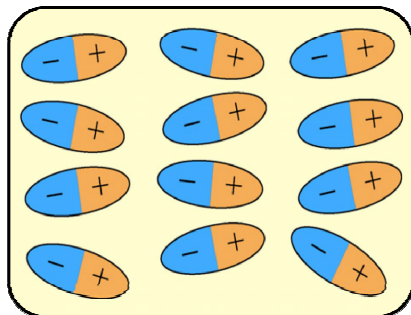


# ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

## V. Kapacita a dielektrika



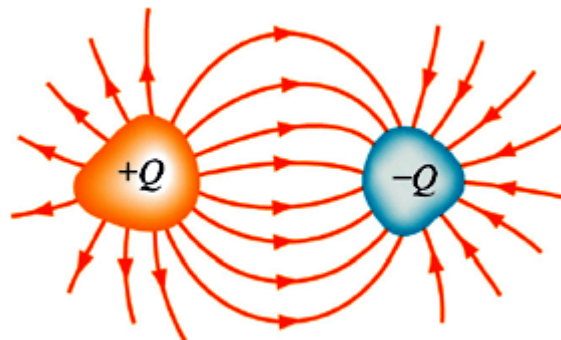
### Obsah

<b>5. KAPACITA A DIELEKTRIKA</b>	<b>2</b>
5.1 ÚVOD	2
5.2 VÝPOČET KAPACITY	3
5.3 KONDENZÁTORY V ELEKTRICKÉM OBVODU	7
5.3.1 PARALELNÍ ZAPOJENÍ	8
5.3.2 SÉRIOVÉ ZAPOJENÍ	9
5.4 ENERGIE ULOŽENÁ V KONDENZÁTORU	10
5.4.1 HUSTOTA ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE	11
5.5 DIELEKTRIKA	13
5.5.1 POLARIZACE	15
5.5.2 DIELEKTRIKA BEZ BATERIE	17
5.5.3 DIELEKTRIKA S BATERIÍ	18
5.5.4 GAUSSŮV ZÁKON PRO DIELEKTRIKA	19
5.6 VYTVÁŘENÍ ELEKTRICKÝCH POLÍ	22
5.7 SHRNUÍ	24
5.8 DODATEK: IONTOVÁ A VAN DER WAALSOVA SÍLA	25
5.9 DODATEK: ALGORITMUS PRO VÝPOČET KAPACITY	32
5.10 ŘEŠENÉ ÚLOHY	33
5.11 TÉMATICKE OTÁZKY	36
5.12 NEŘEŠENÉ ÚLOHY	36

## 5. Kapacita a dielektrika

### 5.1 Úvod

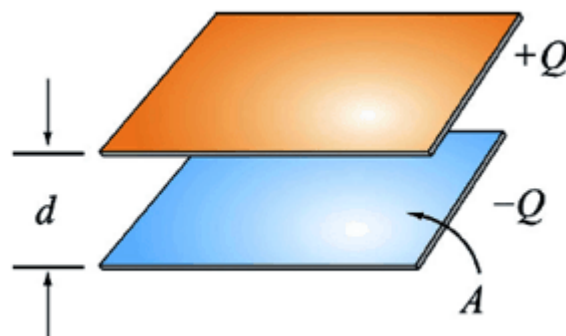
Kondenzátor je zařízení k ukládání elektrického náboje. Kondenzátory mohou mít různý tvar a velikost. Vždy se ale skládají ze dvou vodičů, na nichž je opačný náboj (viz Obr. 5.1.1). Kondenzátory se využívají hojně v elektrotechnickém průmyslu jako úložiště elektrické energie, ke zpoždění změn napětí při spojení s rezistorem, k filtraci nechtěných frekvencí, při vytváření rezonačních obvodů a při výrobě frekvenčně závislých i nezávislých napěťových děličů. Některé z těchto aplikací budeme diskutovat v dalších kapitolách.



Obr. 5.1.1.: Základní konfigurace kondenzátoru.

*Nenabitý* kondenzátor má na obou vodičích nulový náboj. Při procesu nabíjení se přesune náboj  $Q$  z jednoho vodiče na druhý. Výsledkem je náboj  $+Q$  na jednom vodiči a  $-Q$  na druhém vodiči. Tím vznikne potenciálový rozdíl  $\Delta V$ . Na kladném vodiči je vyšší potenciál než na záporném. Povšimněte si, že ať je kondenzátor nabitý či nenabitý, je celkový náboj kondenzátoru vždy nulový.

