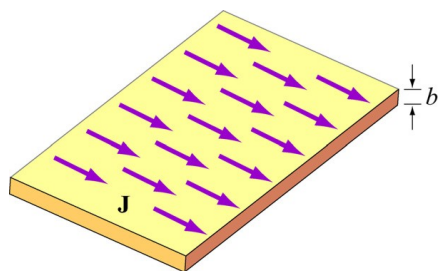
Odtud vidíme, že magnetické pole je nulové ve středu drátu a lineárně roste s r , až do $r = R$. Mimo vodič pak bude magnetické pole klesat nepřímě úměrně se vzdáleností r . Průběh magnetického pole je znázorněn na obrázku 9.3.6.



Obr. 9.3.6: Magnetické pole vodiče o poloměru R , kterým prochází proud I s homogenní proudovou hustotou.

Příklad 9.4: Magnetické pole generované nekonečnou vodivou deskou

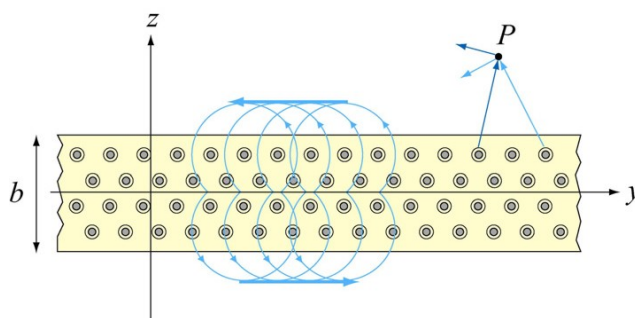
Uvažujme nekonečně velkou desku o tloušťce b ležící v rovině xy s homogenní proudovou hustotou $\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{i}}$. Najděte průběh magnetického pole v okolí desky.



Obr. 9.3.7: Nekonečně velká deska s proudovou hustotou $\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{i}}$.

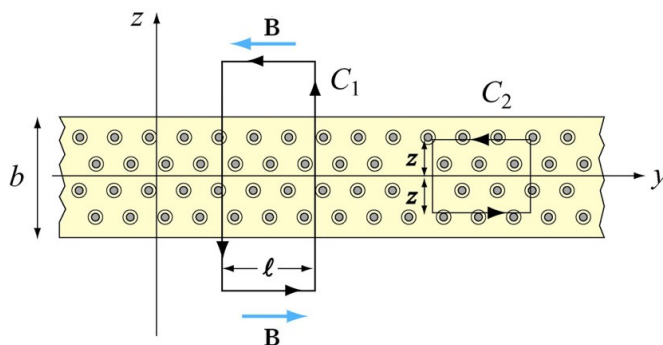
Řešení:

Vodivou desku si můžeme představit jako soubor mnoha paralelních vodičů v $+x$ -ovém směru. Z obrázku 9.3.8 vidíme, že magnetické pole v bodě P nad rovinnou deskou směřuje v záporném směru osy y . Z -ová komponenta magnetického pole po sečtení příspěvků od všech vodičů zcela vymizí. Analogicky vidíme, že pod deskou magnetické pole směřuje v kladném směru osy y .



Obr. 9.3.8: Magnetické pole rovinné desky.

K výpočtu magnetického pole nekonečně velké rovinné vodivé desky můžeme nyní aplikovat Ampérův zákon. Ampérové smyčky jsou znázorněny na obrázku 9.3.9.



Obr. 9.3.9: Ampérové smyčky v případě rovinné vodivé desky.

K získání pole vně integrujeme podél křivky C_1 . Celkový proud uzavřený křivkou C_1 bude

$$I_{\text{uz}} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = J_0 (b\ell) . \quad (9.3.7)$$

Po aplikaci Ampérova zákona obdržíme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2l) = \mu_0 I_{uz} = \mu_0 (J_0 b l) , \quad (9.3.8)$$

čili $B = \mu_0 J_0 b / 2$. Poznamenejme, že magnetické pole vně desky je konstantní, nezávislé na vzdálenosti od desky. Nyní nalezneme magnetické pole uvnitř desky. Celkový proud uzavřený křivkou C_2 je

$$I_{uz} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = J_0 (2|z|\ell) . \quad (9.3.9)$$

Aplikováním Ampérova zákona získáme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2l) = \mu_0 I_{uz} = \mu_0 J_0 (2|z|\ell) , \quad (9.3.10)$$

čili $B = \mu_0 J_0 |z|$. Ze symetrie také vyplývá, že pro $z = 0$ magnetické pole vymizí. Výsledek můžeme shrnout do tvaru

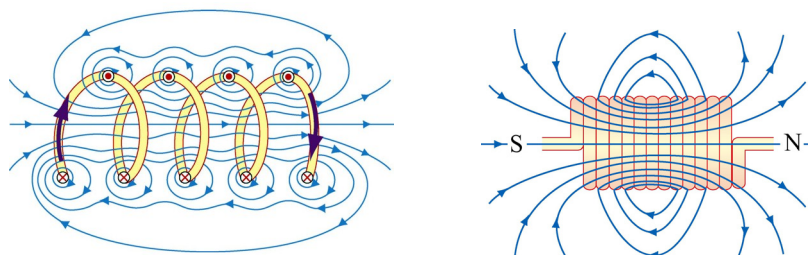
$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{\mathbf{j}}, & z > b/2 \\ -\mu_0 J_0 z \hat{\mathbf{j}}, & -b/2 < z < b/2 \\ \frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{\mathbf{j}}, & z < -b/2 \end{cases} . \quad (9.3.11)$$

Uvažujme nyní limitu, kdy je deska nekonečně tenká, tj. $b \rightarrow 0$. V tomto případě budeme místo proudové hustoty $\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{i}}$ mít povrchový proud $\mathbf{K} = K \hat{\mathbf{i}}$, kde $K = J_0 b$. Poznamenejme, že rozměr K je [proud/délka]. V této limitě přejde magnetické pole na

$$B = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{\mathbf{j}}, & z > 0 , \\ \frac{\mu_0 K}{2} \hat{\mathbf{j}}, & z < 0 . \end{cases} \quad (9.3.12)$$

9.4 Solenoid

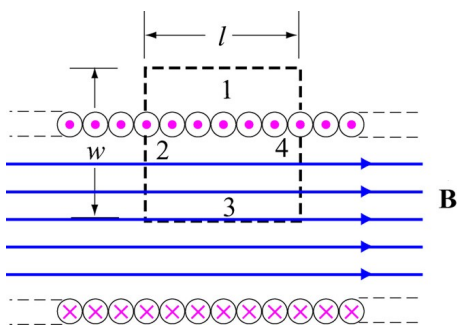
Solenoid je dlouhá cívka drátu těsně navinutého do spirálovité (helikální) struktury. Obrázek 9.4.1 ukazuje siločivky magnetického pole solenoidu, kterým prochází stejnosměrný proud I . Vidíme, že pokud jsou jednotlivé závity těsně u sebe, bude výsledné magnetické pole uvnitř solenoidu zcela homogenní, ovšem za předpokladu, že délka solenoidu bude mnohem větší, než jeho průměr. Pro „ideální“ solenoid, jehož délka je nekonečně velká a který má závity těsně navinuté, bude magnetické pole uvnitř solenoidu homogenní a rovnoběžné s osou, zatímco mimo solenoid vymizí.



Obr. 9.4.1: Siločivky magnetického pole solenoidu.

Pro výpočet magnetického pole uvnitř ideálního solenoidu můžeme užít Ampérův zákon. Na obrázku 9.4.2 je ukázán řez ideálním solenoidem. Pro výpočet magnetického pole \mathbf{B} uijeme pravoúhlé smyčky délky l a výšky w . Po křivce se budeme pohybovat proti směru hodinových ručiček. Křivkový integrál \mathbf{B} přes takovouto křivku nám dá

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= 0 + 0 + Bl + 0. \end{aligned} \quad (9.4.1)$$



Obr. 9.4.2: Ampérova smyčka k výpočtu magnetického pole ideálního solenoidu.

Při předchozím výpočtu byly příspěvky přes úseky 2 a 4 nulové, protože \mathbf{B} je kolmé k $d\mathbf{s}$. A navíc $\mathbf{B} = 0$ i v úseku 1, protože magnetické pole je nenulové pouze uvnitř solenoidu. Na druhou stranu, celkový proud uzavřený Ampérovou smyčkou je $I_{uz} = NI$, kde N je počet závitů. Při užití Ampérova zákona obdržíme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bl = \mu_0 NI, \quad (9.4.2)$$

čili

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI, \quad (9.4.3)$$

kde $n = N/l$ je počet závitů na jednotku délky. Vyjádřeno v hodnotách povrchového proudu, či v jednotkách proudu na jednotku délky $K = nI$, můžeme magnetické pole vyjádřit jako

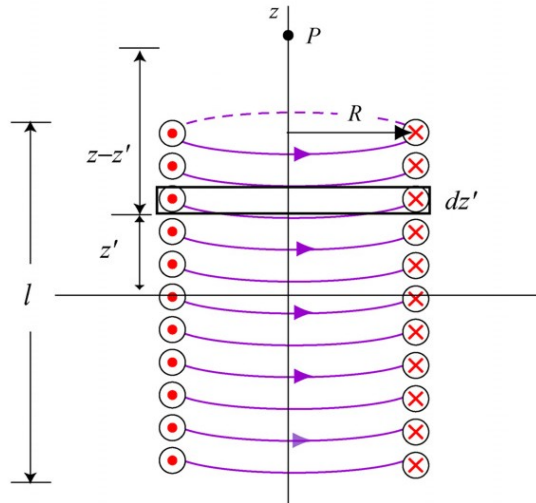
$$B = \mu_0 K. \quad (9.4.4)$$

Co se ale stane, když délka solenoidu bude konečná? K nalezení magnetického pole, které vznikne okolo konečného solenoidu, musíme solenoid aproximovat jako soubor sestávající z velkého množství těsně u sebe srovnaných kruhových smyček. Užitím výsledku obdrženého v příkladu 9.2, můžeme magnetické pole v bodě P na ose z spočítat následovně: provedeme řez těsně namotaných smyček umístěných v místě z' a majících tloušťku dz' tak, jak je znázorněné na obrázku 9.4.3

Velikost protékajícího proudu je úměrná tloušťce řezu, platí $dI = I(nd)z' = I(N/l)dz'$, kde $n = N/l$ je počet závitů na jednotku délky.

Příspěvek magnetickému poli v místě P od tohoto množství smyček je

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2}{2[(z-z')^2 + R^2]^{3/2}} dI = \frac{\mu_0 R^2}{2[(z-z')^2 + R^2]^{3/2}} (nIdz'). \quad (9.4.5)$$

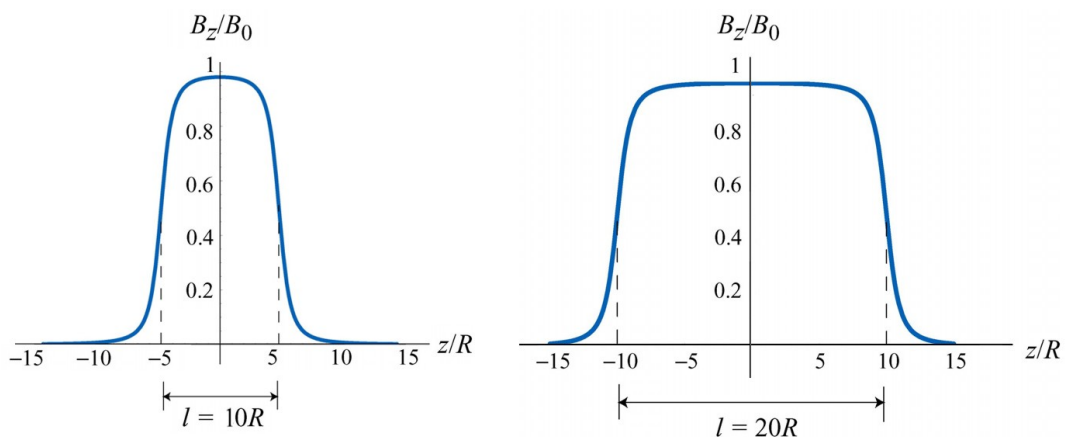


Obr. 9.4.3: Solenoid konečné délky.

Integrací přes celou délku solenoidu obdržíme

$$\begin{aligned}
 B_z &= \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\left[(z-z')^2 + R^2 \right]^{3/2}} = \left[\frac{\mu_0 n I R^2}{2} \frac{z'-z}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2}} \right]_{-l/2}^{l/2} = \\
 &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{l/2 - z}{\sqrt{(z-l/2)^2 + R^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{(z+l/2)^2 + R^2}} \right] \quad (9.4.6)
 \end{aligned}$$

Průběh B_z/B_0 , kde $B_0 = \mu_0 n I$ je magnetické pole nekonečně dlouhého solenoidu, jako funkce z/R je znázorněn na obrázku 9.4.4 pro $l = 10R$ a $l = 20R$.

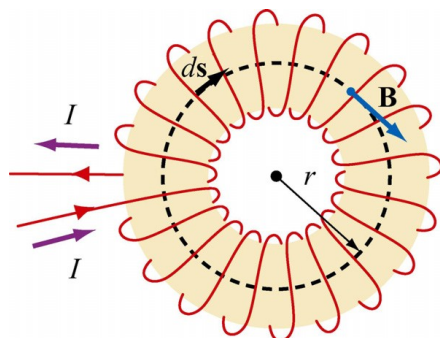


Obr. 9.4.4: Magnetické pole konečného solenoidu pro (a) $l = 10R$ a (b) $l = 20R$.

Všimněme si, že hodnoty magnetického pole v oblasti $|z| < l/2$ jsou téměř homogenní a rovnají se přibližně B_0 .

Příklad 9.5: Toroid

Uvažujme toroid, který sestává z N závitů tak, jak je znázorněno na obrázku 9.4.5. Nalezněte průběh magnetického pole.



Obr. 9.4.5: Toroid s N závitů.