Nejjednodušším příkladem kondenzátoru jsou dvě vodivé rovinné desky o ploše  $A$ . Desky jsou rovnoběžně uspořádané a jejich vzdálenost je  $d$  (viz Obr. 5.1.2).



Obr. 5.1.2: Kondenzátor s rovnoběžnými deskami.

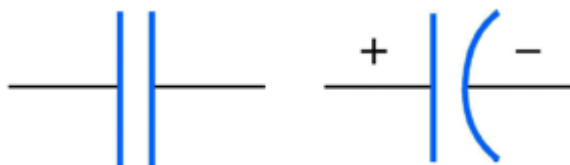
Z experimentů je známo, že náboj  $Q$  na kondenzátoru je přímo úměrný rozdílu potenciálů  $\Delta V$  mezi oběma deskami. Proto můžeme psát:

$$Q = C|\Delta V|, \quad (5.1.1.)$$

kde  $C$  je kladná konstanta úměrnosti nazývaná *kapacita*. Kapacita je míra schopnosti uložit náboj na kondenzátor při daném potenciálovém rozdílu  $\Delta V$ . Jednotkou kapacity v soustavě SI je farad ( $F$ ):

$$1 \text{ F} = 1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb} / 1 \text{ volt} = 1 \text{ C} / 1 \text{ V}.$$

Typická kapacita běžně používaných kondenzátorů se pohybuje od jednotek pikofaradů ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ) do milifaradů ( $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F} = 1000 \text{ }\mu\text{F}$ ;  $1 \text{ }\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ). Na obrázku 5.1.3. (nalevo) je běžná značka kondenzátoru používaná ve schématech elektrických obvodů. Na témže obrázku napravo je méně používaná značka kondenzátoru s pevně definovanou polaritou.



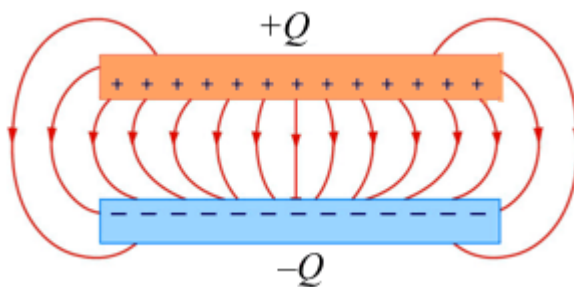
Obr. 5.1.3: Symboly pro kondenzátor.

## 5.2 Výpočet kapacity

Nyní se naučíme vypočítat kapacitu v systémech s jednoduchou geometrií.

### **P** Příklad 5.1: Rovinný kondenzátor

Uvažujte dvě kovové desky se stejnou plochou  $A$ , které mají vzdálenost  $d$ . Konfigurace desek je znázorněna na obrázku 5.2.1. Na horní desce je náboj  $+Q$  a na dolní desce  $-Q$ . Nabíjení desek může být provedeno například pomocí baterie s odpovídajícím potenciálovým rozdílem. Nalezněte kapacitu systému.



Obr. 5.2.1: Elektrické pole mezi deskami rovinného kondenzátoru.

### **Řešení:**

Pro nalezení kapacity  $C$  je nejprve potřeba znát elektrické pole mezi deskami. Skutečný kondenzátor má konečnou velikost. Siločivky elektrického pole proto nejsou dokonalé přímky a pole není jen mezi deskami. Tomuto jevu říkáme *okrajové efekty* a nehomogenní pole v blízkosti okrajů desek se nazývá *rozptylové pole*. Na Obr. 5.2.1 je pole znázorněno i s uvážením okrajových jevů. Tyto jevy budeme ale při výpočtu zanedbávat a budeme předpokládat ideální situaci, kdy jsou siločivky rovnoběžné a pole homogenní.