Řešení:

Toroid si můžeme představit jako solenoid stočený do kruhu se spojenými konci. Magnetické pole je tudíž zcela uzavřené uvnitř toroidu a je orientované v azimutálním směru (ve směru hodinových ručiček v závislosti na toku proudu, jak je znázorněné na obrázku 9.4.5).

Po aplikaci Ampérova zákona obdržíme

$$\oint \mathbf{B} ds = \oint B ds = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI, \quad (9.4.7)$$

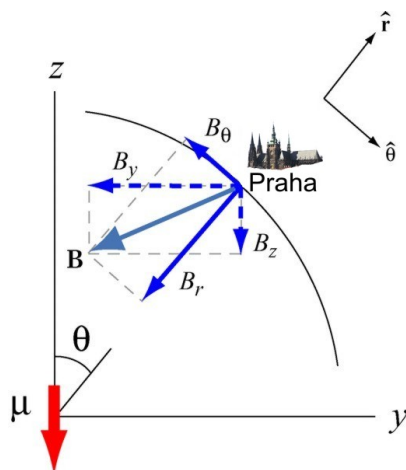
čili

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad (9.4.8)$$

kde r je vzdálenost měřená od středu toroidu. Na rozdíl od magnetického pole solenoidu, není magnetické pole uvnitř toroidu homogenní a jeho velikost klesá s $1/r$.

9.5 Magnetické pole dipólu

Nechť magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu} = -\mu \hat{\mathbf{k}}$ je umístěný v počátku (například ve středu Země) v rovině xy . Jaké je magnetické pole v daném místě (například v Praze) ve vzdálenosti r od počátku?



Obr. 9.5.1: Složky magnetického pole Země.

Na obrázku 9.5.1 je vyobrazeno magnetické pole dipólu a jeho složky v Praze; y - a z -ové složky magnetického pole jsou dány vztahy

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu}{r^3} \sin\theta \cos\theta, \quad B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (3\cos^2\theta - 1). \quad (9.5.1)$$

Pro detailní odvození odkazujeme čtenáře na kapitolu 9.8.

Ve sférických souřadnicích (r, θ, φ) můžeme radiální a polární komponenty magnetického pole vyjádřit ve tvaru

$$B_r = B_y \sin\theta + B_z \cos\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{r^3} \cos\theta, \quad (9.5.2)$$

$$B_\theta = B_y \cos\theta - B_z \sin\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \sin\theta. \quad (9.5.3)$$

Tudíž dipólové magnetické pole v Praze bude

$$\mathbf{B} = B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_r \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (\sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\cos\theta \hat{\mathbf{r}}). \quad (9.5.4)$$

Všimněme si podobnosti mezi tímto výrazem a polem elektrického dipólu \mathbf{p} . Viz řešený příklad 2.13.4):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (\sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\cos\theta \hat{\mathbf{r}}).$$

Záporné znaménko v (9.5.4) je způsobeno tím, že zemský magnetický dipól směřuje ve směru osy $-z$. Obecně magnetické pole vytvořené dipólovým momentem $\boldsymbol{\mu}$ je možné vyjádřit jako

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}. \quad (9.5.5)$$

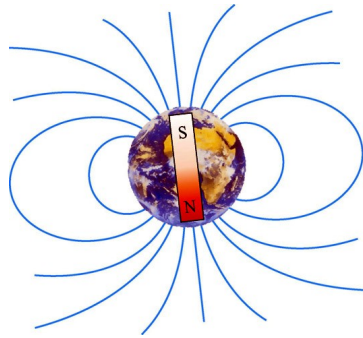
Poměr radiální a polární komponenty je dán

$$\frac{B_r}{B_\theta} = \frac{-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{r^3} \cos\theta}{-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \sin\theta} = 2 \cot\theta. \quad (9.5.6)$$

9.5.1 Zemské magnetické pole v Praze

Magnetické pole se chová podobně, jako by uvnitř Země byl ukrytý silný tyčový magnet. Na obrázku 9.5.2 je ve středu Země namalovaný pomyslný tyčový magnet orientovaný tak, aby vytvářel magnetické pole stejné jako je magnetické pole Země. Všimněme si, že jižní pól takového kompasu je na severní polokouli a tudíž přitahuje severní pól magnetických střelek kompasů.

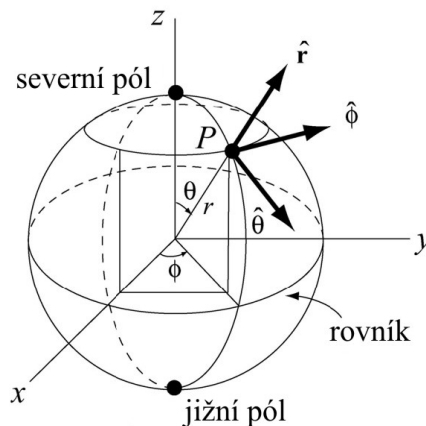
Pro popis bodu P na povrchu Země je nejpřirozenější užití sférických souřadnic (r, θ, φ) , kde r je vzdálenost od středu Země, θ je polární úhel od osy z a nabývá hodnot $0 \leq \theta \leq \pi$ a φ je azimutální úhel v rovině xy , měřený od osy x a nabývá hodnot $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (viz obrázek 9.5.3). Pokud fixujeme souřadnici $r = r_E$, na poloměru Země, bod P bude parametrizován dvěma úhly θ a φ .



Obr. 9.5.2: Magnetické pole Země.

V praxi tedy polohu na Zemi popisujeme dvěma čísly – zeměpisnou délkou a šířkou. Jak zeměpisná délka a šířka souvisí s θ a ϕ ? Zeměpisná šířka, označíme ji δ , je úhlová vzdálenost od roviny rovníku. Souvisí tedy s úhlem θ vztahem $\delta = 90^\circ - \theta$. S užitím této definice má rovník zeměpisnou šířku 0° , zatímco severní a jižní póly jsou na $\pm 90^\circ$ zeměpisné šířky.

Zeměpisná délka ϕ daného místa je jednoduše dána azimutálním úhlem užívaným ve sférických souřadnicích. Křivky konstantní zeměpisné délky se nazývají *poledníky*. Velikost zeměpisné délky je dána místem, kde odečítání začínáme. Z historických důvodů je poledník procházející Královskou astronomickou observatoří v Greenwichi ve Velké Británii označen jako „hlavní poledník“ s nulovou zeměpisnou délkou.



Obr. 9.5.3: Určení bodu P na povrchu Země za použití sférických souřadnic.

Nechť osa z je osou rotace Země a osa x prochází hlavním poledníkem. Odpovídající magnetický dipól Země pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_E &= \mu_E (\sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta_0 \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \mu_E (-0,062 \hat{\mathbf{i}} + 0,18 \hat{\mathbf{j}} - 0,98 \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

kde $\mu_E = 7,79 \times 10^{22} \text{ Am}^2$ a $(\theta_0, \phi_0) = (169^\circ, 109^\circ)$. Z výrazu vidíme, že $\boldsymbol{\mu}_E$ nevymizí v žádném ze tří směrů kartézských souřadnic.

Dále, poloha Prahy je 50° severní šířky a 15° východní délky (50° severně od rovníku a 15° východně od hlavního poledníku). To znamená, že $\theta_p = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ a $\phi_p = 15^\circ$. Tudíž polohový vektor Prahy můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{PRAHA}} &= r_E (\sin \theta_p \cos \phi_p \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta_p \sin \phi_p \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta_p \hat{\mathbf{k}}) \\ &= r_E (0,62 \hat{\mathbf{i}} + 0,17 \hat{\mathbf{j}} + 0,77 \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

Úhel mezi $-\boldsymbol{\mu}_E$ a $\mathbf{r}_{\text{PRAHA}}$ je dán

$$\theta_{\text{PE}} = \arccos\left(\frac{-\mathbf{r}_{\text{PRAHA}} \cdot \boldsymbol{\mu}_E}{|\mathbf{r}_{\text{PRAHA}}| \cdot |\boldsymbol{\mu}_E|}\right) = \arccos(0,76) = 40,3^\circ . \quad (9.5.9)$$

Poznamenejme, že úhel θ je definován jako $\theta = \arccos(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}})$, tj. inverzní funkce ke kosinu ze skalárního součinu jednotkových vektorů polohy $\hat{\mathbf{r}}$ a jednotkového vektoru $+\hat{\mathbf{k}}$ v *kladném* směru osy z tak, jak je znázorněné na obrázku 9.6.1. Tudiž poměr mezi radiální a polární komponentou zemského magnetického pole v Praze bude

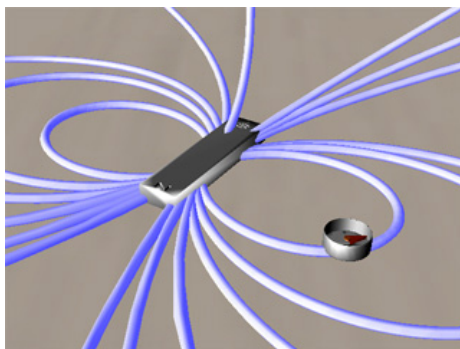
$$\boxed{\frac{B_r}{B_\theta} = 2 \cot 40^\circ \approx 2,38} . \quad (9.5.10)$$

Všimněme si, že kladný radiální směr míří ven od středu a kladný polární směr ukazuje směrem k rovníku.

S Interaktivní simulace 9.4: Tyčový magnet v magnetickém poli Země

Na obrázku 9.5.4 vidíme tyčový magnet a kompas umístěné na stole. Interakce mezi magnetickým polem tyčového magnetu a magnetickým polem Země je ilustrována pomocí silokřivek, které vycházejí ven z magnetu. Silokřivky, které vycházejí z okrajů magnetu, jsou obecně propojeny se silokřivkami opačného pólu. Silokřivky vycházející přímo z oblasti pólů se snaží odchýlit pryč a může dojít k rekonkci (přepojení) na silokřivky magnetického pole Země, které je v tomto případě přibližně homogenní se sklonem 60° od vodorovné roviny. Při pohledu na kompas zjistíme, že střílka vždy ukazuje ve směru místního pole. V tomto případě je místní pole ovlivněno zejména tyčovým magnetem.

Scénu v SHOCKWAVE simulaci můžete natáčet pomocí myši. Zoomovat lze tažením myši při stisknuté klávese CTRL.



Obr. 9.5.4: Tyčový magnet v magnetickém poli Země.

9.6 Magnetické materiály

V úvodu k magnetickým materiálům, prostředků ke studiu magnetizmu, jsme ve velmi odlišné situaci ve srovnání s materiály, které jsme uvažovali ke studiu elektrostatiky. Při klasifikování materiálů v elektrostatice jsme viděli, že jejich působení *vždy* vedlo k redukci, tj. zeslabení elektrického pole \mathbf{E} , což bylo dáno množstvím „volných“ elektrických nábojů. Na rozdíl od toho, při třídění magnetických materiálů zjistíme, že se mohou chovat jedním z následujících případů

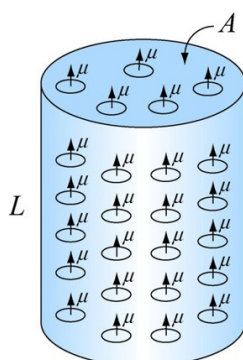
- (i) snižují pole \mathbf{B} díky určitému množství „volných“ proudů (takové materiály nazýváme *diamagnetické*).

- (ii) zvyšují pole \mathbf{B} nepatrně (materiály nazýváme *paramagnetické*)
- (iii) značně zvýší pole \mathbf{B} (materiály *feromagnetické*)

Dále popíšeme, jak k těmto jevům může dojít.

9.6.1 Magnetizace

Magnetické materiály se skládají z velkého množství permanentních nebo indukovaných magnetických dipólů. Jedna z představ důležitých pro porozumění magnetickým materiálům je střední magnetické pole produkované mnoha navzájem uspořádanými magnetickými dipóly. Předpokládejme, že máme kousek materiálu ve tvaru dlouhého válce s podstavou A a výškou L , a který obsahuje N magnetických dipólů, každý s magnetickým dipólovým momentem μ . Magnetické dipóly jsou rovnoměrně rozptýleny v objemu válce tak, jak je znázorněno na obrázku 9.6.1.



Obr. 9.6.1: Válec s N magnetickými dipólovými momenty.

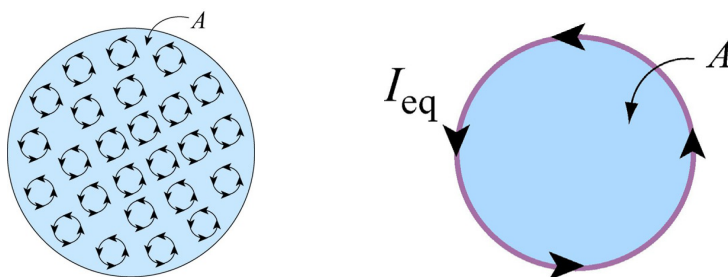
Předpokládejme také, že všechny magnetické dipólové momenty μ jsou orientovány shodně podél osy válce. Jaké bude magnetické pole vytvořené těmito samotnými dipóly při absenci jakéhokoliv vnějšího pole?

Před odpovědí na tuto otázku si uvědomme, že každý magnetický dipól je obklopen svým vlastním magnetickým polem. Definujme nyní vektor magnetizace \mathbf{M} jako součet všech magnetických dipólů v jednotce objemu:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mu_i, \quad (9.6.1)$$

kde V je objem. V případě našeho válce, kde jsou všechny dipóly orientovány stejně, je velikost \mathbf{M} dána jednoduše $M = N\mu/AL$.

A nyní, co je střední magnetické pole tvořené všemi dipóly ve válci?



Obr. 9.6.2: Nalevo – pohled shora na váleček obsahující magnetické dipólové momenty. Napravo – odpovídající elektrický proud.

Obrázek 9.6.2 nalevo ukazuje malé proudové smyčky provázané s dipólovými momenty. Směry proudů smyček znázorňují šipky. Vidíme, že uvnitř válce se tok proudu v jednom směru zcela vyruší s proudem tekoucím v protisměru v sousední smyčce. Jediné místo, kde ke vzájemnému vyrušení nedojde je v blízkosti okraje válce, kde proudové smyčky již s žádnými nesousedí. Tudíž uvnitř válce jakékoliv proudy vymizí, zatímco na jeho obvodu se „objeví“ nenulový proud. Situace je znázorněna na obrázku 9.6.2 napravo, kde po obvodu je vyznačen ekvivalentní proud I_{eq} .

Tvar proudu I_{eq} může být odvozen z požadavku, že magnetický dipólový moment vytvořený proudem I_{eq} musí být stejný, jako je celkový magnetický dipólový moment systému. Tato podmínka nám dá

$$I_{\text{eq}}A = N\mu \quad (9.6.2)$$

nebo

$$I_{\text{eq}} = \frac{N\mu}{A} . \quad (9.6.3)$$

Nyní spočítáme magnetické pole vytvořené proudem I_{eq} . S proudem I_{eq} tekoucím po obvodu máme stejnou konfiguraci jako v případě solenoidu, kterým protéká povrchový proud (nebo proud na jednotku délky) K . Tyto dvě hodnoty souvisí jednoduchým vztahem

$$K = \frac{I_{\text{eq}}}{L} = \frac{N\mu}{AL} = M . \quad (9.6.4)$$

Tudíž vidíme, že povrchový proud K je ekvivalentní magnetizaci M , která je středním magnetickým dipólovým momentem na jednotku objemu. Střední magnetické pole produkované ekvivalentním proudem I_{eq} systému je (viz kapitolu 9.4)

$$B_M = \mu_0 K = \mu_0 M . \quad (9.6.5)$$

Protože směr magnetického pole je *stejný* jako magnetizace \mathbf{M} , předchozí výraz můžeme psát jako

$$\mathbf{B}_M = \mu_0 \mathbf{M} . \quad (9.6.6)$$

Je to přesný opak proti elektrickému dipólu, kdy střední elektrické pole je antiparalelní (směřující opačným směrem) než směry samotných dipólových momentů. Příčina je ta, že v oblasti vnitřku vzorku je směr magnetických dipólových momentů *stejný* jako směr magnetického pole. A tedy nás nemůže překvapit, že po vystředování přes velký objem bude střední magnetické pole také směřovat rovnoběžně a stejným směrem jako střední magnetický dipólový moment objemové jednotky.

Povšimněte si, že magnetické pole v rovnici (9.6.6) je *střední*, tj. *průměrné* pole všech dipólů. Můžeme však pozorovat velmi odlišný výsledek, pokud budeme sledovat pole ve velké blízkosti těchto jednotlivých malých dipólů.

A nyní se podívejme na vlastnosti různých magnetických materiálů.

9.6.2 Paramagnetismus

Atomy nebo molekuly, které obsahují paramagnetické materiály, mají permanentní magnetický dipólový moment. Na druhou stranu, permanentní magnetické dipóly v paramagnetických materiálech nebývají nikdy srovnány spontánně. Při absenci nějakého vnějšího magnetického pole jsou uspořádány zcela náhodně. Tudíž $\mathbf{M} = 0$ a střední magnetické pole \mathbf{B}_M je také nulové. Nicméně v případě, že umístíme paramagnetický materiál

do vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_0 , pocítí jednotlivé dipóly točivý moment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$, který se snaží stočit $\boldsymbol{\mu}$ do směru \mathbf{B}_0 , a tudíž vytvoří magnetizaci \mathbf{M} rovnoběžnou se směrem \mathbf{B}_0 . Protože \mathbf{B}_M je paralelní s \mathbf{B}_0 , bude mít tendenci *zvětšit* \mathbf{B}_0 . Celkové magnetické pole je potom součet těchto polí:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} . \quad (9.6.7)$$

Všimněme si, jaký je to rozdíl od případu dielektrických materiálů. V obou případech způsobí točivý moment srovnání dipólových vektorů paralelně s vnějším polem. Nicméně v případě paramagnetika, uspořádání způsobí *nárůst* externího magnetického pole, v případě dielektrika vnější pole *zeslabí*. V mnoha paramagnetických materiálech není magnetizace \mathbf{M} ve stejném směru jako \mathbf{B}_0 , ale je také přímo úměrná velikosti pole \mathbf{B}_0 . Je to zřejmé, protože bez vnějšího pole \mathbf{B}_0 by nenastalo uspořádání dipólů, a tudíž by nebyla magnetizace \mathbf{M} . Lineární závislost mezi \mathbf{M} a \mathbf{B}_0 je dána výrazem

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} , \quad (9.6.8)$$

kde χ_m je bezrozměrná veličina nazvaná *magnetická susceptibilita*. Rovnici (9.6.7) pak můžeme přepsat

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mathbf{B}_0 = \kappa_m \mathbf{B}_0 , \quad (9.6.9)$$

kde

$$\kappa_m = 1 + \chi_m \quad (9.6.10)$$

je *relativní permeabilita* materiálu. Pro paramagnetické materiály je $\kappa_m > 1$, nebo ekvivalentně, $\chi_m > 0$, ačkoliv χ_m je obvykle řádově 10^{-6} až 10^{-3} . *Magnetická permeabilita* μ_m materiálu může být také definována jako

$$\mu_m = (1 + \chi_m) \mu_0 = \kappa_m \mu_0 . \quad (9.6.11)$$

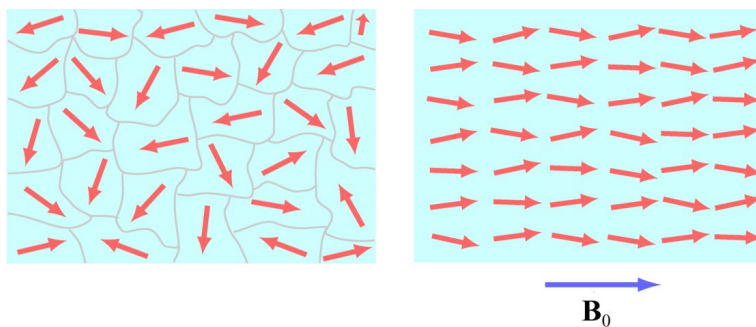
Paramagnetické materiály mají $\mu_m > \mu_0$.

9.6.3 Diamagnetismus

V případě magnetických materiálů, které neobsahují žádné permanentní magnetické dipóly, vyvolá v jeho atomech nebo molekulách přítomnost vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_0 indukovaný magnetický dipólový moment. Nicméně tyto indukované magnetické dipóly jsou antiparalelní k \mathbf{B}_0 , což způsobí, že magnetizace \mathbf{M} a stření pole \mathbf{B}_M bude také antiparalelní k \mathbf{B}_0 . Tudíž velikost celkového magnetického pole bude *nižší*. I v případě diamagnetických materiálů můžeme stále definovat magnetickou permeabilitu, ačkoliv nyní je $\kappa_m < 1$, nebo $\chi_m < 0$ a χ_m je obvykle řádově -10^{-5} až -10^{-9} . Pro diamagnetické materiály platí $\mu_m < \mu_0$.

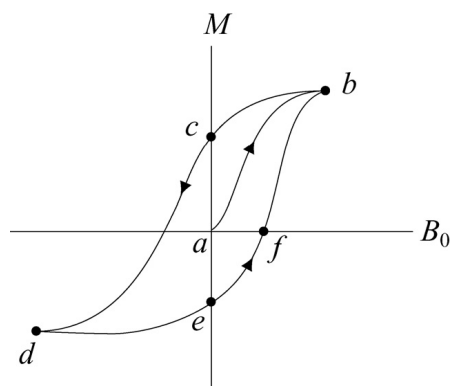
9.6.4 Feromagnetismus

Ve feromagnetických materiálech je silná interakce mezi sousedními atomickými dipólovými momenty. Feromagnetické materiály sestávají z mnoha polí nazývaných *domény* tak, jak vidíme na ilustraci 9.6.3 (nalevo). Po zapnutí vnějšího pole \mathbf{B}_0 budou mít elementární magnetické dipóly snahu se uspořádat ve směru vnějšího pole (obrázek 9.6.3 napravo). Silná interakce mezi sousedními atomickými dipólovými momenty způsobí *mnohem silnější* uspořádání magnetických dipólů než v paramagnetických materiálech.



Obr. 9.6.3: *Napravo* – feromagnetické domény. *Nalevo* – uspořádání magnetických momentů ve směru vnějšího pole \mathbf{B}_0 .

Nárůst aplikovaného vnějšího pole pak může být velmi výrazný, magnetické pole uvnitř feromagnetika je 10^3 až 10^4 vyšší než vnější pole. Permeabilita κ_m feromagnetik není konstanta, protože ani celkové pole \mathbf{B} , ani magnetizace \mathbf{M} nerostou lineárně s \mathbf{B}_0 . Ve skutečnosti vztah mezi \mathbf{M} a \mathbf{B}_0 není jednoznačný, ale závisí na historii materiálu. Tento jev je známý jako *hystereze*. Změna \mathbf{M} jako funkce vnějšího pole \mathbf{B}_0 je ukázána na obrázku 9.6.4. Křivka *abcdef* se nazývá *hysterezní smyčka*.



Obr. 9.6.4: Hysterezní smyčka.

Navíc ve feromagnetikách může silná interakce mezi sousedními dipólovými momenty tyto dipólové momenty udržet uspořádané i v době, kdy vnější pole je již nulové. Tyto uspořádané dipólové momenty pak samy budou vytvářet silné magnetické pole i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole. Takto vznikají permanentní magnety. Pro představu jak silné mohou tyto magnety být, si musíme uvědomit fakt, že magnetické dipólové momenty atomů mají typickou velikost řádově $10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$. Typická hustota atomů je $10^{29} \text{ atomů}/\text{m}^3$. Jestliže by všechny tyto dipólové momenty byly uspořádané, pak by magnetizace nabyla velikosti

$$M \sim (10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2)(10^{29} \text{ atomů}/\text{m}^3) \sim 10^6 \text{ A}/\text{m}. \quad (9.6.12)$$

Tato magnetizace samotných atomárních proudů odpovídá hodnotě magnetického pole $\mathbf{B}_M = \mu_0 \mathbf{M}$ řádově 1 Tesla nebo 10 000 Gaussů. To je důvod, proč máme permanentní magnety s polem řádově 2 200 Gaussů.

9.7 Shrnutí

- **Biotův-Savartův zákon** uvádí, že stejnosměrný proud I tekoucí elementem délky ds v místě \mathbf{r} generuje magnetické pole $d\mathbf{B}$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \mathbf{r}}{r^2},$$

kde $r = |\mathbf{r}|$ a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$ je permeabilita vakua.

- Velikost magnetického pole ve vzdálenosti r od nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem I je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

- Velikost magnetické síly mezi dvěma přímými vodiči protékanými proudy I_1 a I_2 vzdálenými od sebe l je

$$F_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$

- **Ampérův zákon** říká, že křivkový integrál $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ přes jakoukoliv uzavřenou křivku je úměrný celkovému proudu procházejícímu jakoukoliv plochou, která je danou křivkou ohraničená:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{uz}.$$

- Magnetické pole uvnitř **toroidu**, který má N těsných závitů vodiče protékaného proudem I , je dáno

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r},$$

kde r je vzdálenost od středu toroidu.

- Magnetické pole uvnitř **solenoidu** sestávajícího z N těsných závitů vodiče protékaného proudem I , je dáno vztahem

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I,$$

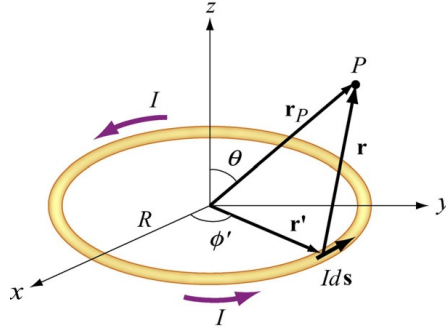
kde n je počet závitů na jednotku délky.

Vlastnosti magnetických materiálů jsou

Materiál	Magnetická susceptibilita χ_m	Relativní permeabilita $\kappa_m = 1 + \chi_m$	Magnetická permeabilita $\mu_m = \kappa_m \mu_0$
Diamagnetikum	$-10^{-5} \div -10^{-9}$	$\kappa_m < 1$	$\mu_m < \mu_0$
Paramagnetikum	$10^{-5} \div 10^{-3}$	$\kappa_m > 1$	$\mu_m > \mu_0$
Feromagnetikum	$\chi_m \gg 1$	$\kappa_m \gg 1$	$\mu_m \gg \mu_0$

9.8 Dodatek 1: Magnetické pole mimo osu symetrie proudové smyčky

V příkladu 9.2 jsme počítali magnetické pole buzené kruhovou smyčkou o poloměru R ležící v rovině xy , kterou protéká proud I . Pole jsme počítali v bodě P ležícím na ose symetrie. Nyní použijme stejný postup, ale rozšíříme problém na výpočet pole mimo osu symetrie proudové smyčky v rovině yz .



Obr. 9.8.1: Výpočet magnetického pole mimo osu symetrie proudové smyčky.