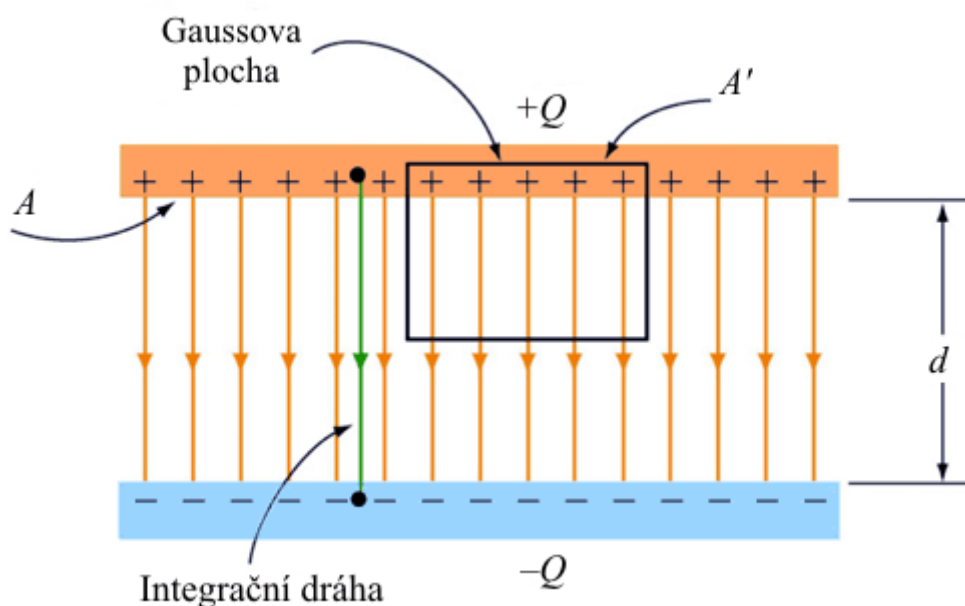
V limitě nekonečně velkých desek má systém rovinnou symetrii a elektrické pole můžeme spočítat z Gaussova zákona podle rovnice (4.2.5):

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

kde  $q_{\text{enc}}$  je celkový náboj uzavřený v ploše. Gaussovu plochu budeme volit jako obecný váleček s podstavou velikosti  $A'$ , kterým uzavřeme náboj v horní desce (viz Obr. 5.2.2). Pro elektrické pole v oblasti mezi deskami platí

$$EA' = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (5.2.1)$$

Stejný výsledek jsme také obdrželi v kapitole 4.8.1 za pomoci principu superpozice.



Obr. 5.2.2: Gaussova plocha pro výpočet elektrického pole mezi deskami.

Rozdíl potenciálů mezi deskami je roven

$$\Delta V = V_- - V_+ = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -Ed, \quad (5.2.2)$$

kde jsme jako integrační cestu volili úsečku z kladně nabitě desky jdoucí podél silokřivek do záporně nabitě desky (viz Obr. 5.2.2). Jelikož silokřivky elektrického pole vždy míří z místa vyššího potenciálu do místa nižšího potenciálu, je  $V_- < V_+$ . Pro výpočet kapacity je ale podstatná jen velikost rozdílu potenciálů

$$|\Delta V| = Ed \quad (5.2.3)$$

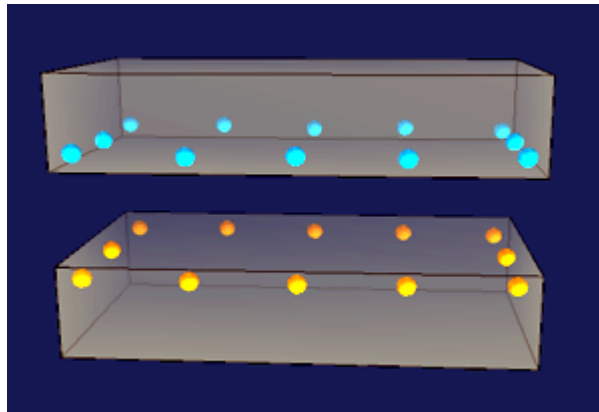
a znaménko nemá na kapacitu vliv. Z definice kapacity máme

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{rovinný kondenzátor} \quad (5.2.4)$$

Povšimněte si, že kapacita  $C$  závisí jen na geometrických faktorech  $A$  a  $d$ . Pro daný potenciálový rozdíl  $\Delta V$  kapacita roste přímo úměrně ploše. Větší plocha shromáždí větší náboj. Na druhou stranu je kapacita nepřímo úměrná vzdálenosti desek  $d$ , protože při fixním náboji je rozdíl potenciálů  $\Delta V$  tím menší, čím menší je vzdálenost  $d$  mezi deskami.

### S Interaktivní simulace 5.1: Kondenzátor s rovinnými deskami

Simulace na obrázku 5.2.3 ukazuje interakci nabitých částic uvnitř desek kondenzátoru.

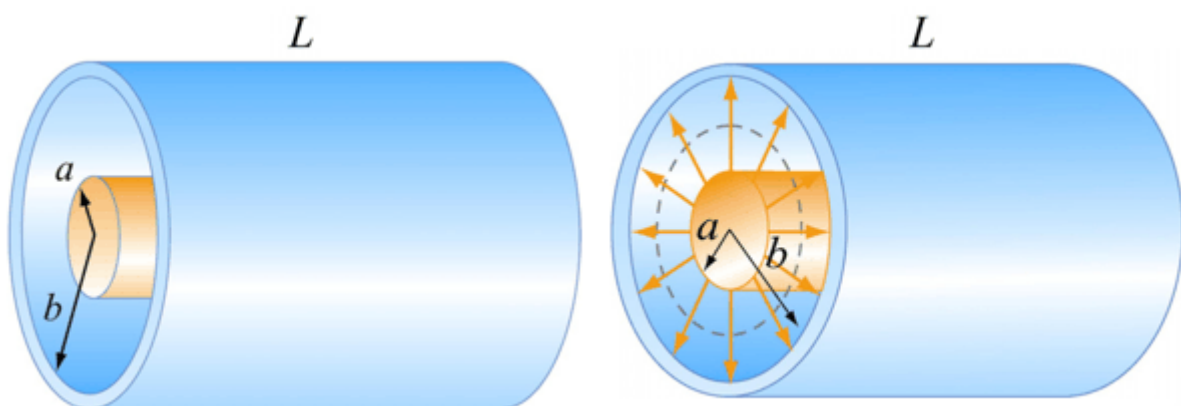


Obr. 5.2.3: Nabité částice interagují uvnitř desek kondenzátoru.

V každé desce je dvanáct nábojů vzájemně interagujících prostřednictvím Coulombovy síly. Jedna deska obsahuje náboje kladné a druhá záporné. Vzájemné odpuzování nábojů způsobí, že se v každé desce náboje snaží zaujmout co největší možnou vzájemnou vzdálenost. Výsledkem je, že se rozmístí na vnější hraně desky. Na druhou stranu jsou částice jedné desky přitahovány k částicím druhé desky, takže se náboje jednoho znaménka snaží minimalizovat vzdálenost k nábojům opačného znaménka. Rozmístí se proto podél vnitřních povrchů obou desek.

### P Příklad 5.2: Válcový kondenzátor

Uvažujte válcový vodič o poloměru  $a$  obklopený souosou válcovou obálkou o poloměru  $b$  (viz Obr. 5.2.4). Délka obou válců je  $L$  a předpokládejte, že  $L$  je mnohem větší než vzdálenost obou válců  $b - a$ , takže budete moci zanedbat okrajové jevy. Kondenzátor je nabitý tak, že vnitřní válec má náboj  $+Q$  a vnější obálka náboj  $-Q$ . Jaká je kapacita?



Obr. 5.2.4: Nalevo – válcový kondenzátor. Napravo – pohled na konec kondenzátoru. Elektrické pole je nenulové jen v oblasti  $a < r < b$ .

### Řešení:

Pro nalezení kapacity  $C$  je nejprve potřeba znát elektrické pole. Vzhledem k válcové symetrii problému zvolíme za Gaussovu plochu souosý válec délky  $l < L$  o poloměru  $r$ , pro který platí  $a < r < b$ . Z Gaussova zákona poté získáme

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = E(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (5.2.5)$$

kde  $\lambda = Q/L$  je délková hustota náboje. Povšimněte si, že elektrické pole je nenulové jen v oblasti  $a < r < b$ . Pro  $r < a$  je náboj uzavřený v ploše nulový, protože náboje jsou lokalizované na povrchu válcových kovových ploch. Pro  $r > b$  je celkový náboj uzavřený v integrační ploše  $q_{\text{enc}} = \lambda l - \lambda l = 0$ , protože Gaussova plocha obklopuje oba vodiče, jejichž náboje jsou stejné, ale mají opačné znaménko.