Jak bylo ukázáno v příkladě 9.1, elementární přírůstek proudu je dán vztahem

$$I ds = R d\phi' (-\sin\phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos\phi' \hat{\mathbf{j}})$$

a jeho poloha je popsána polohovým vektorem $\mathbf{r}' = R(\cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + \sin\phi' \hat{\mathbf{j}})$. Bod P nyní leží v rovině yz , $\mathbf{r}_p = y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, jak vidíme na obrázku 9.8.1. Odpovídající polohový vektor bude

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}' = -R \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + (y - R \sin\phi') \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad (9.8.1)$$

jeho velikost bude

$$r = |\mathbf{r}'| = \sqrt{(-R \cos\phi')^2 + (y - R \sin\phi')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin\phi'} \quad (9.8.2)$$

a jednotkový vektor

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'}{r} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|}$$

míří od $I ds$ do P . Vektorový součin $ds \times \hat{\mathbf{r}}$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} ds \times \hat{\mathbf{r}} &= R d\phi' (-\sin\phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos\phi' \hat{\mathbf{j}}) \times [-R \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + (y - R \sin\phi') \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}] \\ &= R d\phi' [z \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + (R - y \sin\phi') \hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

Užitím Biotova-Savartova zákona dostaneme příspěvek proudového elementu magnetickému poli v místě P

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + (R - y \sin\phi') \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin\phi')^{3/2}}. \quad (9.8.4)$$

Magnetické pole v P tedy bude

$$\mathbf{B}(0, y, z) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + (R - y \sin \phi') \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}} d\phi'. \quad (9.8.5)$$

X-ová komponenta \mathbf{B} je zřejmě rovná nule:

$$B_x = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}} = 0. \quad (9.8.6)$$

Výsledek snadno obdržíme pomocí substituce $w = R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi'$. Tento výsledek je také patrný z důvodů symetrie: příspěvek ϕ' se vyruší s příspěvkem $\pi - \phi'$. Na druhou stranu y-ová a z-ová složka pole \mathbf{B}

$$B_y = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}}, \quad (9.8.7)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R - y \sin \phi') d\phi'}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}} \quad (9.8.8)$$

vede na *eliptické integrály*, které se dají řešit numericky.

V limitě $y = 0$, je příspěvek pole v bodě P umístěný na ose z a obdržíme výsledek stejný jako v příkladu 9.2:

$$B_y = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}} = \left[\frac{\mu_0 IRz}{4\pi} \cos \phi' \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (9.8.9)$$

a

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (9.8.10)$$

Nyní uvažujme „bodový dipól“, limitu, kde $R \ll (y^2 + z^2)^{1/2} = r$, tj. charakteristická velikost proudové smyčky je mnohem menší ve srovnání se vzdáleností, ve které pozorujeme magnetické pole. V této limitě můžeme jmenovatel v integrálu rozvinout

$$\begin{aligned} (R^2 + y^2 + z^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2} &= \frac{1}{r^3} \left[1 + \frac{(R^2 - 2yR \sin \phi')^{3/2}}{r^2} \right]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(R^2 - 2yR \sin \phi')}{r^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (9.8.11)$$

To vede k výsledku

$$\begin{aligned}
B_y &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rz}{r^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(R^2 - 2yR \sin \phi')}{r^2} \right] \sin \phi' d\phi' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{3R^2 yz}{r^5} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi' d\phi' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{3\pi R^2 yz}{r^5}
\end{aligned} \tag{9.8.12}$$

a poslední komponenta pole bude

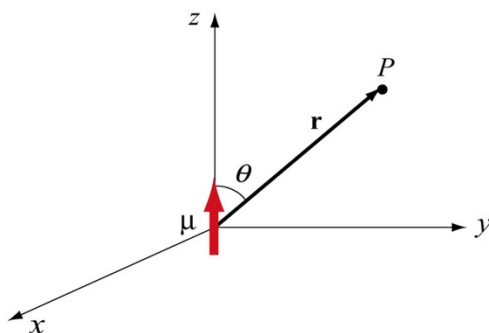
$$\begin{aligned}
B_z &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(R^2 - 2yR \sin \phi')}{r^2} \right] (R - y \sin \phi') d\phi' = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_0^{2\pi} \left[\left(R - \frac{3R^3}{2r^2} \right) - \left(1 - \frac{9R^2}{2r^2} \right) \sin \phi' - \frac{3Ry^2}{r^2} \sin^2 \phi' \right] d\phi' = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \left[2\pi \left(R - \frac{3R^3}{2r^2} \right) - \left(1 - \frac{3\pi Ry^2}{r^2} \right) \right] = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi R^2}{r^3} \left[2 - \frac{3y^2}{r^2} + \text{členy vyšších řádů} \right]
\end{aligned} \tag{9.8.13}$$

Veličina $I(\pi R^2)$ je magnetický dipólový moment $\mu = IA$, kde $A = \pi R^2$ je plocha smyčky. Za použití sférických souřadnic, kde $y = r \sin \theta$ a $z = r \cos \theta$, můžeme nenulové složky pole přepsat na

$$B_y = \frac{\mu_0 (I\pi R^2)}{4\pi} \frac{3(r \sin \theta)(r \cos \theta)}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu \sin \theta \cos \theta}{r^3}, \tag{9.8.14}$$

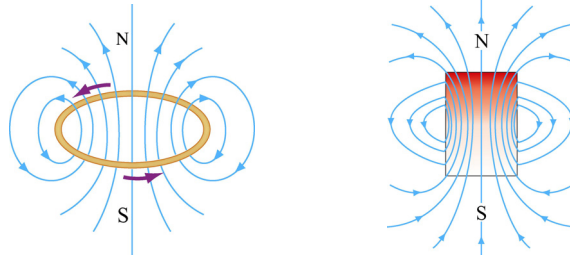
$$B_z = \frac{\mu_0 (I\pi R^2)}{4\pi} \frac{r^2}{r^3} \left(2 - \frac{3r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (2 - r \sin^2 \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \tag{9.8.15}$$

A tudíž vidíme, že magnetické pole v bodě $r \gg R$ vytvořené proudovým prstencem lze aproximovat jako pole malého magnetického dipólu umístěného v počátku souřadnic (obrázek 9.8.2).



Obr. 9.8.2: Magnetický dipólový moment $\mu = \mu \hat{k}$.

Silokřivky magnetického pole okolo proudové smyčky a dipólového momentu (malého tyčového magnetu) jsou znázorněny na obrázku 9.8.3.



Obr. 9.8.3: Silokřivky magnetického pole okolo proudové smyčky (nalevo) a malého tyčového magnetu (napravo).

Magnetické pole v bodě P můžeme také psát ve sférických souřadnicích

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} . \quad (9.8.16)$$

Sférické komponenty B_r a B_θ souvisí s kartézskými komponentami B_y a B_z takto

$$B_r = B_y \sin \theta + B_z \cos \theta , \quad B_\theta = B_y \cos \theta - B_z \sin \theta . \quad (9.8.17)$$

Pro jednotkové vektory platí

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} , \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} . \quad (9.8.18)$$

S užitím těchto vztahů můžeme sférické komponenty vyjádřit jako

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I R^2 \cos \theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{(R^2 + r^2 - 2rR \sin \theta \sin \phi')^{3/2}} \quad (9.8.19)$$

a

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r \sin \phi' - R \sin \theta) d\phi'}{(R^2 + r^2 - 2rR \sin \theta \sin \phi')^{3/2}} . \quad (9.8.20)$$

V limitě, kdy $R \ll r$, obdržíme

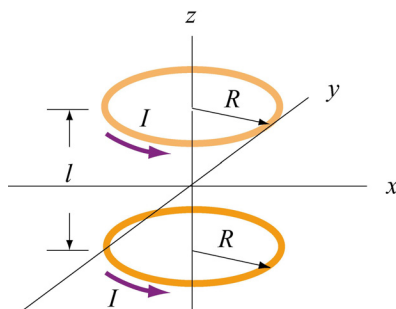
$$B_r \approx \frac{\mu_0 I R^2 \cos \theta}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I R^2 \cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3} \quad (9.8.21)$$

a

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r \sin \phi' - R \sin \theta) d\phi'}{(R^2 + r^2 - 2rR \sin \theta \sin \phi')^{3/2}} \\ &\approx \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \left[-R \sin \theta \left(1 - \frac{3R^2}{2r^2} \right) + \left(r - \frac{3R^2 + 3R^2 \sin \theta}{2r} \right) \sin \phi' + 3R \sin \theta \sin^2 \phi' \right] d\phi' \\ &\approx \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} (-2\pi R \sin \theta + 3\pi R \sin \theta) = \frac{\mu_0 (I\pi R^2) \sin \theta}{4\pi r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \sin \theta}{r^3} \end{aligned} \quad (9.8.22)$$

9.9 Dodatek 2: Helmholtzovy cívky

Uvažujme dvě cívky s N závitů, poloměry R , každá je kolmá k ose symetrie a jejich středy jsou umístěny v $z = \pm l/2$. Oběma cívkami protéká stejnosměrný proud ve stejném směru, jak je znázorněné na obrázku 9.9.1. Nalezněme magnetické pole \mathbf{B} na ose ve vzdálenosti z od středu jedné cívky.

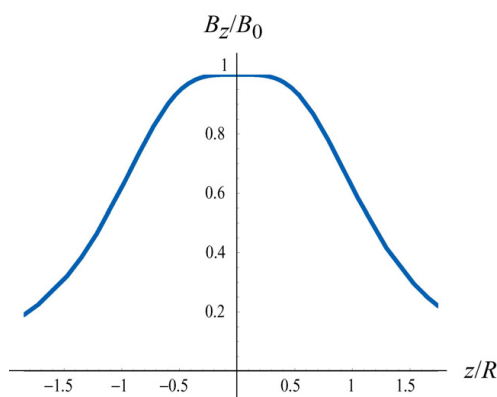


Obr. 9.9.1: Helmholtzovy cívky.

Užitím výsledků ukázaných v příkladu 9.2 pro jednu cívku a aplikováním principu superpozice, magnetické pole v místě $P(z, 0)$ (bod ve vzdálenosti $z-l/2$ od centra jedné a $z+l/2$ od středu druhé cívky) pro obě cívky bude

$$B_z = B_{\text{horní}} + B_{\text{spodní}} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{\left[(z-l/2)^2 + R^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[(z+l/2)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right]. \quad (9.9.1)$$

Průběh B_z/B_0 , kde $B_0 = \mu_0 N I / (5/4)^{3/2} R$ je velikost pole v místě $z = 0$ a $l = R$, je znázorněn na obrázku 9.9.2



Obr. 9.9.2: Magnetické pole jako funkce z/R .

Podívejme se na vlastnosti pole B_z detailněji. Derivováním B_z podle z obdržíme

$$B'_z = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left\{ -\frac{3(z-l/2)}{\left[(z-l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} - \frac{3(z+l/2)}{\left[(z+l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} \right\}. \quad (9.9.2)$$

Snadno se přesvědčíme, že v centru v bodě $z = 0$ je derivace nulová:

$$\left. \frac{dB}{dz} \right|_{z=0} = 0 . \quad (9.9.3)$$

Po další derivaci obdržíme

$$B_z''(z) = \frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{N\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{3}{\left[(z-l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} + \frac{15(z-l/2)^2}{\left[(z-l/2)^2 + R^2 \right]^{7/2}} - \frac{3}{\left[(z+l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} + \frac{15(z+l/2)^2}{\left[(z+l/2)^2 + R^2 \right]^{7/2}} \right\} . \quad (9.9.4)$$

V centru v bodě $z = 0$ se předchozí výraz zjednoduší na

$$B_z''(0) = \left. \frac{d^2 B}{dz^2} \right|_{z=0} = \frac{N\mu_0 I}{2} \left\{ \frac{6}{\left[(l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} + \frac{15l^2}{2 \left[(l/2)^2 + R^2 \right]^{7/2}} \right\} = \\ = -\frac{\mu_0 N I}{2} \frac{6(R^2 - l^2)}{\left[(l/2)^2 + R^2 \right]^{7/2}} . \quad (9.9.5)$$

Vidíme, že podmínka, kdy druhá derivace B_z bude rovna nule, nastane v $z = 0$ pro $l = R$. To znamená, že vzdálenost mezi oběma cívkami je rovna jejich poloměru. Konfigurace s $l = R$ je známá jako *Helmholtzovy cívky*.

Pro malá z budeme mít Taylorův rozvoj pole $B_z(z)$ okolo $z = 0$:

$$B_z(z) = B_z(0) + B_z'(0)z + \frac{1}{2!} B_z''(0)z^2 + \dots \quad (9.9.6)$$

Z faktu, že první dvě derivace v $z = 0$ vymizí, vyplývá, že magnetické pole je v malé oblasti okolo $z = 0$ téměř homogenní. Stejně snadno lze ukázat, že i třetí derivace $B_z'''(0) = 0$.

Připomeňme si, že síla působící na dipól v magnetickém poli je $\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$. Jestliže umístíme magnetický dipól $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ do $z = 0$, bude magnetická síla působící na dipól

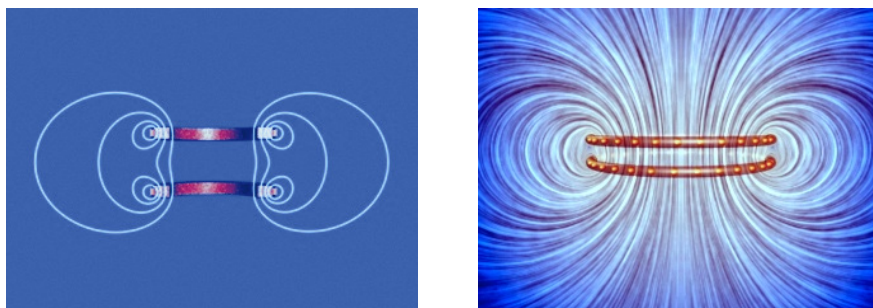
$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (9.9.7)$$

velmi malá, protože je zde magnetické pole téměř homogenní.

V Animace 9.5: Magnetické pole Helmholtzových cívek

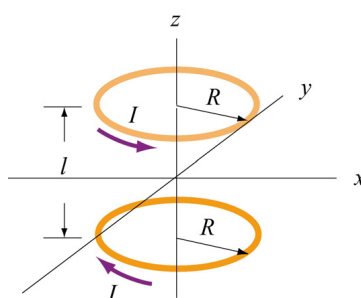
Animace na obrázku 9.9.3 (nalevo) ukazuje magnetické pole Helmholtzových cívek. V této konfiguraci protéká proud v horní a spodní cívce stejným směrem a tudíž jejich dipólové momenty jsou souhlasně uspořádány. Magnetické pole od obou cívek se sčítá a jeho průběh je ve středu mezi cívkami téměř homogenní. Poněvadž je vzdálenost mezi cívkami stejná jako je velikost jejich poloměrů a zůstává neměnná, vytváří přitažlivá síla mezi nimi tah znázorněný

silokřivkami pole, které se natahují tak, aby uzavřely obě cívky. Pokud by vzdálenost mezi cívkami nebyla neměnná (tento případ je znázorněn animací 9.9.3 napravo), budou se obě cívky díky přitažlivé síle pohybovat směrem k sobě navzájem. Na této animaci protéká vrchní cívkou poloviční proud, než protéká spodní. Silokřivky jsou znázorněny metodou šumové textury.



Obr. 9.9.3: *Nalevo* – magnetické pole Helmholtzových cívek, jejichž vzájemná vzdálenost je stejná jako jejich poloměr. ***Napravo*** – dvě sousedé vodivé smyčky protékané proudem ve stejném směru. Smyčky se navzájem přitahují.

Nyní ukažme případ, kdy proudy protékají oběma smyčkami v opačných směrech tak, jak je znázorněno na obrázku 9.9.4.

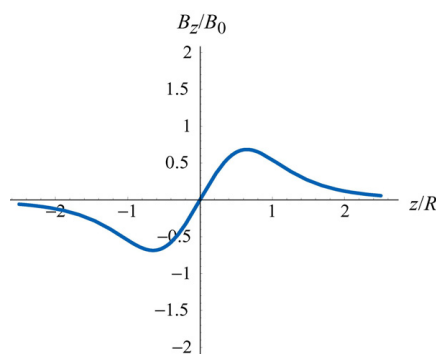


Obr. 9.9.4: Dvě kruhové smyčky, kterými protékají proudy v opačných směrech.

Stejně jako v předchozím případě, po užití principu superpozice obdržíme celkové pole v bodě $P(0, 0, z)$, kde $z > 0$

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{\left[(z - l/2)^2 + R^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(z + l/2)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right]. \quad (9.9.8)$$

Závislost B_z/B_0 , kde $B_0 = \mu_0 N I / 2R$ je velikost pole v místě $z = 0$ a $l = R$, je znázorněn na obrázku 9.9.5.



Obr. 9.9.5: Magnetické pole jako funkce z/R .

Derivaci B_z podle z obdržíme

$$B'_z = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left\{ \frac{3(z-l/2)}{\left[(z-l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} + \frac{3(z+l/2)}{\left[(z+l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} \right\}. \quad (9.9.9)$$

V bodu v prostřed mezi oběma cívkami $z = 0$, máme

$$B'_z(0) = \left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=0} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \frac{3l}{\left[(l/2)^2 + R^2 \right]^{5/2}} \neq 0. \quad (9.9.10)$$

Tudíž na magnetický dipól $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ umístěný v $z = 0$ bude působit síla

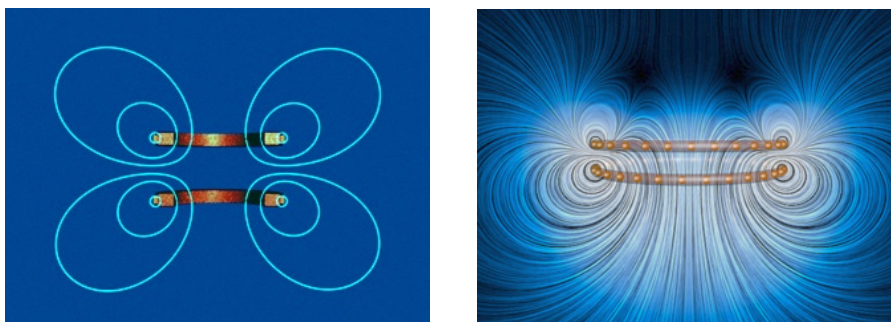
$$\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mu_z \cdot B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z(0)}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_z \mu_0 N I R^2}{2} \frac{3l}{\left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{5/2}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.9.11)$$

Pro $l = R$, se předchozí výraz zjednoduší na

$$\mathbf{F}_B = \frac{3\mu_z \mu_0 N I}{2(5/4)^{5/2} R^2} \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.9.12)$$

V Animace 9.6: Magnetické pole dvou cívek, protékáných opačným proudem

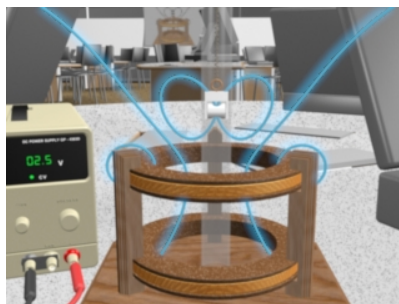
Animace zachycená na obrázku 9.9.6 ukazuje magnetické pole dvou cívek stejných, jako byly Helmholtzovy, ale nyní jimi protékají proudy navzájem v opačných směrech. V takovémto případě jsou magnetické dipólové momenty příslušných cívek antiparalelní.



Obr. 9.9.6: *Nalevo* – magnetické pole dvou cívek, jimiž protékají proudy v opačných směrech. *Napravo* – dvě sousední smyčky, kterými protékají navzájem opačné proudy, a které se proto navzájem odpuzují. Konfigurace polí je zde znázorněna metodou šumové textury. Spodní smyčkou protéká proud dvakrát větší, než horní.

V centru mezi oběma cívkami na ose symetrie je magnetické pole nulové. S danou fixní vzdáleností mezi oběma cívkami mezi nimi vzniká odpuzivá síla jako důsledek magnetického tlaku. To je znázorněno jako zhuštění siločar pole podél centrální vodorovné osy mezi cívkami.

V Animace 9.7: Síly mezi sousými vodiči, kterými protéká proud

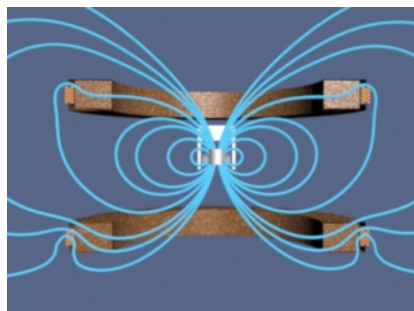


Obr. 9.9.7: Magnet přístroje TeachSpin™ interagující s magnetickým polem proudové smyčky. Severní pól magnetu směřuje směrem dolů.

Obrázek 9.9.7 ukazuje odpudivou sílu mezi magnetickým polem permanentního magnetu a prstencem přístroje TeachSpin™, kterým prochází proud. Magnet je připevněn tak, že jeho severní pól míří směrem dolů. Proud procházející horní smyčkou přístroje protéká při pohledu shora proti směru hodinových ručiček. Celkovým výsledkem je odpudivá síla mezi magnetem a smyčkou. Vizualizace ukazuje pnutí siločivky přenášená poli magnetu a proudové smyčky.

V Animace 9.8: Magnet oscilující mezi dvěma cívkami

Obrázek 9.9.8 ukazuje snímek animace, ve které si můžeme prohlédnout magnetické pole permanentního magnetu umístěného v přístroji TeachSpin™ a magnetické pole dvou cívek protékaných proudy. Zobrazen je svislý řez zařízením.



Obr. 9.9.8: Oscilace magnetu mezi dvěma cívkami.

Magnet je orientován severním pólem vzhůru a proud v obou závitech je sinusový s fázovým posuvem 180° . V okamžiku, kdy efektivní dipólový moment horní cívky míří nahoru, míří dipólový moment dolní cívky dolů. Magnet je proto přitahován horním závitem a odpuzován dolním závitem, což způsobuje pohyb směrem vzhůru. V druhé polovině cyklu se podmínky obrátí a magnet se proto pohybuje dolů.

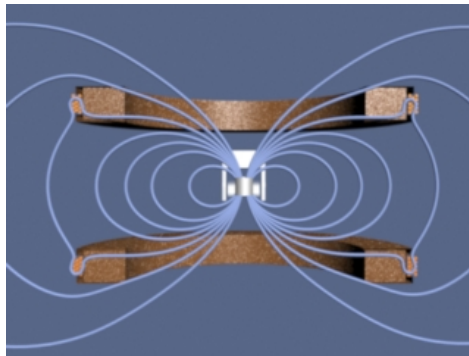
Proces může být také popsán pomocí podélného tahu a příčného tlaku magnetických siločivky. Pokud je dipólový moment jednoho ze závitů orientován shodně s magnetem, vzniká tah siločivky (podélný gradient tlaku), který se snaží „spojit“ magnet a závit. Naopak, pokud jsou dipólové momenty magnetu a závitu orientovány opačně, vzniká gradient tlaku kolmý na siločivky, který se snaží magnet a závit vzdálit.

V Animace 9.9: Magnet zavěšený mezi dvěma závity

Obrázek 9.9.9 ukazuje animaci, ve které si můžete prohlédnout magnetické pole permanentního magnetu umístěného mezi dvěma závity protékanými elektrickým proudem. Zobrazen je svislý řez zařízením. Magnet je orientován severním pólem vzhůru a proud

v obou závitech je sinusový a ve fázi. V okamžiku, kdy efektivní dipólový moment horní cívky míří nahoru, míří dipólový moment dolní cívky také nahoru. Magnet je proto přitahován oběma závity a výslednice sil je nulová. V experimentu ovšem vzniká točivý moment, který není znázorněn, protože je magnet uměle udržován ve svislém směru. V druhé polovině cyklu se podmínky obrátí a magnet je odpuzován oběma závity, což opětovně vede na nulovou výslednici sil.

Proces může být také popsán pomocí podélného tahu a příčného tlaku magnetických silokřivek. Pokud je dipólový moment závitů orientován shodně s magnetem, vzniká tah silokřivek (podélný gradient tlaku), protože jsou natahovány na obě strany. Naopak, pokud jsou dipólové momenty magnetu a závitů orientovány opačně, vzniká gradient tlaku kolmý na silokřivky, a ty jsou stlačovány z obou stran.



Obr. 9.9.9: Magnet zavěšený mezi dvěma cívkami.

9.10 Algoritmy řešení úloh

V této kapitole se podíváme, jak lze užít Biotův-Savartův a Ampérův zákon k výpočtu magnetického pole, jehož zdrojem je elektrický proud.

9.10.1 Biotův-Savartův zákon

Tento zákon nám říká, že magnetické pole v bodě P generované proudem I tekoucím délkovým elementem ds umístěným v \mathbf{r} bude dáno

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

Výpočet magnetického pole může být proveden následovně:

- (1) *Místo zdroje:* Vyberte vhodný souřadnicový systém a запиšte výraz pro diferenciální proudový element $I d\mathbf{s}$ a vektor \mathbf{r}' , popisující polohu elementu $I d\mathbf{s}$. Velikost $r' = |\mathbf{r}'|$ je vzdálenost mezi $I d\mathbf{s}$ a počátkem. Proměnnými s čárkou značíme bod zdroje.
- (2) *Bod pole:* Bod pole P je bod v prostoru, ve kterém počítáme magnetické pole dané rozdělením proudů. S použitím stejného souřadného systému zapíšeme polohový vektor \mathbf{r}_P bodu P . Velikost $r_P = |\mathbf{r}_P|$ je vzdálenost mezi bodem P a počátkem.
- (3) *Relativní polohový vektor:* Relativní polohový vektor mezi místem zdroje pole a bodem pole je daný vektorem $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'$. Odpovídající jednotkový vektor je

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} ,$$

kde $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|$ je vzdálenost mezi zdrojem a bodem P , kde sledujeme pole.

- (4) Spočítejte vektorový součin $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ nebo $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$. Výsledný vektor nám udává směr magnetického pole \mathbf{B} v soulase s Biotovým-Savartovým zákonem.
- (5) Dosadte do výrazu pro $d\mathbf{B}$ a pokuste se co možná nejvíce zjednodušit zápis.
- (6) Jestli to bude možné, provedme integraci pro výsledné \mathbf{B} . Velikost nebo geometrie systému je zahrnuta v mezích integrace. Někdy záměna proměnných může pomoci v uskutečnění integrace.

Dále ilustrujme, k jakým výsledkům vedou tyto kroky v případě lineárního vodiče délky L a proudové smyčky o poloměru R .

Konfigurace	Konečný drát délky L	Kruhová smyčka s poloměrem R
Obrázek		
(1) Bod zdroje	$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}}$ $d\mathbf{s} = (dr'/dx')dx' = dx'\hat{\mathbf{i}}$	$\mathbf{r}' = R(\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi'\hat{\mathbf{j}})$ $d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'}d\phi' = R d\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}})$
(2) Bod pole	$\mathbf{r}_p = y\hat{\mathbf{j}}$	$\mathbf{r}_p = z\hat{\mathbf{k}}$
(3) Relativní polohový vektor	$\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{j}} - x'\hat{\mathbf{i}}$ $r = \mathbf{r} = \sqrt{x'^2 + y^2}$ $\hat{\mathbf{r}} = \frac{y\hat{\mathbf{j}} - x'\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$	$\mathbf{r} = -R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ $r = \mathbf{r} = \sqrt{R^2 + z^2}$ $\hat{\mathbf{r}} = \frac{-R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
(4) Skalární součin $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$	$d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{y dx' \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{y^2 + x'^2}}$	$d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{R d\phi' (z \cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
(5) Vyjádření $d\mathbf{B}$	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dx' \hat{\mathbf{k}}}{(y^2 + x'^2)^{3/2}}$	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\phi' (z \cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$
(6) Integrace \mathbf{B}	$B_x = 0$ $B_y = 0$ $B_z = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{(y^2 + x'^2)^{3/2}}$ $= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{y\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}$	$B_x = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$ $B_y = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = 0$ $B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$

9.10.2 Ampérův zákon


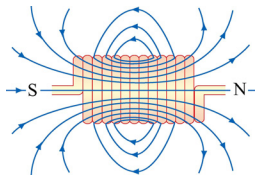
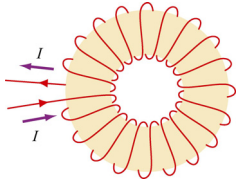
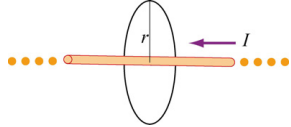
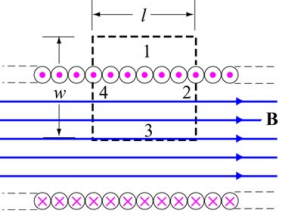
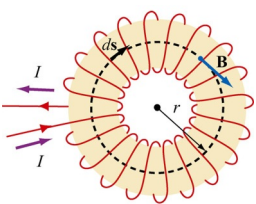
Ampérův zákon nám říká, že křivkový integrál $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ přes nějakou uzavřenou křivku je úměrný celkovému proudu, který prochází plochou, kterou křivka uzavírá:

$$\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 I_{\text{uz}} .$$

Pro použití Ampérova zákona k výpočtu magnetického pole, musíme projít následujícím postupem:

- (1) Nakreslit Ampérovu smyčku s ohledem na symetrii úlohy
- (2) Nalézt proud, který je křivkou uzavřený
- (3) Spočítat křivkový integrál $\oint \mathbf{B} ds$ podél dané křivky
- (4) Porovnat $\oint \mathbf{B} ds$ s $\mu_0 I_{\text{uz}}$ a vyřešit \mathbf{B} .

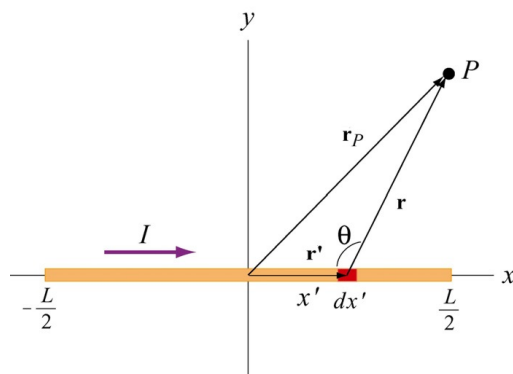
Dále shrneme, jak lze tuto metodu použít k výpočtu magnetického pole nekonečného lineárního vodiče, ideálního solenoidu a toroidu.

System	Nekonečný vodič	Ideální solenoid	Toroid
Obrázek			
(1) nakreslete Ampérovu smyčku			
(2) nalezněte proud, uzavřený smyčkou	$I_{\text{uz}} = I$	$I_{\text{uz}} = NI$	$I_{\text{uz}} = NI$
(3) spočítejte $\oint \mathbf{B} ds$ podél smyčky	$\oint \mathbf{B} ds = B(2\pi r)$	$\oint \mathbf{B} ds = Bl$	$\oint \mathbf{B} ds = B(2\pi r)$
(4) srovnajte $\mu_0 I_{\text{uz}}$ s $\oint \mathbf{B} ds$ pro získání \mathbf{B}	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$	$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

9.11 Řešené úlohy

P 9.11.1: Magnetické pole přímého vodiče

Mějme přímý vodič délky L , kterým protéká proud I v kladném směru osy x tak, jak je znázorněno na obrázku 9.11.1 (zanedbáváme dráhu navracejícího se proudu). Jaké je magnetické pole v testovacím bodě P v rovině xy ?



Obr. 9.11.1: Konečný přímý vodič protékáný proudem I .

Řešení:

Tento problém je velmi podobný příkladu 9.1. Nyní bod P , ve kterém budeme počítat pole, bude v rovině xy . Znovu vyřešíme problém použitím metodologie popsané v sekci 9.10.

- (1) *Bod zdroje.* Z obrázku 9.10.1 vidíme, že infinitesimální délka dx' popsaná polohovým vektorem $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}}$ představuje proudový zdroj $I d\mathbf{s} = (I dx')\hat{\mathbf{i}}$.
- (2) *Bod pole.* Jak je možné vidět z obrázku 9.10.1, polohový vektor bodu P pole je dán vztahem $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.
- (3) *Relativní polohový vektor.* Relativní polohový vektor od zdroje do bodu P je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$, jeho velikost $r = |\mathbf{r}_p| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left[(x - x')^2 + y^2 \right]^{1/2}$ je vzdálenost mezi zdrojem a bodem P . Příslušný jednotkový vektor je

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\left[(x - x')^2 + y^2 \right]^{1/2}}$$

- (4) *Zjednodušení vektorového součinu.* Vektorový součin $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ může být zjednodušen na $(dx'\hat{\mathbf{i}}) \times [(x - x')\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}] = y dx' \hat{\mathbf{k}}$, kde jsme použili $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0$ a $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$.
- (5) *Vyjádření $d\mathbf{B}$.* Užitím Biotova-Savartova zákona je infinitesimální příspěvek od $I d\mathbf{s}$ dán výrazem

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dx'}{\left[(x - x')^2 + y^2 \right]^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.11.1)$$

Odtud již vidíme, že směr magnetického pole je ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

- (6) *Provedení integrace a získání \mathbf{B} .* Celkové magnetické pole v bodě P můžeme obdržet integrací přes celou délku vodiče:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 I y dx'}{4\pi \left[(x - x')^2 + y^2 \right]^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{k}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left[\frac{(x-L/2)}{\sqrt{(x-L/2)^2 + y^2}} - \frac{(x+L/2)}{\sqrt{(x+L/2)^2 + y^2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

Nyní uvažujme následující limity:

(i) $x = 0$. V tomto případě je bod pole P na ose y , tj. $(x, y) = (0, y)$. Magnetické pole pak bude

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left[\frac{-L/2}{\sqrt{(-L/2)^2 + y^2}} - \frac{+L/2}{\sqrt{(+L/2)^2 + y^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (9.11.3)$$

v soulase se vztahem (9.1.6).

(ii) Limita nekonečné délky. Uvažujme limitu, kde $L \gg x, y$. Tato limita nám dá výsledek již spočtený pro případ vodiče nekonečné délky:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left[\frac{-L/2}{L/2} - \frac{+L/2}{L/2} \right] \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.11.4)$$

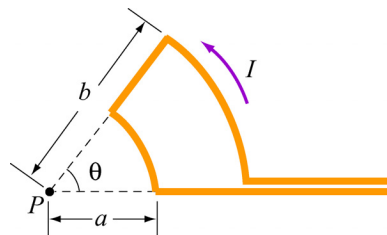
Jestliže použijeme válcové souřadnice s vodičem umístěným do osy z , pak magnetické pole můžeme popsat výrazem

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (9.11.5)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ je tangenciální jednotkový vektor a bod P pole je ve vzdálenosti r od vodiče.

P 9.11.2: Proud protékající obloukem

Uvažujme proudovou smyčku sestávající ze dvou radiálních segmentů a ze dvou částí soustředných kružnic se středy v bodě P , jak je znázorněno níže. Nalezněte magnetické pole v bodě P .



Obr. 9.11.2: Oblouk protékáný proudem,

Řešení:

V soulase s Biotovým-Savartovým zákonem je velikost magnetického pole generovaná proudovým elementem $I ds$ dána výrazem

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|ds \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r d\theta'}{r^2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\theta'. \quad (9.11.6)$$

Pro vnější oblouk dostaneme

$$B_{\text{out}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\theta d\theta' = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi b} . \quad (9.11.7)$$

Směr pole \mathbf{B}_{out} je dán výsledkem vektorového součinu $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$, který ukazuje ven z nárýsny. Podobně pro vnitřní kruh máme

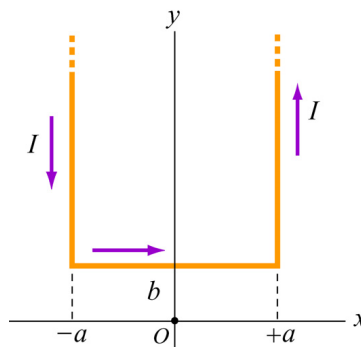
$$B_{\text{in}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\theta d\theta' = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a} . \quad (9.11.8)$$

Pro \mathbf{B}_{in} míří vektorový součin $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ směrem do obrazovky. Tudíž bude celkové pole rovno

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{in}} + \mathbf{B}_{\text{out}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (\text{do nárýsny}) . \quad (9.11.9)$$

P 9.11.3: Pravoúhlá proudová smyčka

Určete magnetické pole (a vyjádřete pomocí I , a , a b) proudové smyčky znázorněné na obrázku 9.11.3 v počátku souřadnic O .



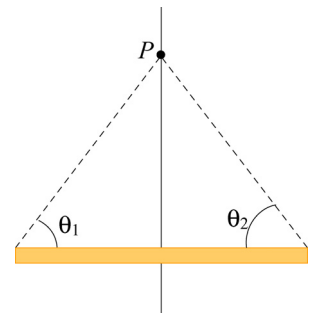
Obr. 9.11.3: Pravoúhlá proudová smyčka.

Řešení:

Pro konečný vodič nesoucí proud I je příspěvek magnetickému poli v bodě P dán (9.1.5)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) ,$$

kde θ_1 a θ_2 jsou úhly, které parametrizují délku drátu. Abychom obdrželi magnetické pole v místě O , využijeme tento vztah. Příspěvek může být rozdělen na tři části:



- (i) Spočtíme nejprve levý segment drátu, který leží v intervalu od $(x, y) = (-a, +\infty)$ do $(-a, +d)$. Úhly, kterými parametrizujeme tento úsek nám dají $\cos \theta_1 = 1$ ($\theta_1 = 0$) a $\cos \theta_2 = -b / \sqrt{b^2 + a^2}$. Tedy

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) . \quad (9.11.10)$$

Směr \mathbf{B}_1 vede ven z nárýsny, neboli ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

(ii) Dále uvažujme segment, který leží mezi $(x, y) = (-a, +b)$ a $(+a, +b)$. Cosiny příslušných úhlů jsou dány

$$\cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (9.11.11)$$

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9.11.12)$$

To nám dá výsledek

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9.11.13)$$

Směr \mathbf{B}_2 míří do obrazovky neboli $-\hat{\mathbf{k}}$.

(iii) Třetí úsek vodiče leží mezi $(x, y) = (+a, +b)$ a $(+a, +\infty)$. Snadno ukážeme, že obdržíme stejný výsledek, jako v prvním případě:

$$B_3 = B_1. \quad (9.11.14)$$

Směr pole míří opět ven z nárysny, tj. ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

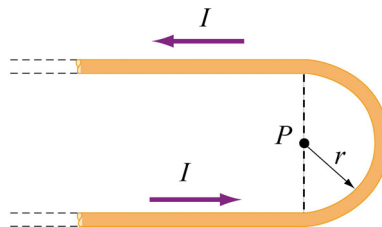
Celkové magnetické pole potom je

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \hat{\mathbf{k}} - \frac{\mu_0 I a}{2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a b \sqrt{a^2 + b^2}} \left(b\sqrt{a^2 + b^2} - b^2 - a^2 \right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (9.11.15)$$

Všimněme si, že v limitě $a \rightarrow 0$ horizontální úsek zcela zmizí a zbudou dva polopřímkové vodiče nesoucí proud navzájem v opačných směrech. Tudíž výsledné příspěvky se musí navzájem vyrušit a celkové magnetické pole bude v této limitě nulové.

P 9.11.4: Vodič ve tvaru U protékaný proudem

Nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem, je ohnut do tvaru U tak, jak je vidět na obrázku 9.11.4. Nalezněte magnetické pole v bodě P ležící ve středu polokružnice.



Obr. 9.11.4: Vodič ve tvaru U protékaný proudem.

Řešení:

Úlohu opět rozdělíme na tři části: dvě polopřímky a jedna polokružnice.

- (i) Necht' P leží v počátku v rovině xy . První polopřímková část pak leží mezi $(x, y) = (-\infty, -r)$ až $(0, -r)$. Dva úhly, které parametrizují tento úsek, jsou pak dány $\cos \theta_1 = 1$ ($\theta_1 = 0$) a $\cos \theta_2 = 0$ ($\theta_2 = \pi/2$). Příspěvek magnetickému poli od tohoto segmentu je v bodě P dán vztahem

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (1 + 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} . \quad (9.11.16)$$

Vektor \mathbf{B}_1 pak směřuje ven z nárysny, tj. ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

- (ii) Pro polokruhový oblouk s poloměrem r použijeme Biotův-Savartův zákon:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^2} \quad (9.11.17)$$

a obdržíme

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{r d\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4r} . \quad (9.11.18)$$

Vektor \mathbf{B}_2 pak směřuje ven z obrazovky, tj. ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

- (iii) Třetí úsek vodiče vede od $(x, y) = (0, +r)$ do $(-\infty, +r)$. Snadno zjistíme, že tento úsek dá stejný příspěvek jako první, tj.:

$$B_3 = B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} .$$

Vektor \mathbf{B}_3 pak opět směřuje ven z nárysny, tj. ve směru $+\hat{\mathbf{k}}$.

Celková velikost magnetického pole je

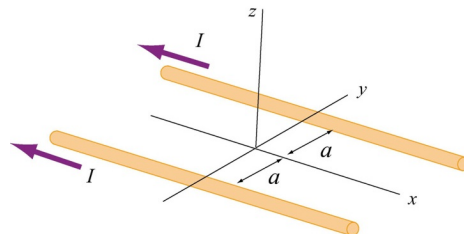
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{k}} + \frac{\mu_0 I}{4r} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2 + \pi) \hat{\mathbf{k}} . \quad (9.11.20)$$

Poznamenejme, že příspěvek dvou polopřímkových vodičů je stejný jako od nekonečného vodiče.:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 = 2\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{k}} . \quad (9.11.21)$$

P 9.11.5: Dva nekonečně dlouhé vodiče

Uvažujme dva nekonečně dlouhé vodiče, kterými protéká proud v záporném směru osy x .

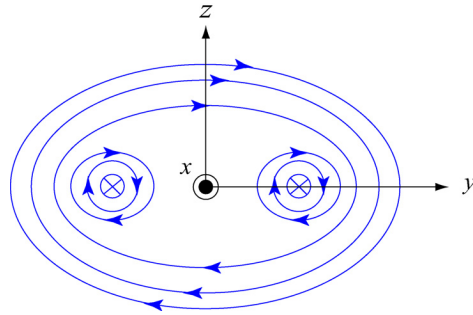


Obr. 9.11.5: Dva nekonečně dlouhé vodiče.

- (a) Zakreslete tvar magnetického pole v rovině yz .
 (b) Nalezněte vzdálenost d od osy z , kde je magnetické pole maximální.

Řešení:

- (a) Silokřivky magnetického pole jsou zakresleny na obrázku 9.11.6. Proudů v obou vodičích tekou směrem do nárysny.



Obr. 9.11.6: Silokřivky magnetického pole dvou vodičů, kterými protéká proud ve stejném směru.

- (b) Magnetické pole v $(0, 0, z)$ od vodiče č. 1 nalevo je, s užitím Ampérova zákona

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{a^2 + z^2}} . \quad (9.11.22)$$

Poněvadž proud teče v záporném směru osy x , směřuje magnetické pole ve směru vektorového součinu

$$(-\hat{\mathbf{i}}) \times \hat{\mathbf{r}}_1 = (-\hat{\mathbf{i}}) \times (\cos \theta \hat{\mathbf{j}} + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}) = \sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{k}} . \quad (9.11.23)$$

Máme tedy

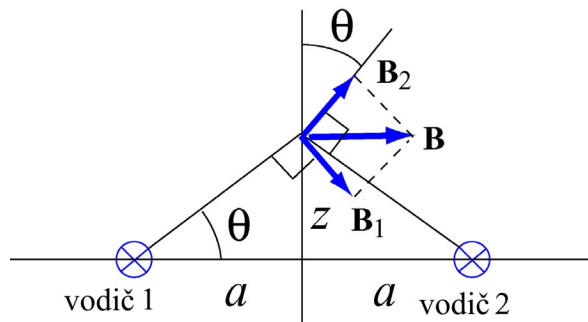
$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{a^2 + z^2}} (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) . \quad (9.11.24)$$

Pro vodič číslo 2 (vpravo) platí, že jeho magnetické pole má stejný průběh jako pole drátu levého: $B_1 = B_2$. Jeho směr je ale dán

$$(-\hat{\mathbf{i}}) \times \hat{\mathbf{r}}_2 = (-\hat{\mathbf{i}}) \times (-\cos \theta \hat{\mathbf{j}} + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}) = \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} . \quad (9.1.25)$$

Sečtením obou těchto příspěvků od obou dvou drátů, z -ová komponenta vymizí (jak očekáváme z požadavků symetrie), obdržíme

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} . \quad (9.11.26)$$



Obr. 9.11.7: Superpozice magnetického pole generovaného dvěma proudovými zdroji.

Pro nalezení maxima B , položíme $dB/dz = 0$,

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{a^2 + z^2} - \frac{2z^2}{(a^2 + z^2)^3} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a^2 - z^2}{(a^2 + z^2)^2} = 0, \quad (9.11.27)$$

které nám dá

$$z = a. \quad (9.11.28)$$

Tudíž pro $z = a$ je velikost magnetického pole je maximální a jeho velikost je

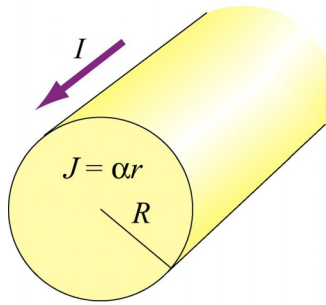
$$B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (9.11.29)$$

P 9.11.6: Nehomogenní proudová hustota

Uvažujme nekonečně dlouhý, válcový vodič s poloměrem R , kterým protéká proud I s nehomogenní proudovou hustotou

$$J = \alpha r, \quad (9.11.30)$$

kde α je konstanta. Najděte průběh magnetického pole.



Obr. 9.11.8: Nehomogenní proudová hustota.

Řešení:

Úlohu můžeme řešit použitím Ampérova zákona:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{uz}}, \quad (9.11.31)$$

kde proud uzavřený křivkou je dán jako

$$I_{\text{uz}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int (\alpha r') (2\pi r' dr'). \quad (9.11.32)$$

(a) Pro $r < R$ je uzavřený proud roven

$$I_{\text{uz}} = \int_0^r 2\pi \alpha r'^2 dr' = \frac{2\pi \alpha r^3}{3}. \quad (9.11.33)$$

Po aplikování Ampérova zákona obdržíme magnetické pole v bodě P

$$B_1 (2\pi r) = \frac{2\mu_0 \pi \alpha r^3}{3} \quad (9.11.34)$$

neboli

$$B_1 = \frac{\alpha\mu_0}{3} r^2. \quad (9.11.35)$$

Směr magnetického pole \mathbf{B}_1 je tangenciální k Ampérově smyčce, která uzavírá proud.

(b) Pro $r > R$ je uzavřený proud roven

$$I_{\text{uz}} = \int_0^R 2\pi\alpha r'^2 dr' = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}, \quad (9.11.36)$$

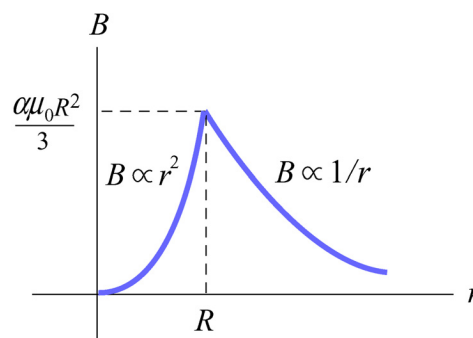
což nám dá

$$B_2(2\pi r) = \frac{2\mu_0\pi\alpha R^3}{3}. \quad (9.11.37)$$

Magnetické pole v bodě P_2 mimo vodič je tedy

$$B_2 = \frac{\alpha\mu_0 R^3}{3r}. \quad (9.11.38)$$

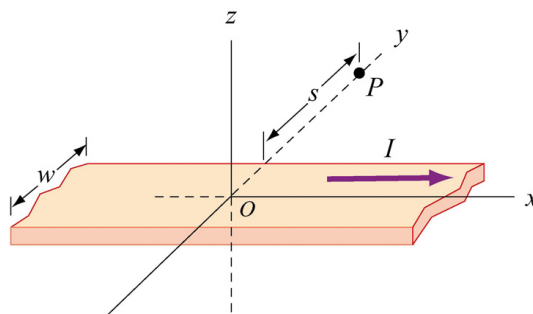
Průběh B jako funkce r je znázorněn na obrázku 9.11.9:



Obr. 9.11.9: Magnetické pole jako funkce vzdálenosti od osy vodiče.

P 9.11.7: Tenký kovový proužek

Uvažujme nekonečně dlouhý, tenký proužek kovu šířky w ležící v rovině xy . Proužkem protéká proud I v kladném směru osy x tak, jak je znázorněno na obrázku 9.11.10. Nalezněte magnetické pole v bodě P , který leží v rovině proužku a je od něj vzdálen s .



Obr. 9.11.10: Tenký kovový proužek.

Řešení:

Uvažujme tenký proužek šířky dr rovnoběžný se směrem toku proudu ve vzdálenosti r od bodu P . Viz. obrázek 9.11.11. Množství proudu, který prochází tímto diferenciálním elementem je dán

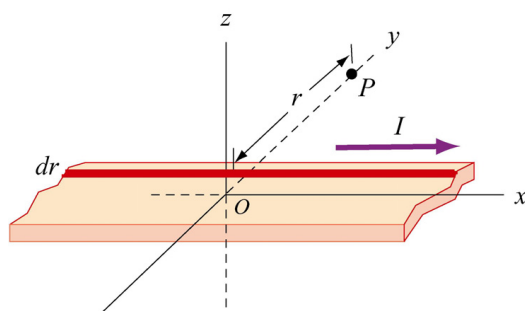
$$dI = I \left(\frac{dr}{w} \right). \quad (9.11.39)$$

Užitím Ampérova zákona vidíme, že příspěvek magnetickému poli v místě P od tohoto elementu bude

$$dB(2\pi r) = \mu_0 I_{uz} = \mu_0 (dI) \quad (9.11.40)$$

neboli

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left(\frac{I dr}{w} \right). \quad (9.11.41)$$



Obr. 9.11.11: Tenký proužek šířky dr , kterým protéká proud I .

Integrací tohoto výrazu obdržíme

$$B = \int_s^{s+w} \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left(\frac{dr}{r} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \left(\frac{s+w}{s} \right). \quad (9.11.42)$$

Užitím pravidla pravé ruky vidíme, že směr magnetického pole směřuje v kladném směru osy z , čili

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \left(1 + \frac{w}{s} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.11.43)$$

Všimněme si, že pokud s šířkou půjdeme k nule, $w \ll s$, $\ln(1+w/s) \approx w/s$, přejde předchozí výraz na

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\mathbf{k}}, \quad (9.11.44)$$

což je magnetické pole nekonečně dlouhého, tenkého, přímého drátu.

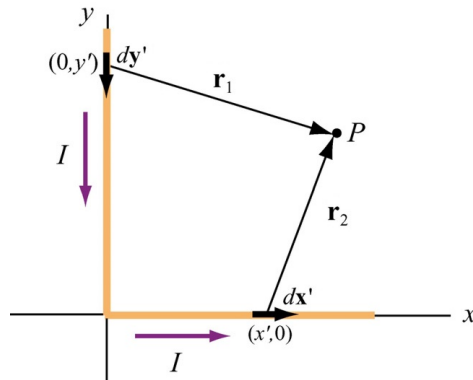
P 9.11.8: Dva polopřímkové vodiče

Vodičem prochází proud I po ose y v záporném směru od $+\infty$ směrem dolů k počátku a odtamtud k nekonečnu osy x . Ukažte, že magnetické pole je v kvadrantu $x, y > 0$, v rovině xy dáno vztahem

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (9.11.45)$$

Řešení:

Nechť $P(x, y)$ je bod v prvním kvadrantu ve vzdálenosti r_1 od bodu $(0, y')$ ležícím na ose y a ve vzdálenosti r_2 od bodu $(x', 0)$ ležícím na ose x .



Obr. 9.11.12: Dva polopřímkové vodiče.

Užitím Biotova-Savartova zákona zjistíme, že magnetické pole je v bodě P dáno vztahem

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{vodič } y} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{vodič } x} \frac{d\mathbf{s}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^2}. \quad (9.11.46)$$

Nyní analyzujeme každý úsek zvlášť.

- (i) Podél osy y bude diferenciální element $d\mathbf{s}_1 = -dy' \hat{\mathbf{j}}$, který leží ve vzdálenosti $\mathbf{r}_1 = x \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}}$ od bodu P , přispívá

$$d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1 = (-dy' \hat{\mathbf{j}}) \times [x \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}}] = x dy' \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.11.47)$$

- (ii) Analogicky podél osy x obdržíme příspěvek od $d\mathbf{s}_2 = dx' \hat{\mathbf{i}}$ ve vzdálenosti $\mathbf{r}_2 = (x - x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$, který dá

$$d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2 = y dx' \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.11.48)$$

Tedy vidíme, že magnetické pole bude v bodě P směřovat v kladném směru osy z .

S použitím předchozích výsledků obdržíme pro vzdálenosti $r_1 = \sqrt{x^2 + (y - y')^2}$

a $r_2 = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$ výsledné pole

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{x dy'}{[x^2 + (y - y')^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{y dx'}{[y^2 + (x - x')^2]^{3/2}}. \quad (9.11.49)$$

Integrály snadno spočteme s použitím

$$\int_0^\infty \frac{b ds}{[b^2 + (a - s)^2]^{3/2}} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b \sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9.11.50)$$

Tedy celkový výraz pro magnetické pole je dán jako

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

Dokažte, že tento výraz je v souladu s rovnicí (9.1.5).

9.12 Tématické otázky

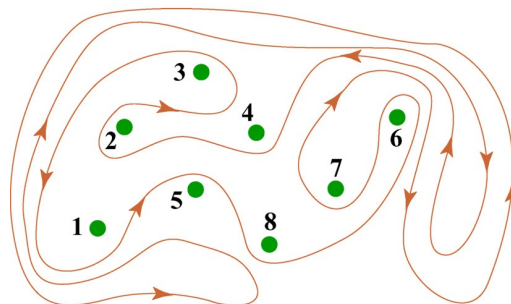
1. Porovnejte Biotův-Savartův zákon v magnetostatice s Coulombovým zákonem v elektrostatice.
2. Jestliže proud teče pružinou, dojde k jejímu natažení nebo smrštění? Vysvětlete.
3. Jak vybíráme integrační cestu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$, když používáme Ampérův zákon?
4. Mějme dvě soustředné kruhové smyčky s různými poloměry ležící v jedné rovině. Smyčkami prochází proud ve stejném směru. Budou se přitahovat nebo odpuzovat? Vysvětlete.
5. Mějme tři nekonečně dlouhé rovnoběžné dráty, které jsou uspořádány tak, že na kolmém řezu leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Mohou být proudy uspořádány tak (kombinace proudů jdoucích z a do nárýsny), aby se všechny tři dráty (a) přitahovaly a (b) všechny navzájem odpuzovaly? Vysvětlete.

9.13 Neřešené úlohy

P 9.13.1: Použití Ampérova zákona

Nejjednodušší možné použití Ampérova zákona nám dovoluje spočítat magnetické pole v okolí jednoho nekonečně dlouhého drátu. Přidáním dalších drátů s rozdílnými proudy nás vyzkouší z porozumění Ampérova zákona.

- (a) Spočtete pomocí Ampérova zákona magnetické pole $|\mathbf{B}| = B(r)$ jak funkci vzdálenosti r v okolí nekonečně dlouhého přímého drátu, kterým protéká proud I . Ukažte na náčrtku, jakou zvolíte integrační cestu a zejména uveďte, jak využít symetrie. Jaké bude pole ve vzdálenosti 10 mm od drátu, kterým protéká proud 10 A?
- (b) Máme osm rovnoběžných drátů vstupujících kolmo do nárýsny ve znázorněných bodech. Dráty jsou označeny celými čísly k ($k = 1, 2, \dots, 8$) a protéká jimi proud $2k$ krát I_0 , (tj. $I_k = 2kI_0$). Pro $k = 1 \dots 4$ teče proud směrem ven z nárýsny, pro zbytek drátů teče proud do nárýsny. Spočtete $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél uzavřené křivky (viz obrázek) ve směru vyznačeném šipkou. (Pozor na znaménka!)



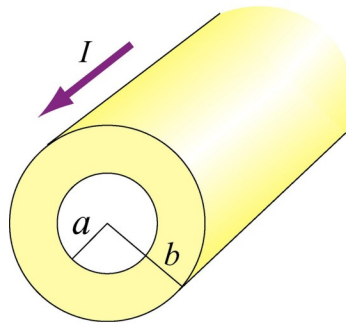
Obr. 9.13.1: Ampérova smyčka.

- (c) Můžete použít jednoduchou aplikaci Ampérova zákona k nalezení pole v bodě v okolí 8 drátů? Proč? Jak byste postupovali v hledání pole v libovolném bodě P ?

P 9.13.2: Užití Ampérova zákona k výpočtu magnetického pole

Uvažujme válcový vodič s dutinou ve svém středu a měděnou stěnou tloušťky $b - a$ tak, jak je znázorněno na obrázku 9.13.2. Poloměry vnitřní a vnější stěny jsou a resp. b . Protékající proud I je rovnoměrně rozložen skrze průřez měděného vodiče.

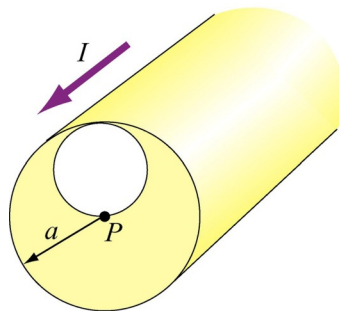
- (a) Spočítejte velikost magnetického pole v oblasti mimo vodiče, $r > b$. (Návod: předpokládejte, že celý vodič je jednoduchý tenký drát, zkonstruujte Ampérovu smyčku a aplikujte Ampérův zákon). Jaký bude směr \mathbf{B} ?
- (b) Spočítejte magnetické pole uvnitř vnitřního poloměru $r < a$. Jaký bude směr \mathbf{B} ?
- (c) Spočítejte magnetické pole uvnitř vlastního vodiče, tj. $a < r < b$. Jaký je směr \mathbf{B} ?
- (d) Nakreslete průběh velikosti magnetického pole $B(r)$ od $r = 0$ do $r = 4b$. Je $B(r)$ spojitá v $r = a$ a $r = b$? A jaká je jeho změna (derivace)?
- (e) Nyní předpokládejte, že v ose tohoto vodiče je umístěný velmi tenký drát, kterým protéká stejný proud I , ale v opačném směru. Můžete zhruba znázornit změnu $B(r)$ bez dalších detailních výpočtů? (Návod: nezapomeňte, že vektory $d\mathbf{B}$ z různých proudových elementů je možné sčítat, abychom obdrželi celkové magnetické pole.)



Obr. 9.13.2: Dutý válec protékáný stejnosměrným proudem I .

P 9.13.3: Válec s dutinou

Dlouhá měděná tyč s poloměrem a má mimo svoji osu válcovou dutinu skrze celou svoji délku tak, jak je znázorněno na obrázku 9.13.3. Vodičem protéká proud I směřující ven z nárýsu, a který je rovnoměrně rozdělený podél řezu vodiče. Nalezněte velikost a směr magnetického pole v bodě P .



Obr. 9.13.3: Válcový vodič s dutinou.

P 9.13.4: Magnetická pole solenoidu

Solenoid má 200 těsně navinutých závitů, tudíž pro většinu jeho délky lze předpokládat, že je to ideální solenoid. Je dlouhý 0,25 m, průměr má 0,1 m a prochází jím proud 0,30 A.

- Nakreslete solenoid a zakreslete směr vinutí, směr proudu a siločivky magnetického pole (vně i uvnitř) s šipkami znázorňujícími jejich směry. Jaký je převládající směr magnetického pole uvnitř solenoidu?
- Nalezněte velikost magnetického pole uvnitř solenoidu pomocí Ampérovy smyčky a užitím Ampérova zákona.
- Má magnetické pole složku ve směru drátu, z něhož je vytvořený solenoid? Jestliže ano, spočítejte jeho velikost jak uvnitř, tak vně solenoidu ve vzdálenostech 30 mm, resp. 60 mm od středu solenoidu a ukažte jeho směr na náčrtku.

P 9.13.5: Rotující disk

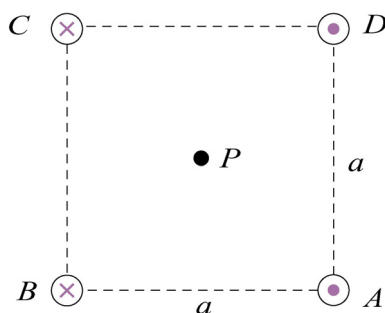
Kruhový disk s poloměrem R s konstantní nábojovou hustotou σ rotuje s úhlovou rychlostí ω . Ukažte, že magnetické pole ve středu disku je

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R.$$

Návod: Uvažujte kruhový prsteneček s poloměrem r a tloušťkou dr . Ukažte, že proud v tomto elementu je $dI = (\omega / 2\pi) dq = \omega \sigma r dr$.

P 9.13.6: Čtyři dlouhé vodivé dráty

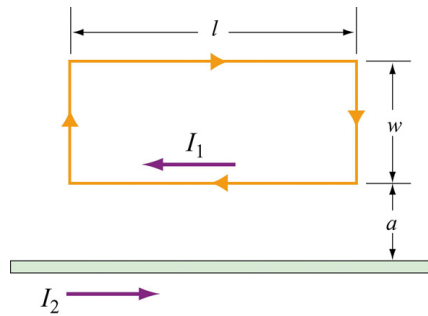
Čtyři nekonečně dlouhé rovnoběžné dráty vedou stejné proudy I a jsou uspořádány způsobem, který je vidět na obrázku 9.13.5 tak, že na kolmém řezu jsou umístěny ve vrcholech čtverce. Proud A a D míří ven z nábýsní a proudy B a C míří do nábýsní. Jaké je magnetické pole ve středu čtverce?



Obr. 9.13.5: Čtyři rovnoběžné vodivé dráty.

P 9.13.7: Magnetické síly na proudové smyčce

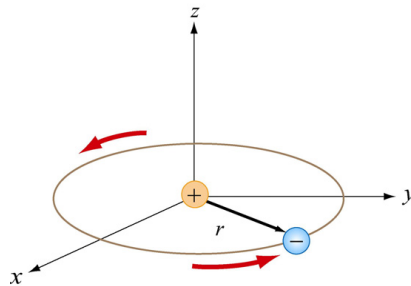
Pravoúhlá smyčka délky l a šířky w je protékána proudem I_1 . Smyčka je umístěna v blízkosti nekonečně dlouhého drátu, kterým protéká proud I_2 tak, jak je znázorněno na obrázku 9.13.6. Jaká je magnetická síla působící na smyčku a která je způsobena magnetickým polem drátu?



Obr. 9.13.6: Magnetická síla působící na proudovou smyčku.

P 9.13.8: Magnetický moment obíhajícího elektronu

Chceme odhadnout magnetický dipólový moment vytvořený pohybem elektronu obíhajícím proton. K tomu uijeme „semi-klasický“ model. Předpokládejme, že elektron má rychlost v , a obíhá proton (předpokládejme, že je velmi těžký), který je umístěn v počátku souřadnic. Elektron se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 0,53 \times 10^{-10}$ m proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladného směru osy z . Viz obr. 9.13.7



Obr. 9.13.7

- Dostředivá síla $m_e v^2 / r$, která udržuje pohybující se elektron na kružnici, je způsobena Coulombickou přitažlivou silou mezi elektronem a protonem (m_e je hmotnost elektronu). S využitím tohoto faktu a ze známé vzdálenosti r , která je dána výše nalezněte rychlost elektronu v našem „semi-klasickém“ modelu. [$2,18 \times 10^6$ m/s.]
- Známe-li tuto rychlost, jaká je pak oběžná perioda T elektronu? [$1,52 \times 10^{-16}$ s.]
- Jaký je proud asociovaný s tímto pohybem? Představme si, že je elektron rovnoměrně „natažen“ podél celé své dráhy. Za čas T je celkový náboj q , který projde danou kružnicí, roven právě e . [1,05 mA. Veliký!]
- Jaký je magnetický dipólový moment asociovaný s tímto orbitálním pohybem? Určete velikost a směr. Velikost tohoto dipólového momentu je tzv. *Bohrův magneton*, μ_B . [$9,27 \times 10^{-24}$ A·m² v záporném směru osy $-z$.]
- Jeden z důvodů, proč je tento model „semiklasický“ je ten, že zde není žádný příčina, proč by orbita měla mít zrovna tuto zadanou velikost poloměru své dráhy. Velikost r je dána z kvantově mechanických úvah, které říkají, že moment hybnosti obíhajícího elektronu je jen celočíselným násobkem $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J/s je redukovaná Planckova konstanta. Jaký je orbitální moment hybnosti zde v této úloze v jednotkách \hbar ?

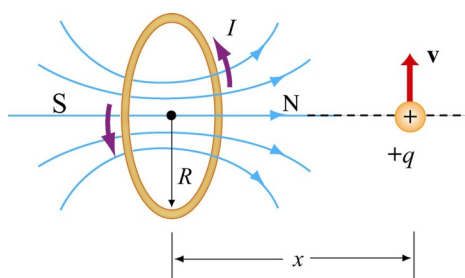
P 9.13.9: Feromagnetismus a permanentní magnety

Železný disk má výšku $h = 1,00$ mm a poloměr $r = 1,00$ cm. Magnetický dipólový moment atomu železa je $\mu = 1,8 \times 10^{-23}$ A·m². Molární hmotnost železa je 55,85 g a jeho hustota je 7,9 g/cm³. Předpokládejme, že všechny atomy železa v tomto disku mají své dipólové momenty uspořádané ve směru osy disku.

- (a) Jaká je koncentrace atomů železa? Kolik atomů železa je v tomto disku? [8,5×10²⁸ atomů/m³, 2,7×10²² atomů.]
- (b) Jaká je magnetizace \mathbf{M} disku? [1,53×10⁶ A/m, rovnoběžně s osou.]
- (c) Jaký je magnetický dipólový moment disku? [0,48 A·m².]
- (d) Jestliže bychom ovinuli disk smyčkou z drátu o stejném poloměru r , jak veliký proud by musel drátem procházet, abychom dostali stejný dipólový moment jako je v (c)? Je to „ekvivalentní“ povrchový proud způsobený atomárními proudy uvnitř magnetu? [1 525 A.]

P 9.13.10: Náboj v magnetickém poli

Cívkou o poloměru R , která má svojí osu v kladném směru osy $+x$, prochází proud I . Kladný náboj q se pohybuje rychlostí $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{j}}$ v okamžiku, kdy kříží osu cívky ve vzdálenosti x od jejího centra. Viz obrázek 9.13.8.



Obr. 9.13.8

Popište následný pohyb náboje. Jaký je okamžitý poloměr křivosti dráhy náboje?

P 9.13.11: Permanentní magnety

Magnet ve tvaru válcové tyče má délku 4,8 cm a poloměr 1,1 cm. Má homogenní magnetizaci $M = 5300$ A/m směřující rovnoběžně s osou.

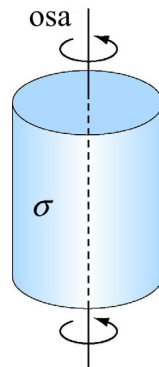
- (a) Spočítejte magnetický dipólový moment tohoto magnetu.
- (b) Jaké je osově pole ve vzdálenosti 1 metr od středu magnetu ve směru osy? [(a) 2,42×10⁻² A·m², (b) 4,8 × 10⁻⁹ T, tj. 4,8 × 10⁻⁵ gaussů.]

P 9.13.12: Magnetické pole solenoidu

- (a) Solenoid s 3 000 závitů má délku 60 cm a průměr 8 cm. Jestliže solenoidem prochází proud 5,0 A, nalezněte velikost magnetického pole uvnitř solenoidu zkonstruováním Ampérových smyček a aplikací Ampérova zákona. Jaké bude ve srovnání s magnetickým polem Země (5 × 10⁻⁵ T, čili 0,5 gaussů)? [0,0314 T, čili 314 gaussů, což je asi 600-krát silnější, než je pole Země.]

Magnetické pole obdržíme následujícím způsobem: máme dlouhou válcovou slupku z nevodivého materiálu, která nese povrchový náboj σ [C/m²] vázaný na povrch tak, jak je

ukázáno na obrázku 9.13.9. Válec je zavěšený takovým způsobem, že se může volně a bez tření otáčet okolo své osy. Na počátku je v klidu. Budeme ho postupně roztáčet podél jeho osy až do konečné rychlosti povrchu v_0 .



Obr. 9.13.9

- (b) Jaký bude povrchový proud K na povrchu válce v A/m^2 ? [$K = \sigma v_0$.]
- (c) Jaké je magnetické pole uvnitř válce? $B = \mu_0 K = \mu_0 \sigma v_0$ orientované podél osy podle pravidla pravé ruky vzhledem k ose.]
- (d) Jaké je magnetické pole vně válce? Předpokládejme, že válec je nekonečně dlouhý. [0].

P 9.13.13: Paramagnetický jev

Solenoidem s 16 závitů/cm prochází proud 1,3 A.

- (a) Jak naroste magnetické pole uvnitř solenoidu, když do něj vsuneme dokonale „padnoucí“ chromovou tyč? (Chrom je paramagnetický materiál s magnetickou susceptibilitou $\chi = 2,7 \times 10^{-4}$.) [0,86 μT]
- (b) Nalezněte velikost magnetizace \mathbf{M} této tyče. [0,68 A/m.]