Rozdíl potenciálů válcových ploch je

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \left(\frac{dr}{r}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (5.2.6)$$

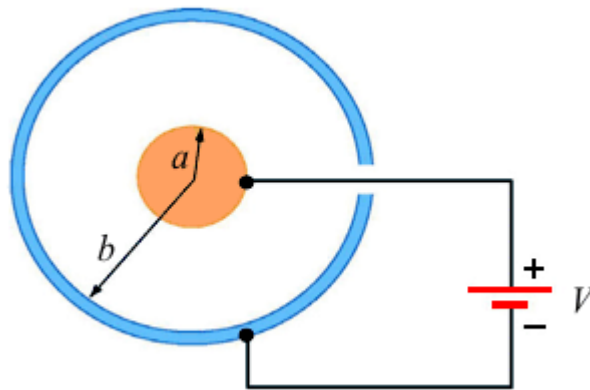
kde jsme integrační křivku mezi povrchy volili podél silokřivek elektrického pole. Podle očekávání má vnější vodič se záporným nábojem nižší potenciál. Pro kapacitu dostáváme vztah

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\lambda L}{\lambda \ln(b/a) / 2\pi\epsilon_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad \text{válcový kondenzátor} \quad (5.2.7)$$

Kapacita opět závisí jen na geometrických faktorech, tj. na  $L$ ,  $a$ ,  $b$ .

### **P** Příklad 5.3: Kulový kondenzátor

Uvažujte kulový kondenzátor, který se skládá ze dvou soustředných kulových elektrod o poloměrech  $a$ ,  $b$  (viz Obr. 5.2.5). Vnitřní elektroda má homogenně rozmístěný náboj  $+Q$  a vnější stejný náboj opačného znaménka, tedy  $-Q$ . Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?



**Obr. 5.2.5:** *Nalevo* – kulový kondenzátor se dvěma soustřednými elektrodami.  
*Napravo* – Gaussova plocha pro výpočet elektrického pole.

### **Řešení:**

Elektrické pole je nenulové pouze v oblasti  $a < r < b$ . Z Gaussova zákona získáme

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_r A = E_r (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.2.8)$$

neboli

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (5.2.9)$$

Potenciálový rozdíl mezi dvěma vodivými elektrodami potom bude

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \left(\frac{dr}{r^2}\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right), \quad (5.2.10)$$

což pro kapacitu dává

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right) \quad \text{kulový kondenzátor} \quad (5.2.11)$$

Kapacita  $C$  opět závisí jen na geometrických vlastnostech uspořádání elektrod, tedy na rozměrech  $a$ ,  $b$ .

„Izolovaný“ vodič má také kapacitu. Můžeme si představit, že druhý vodič je v nekonečné vzdálenosti. V limitě  $b \rightarrow \infty$  předchozí rovnice přejde na výraz

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C = \lim_{b \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{1-a/b}\right) = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (5.2.12)$$

Izolovaná kulová elektroda má proto kapacitu

$$C = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (5.2.13)$$

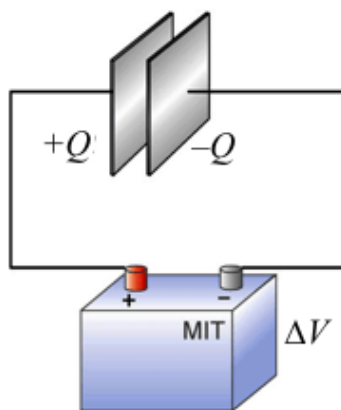
Předchozí výraz můžeme odvodit i jinak. Vodivá koule o poloměru  $R$  s homogenně rozloženým nábojem  $Q$  na povrchu má potenciál  $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$ , pokud jsme použili nekonečno jako referenční hladinu, tj.  $V(\infty) = 0$ . Snadno nyní získáme kapacitu

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (5.2.11)$$

Podle očekávání závisí kapacita izolované nabité koule opět jen na geometrii koule, tedy na jejím poloměru  $R$ .

### 5.3 Kondenzátory v elektrickém obvodu

Kondenzátor můžeme nabít tak, že jeho elektrody připojíme ke svorkám baterie, která na nich má potenciálový rozdíl  $\Delta V$ , který nazýváme *svorkové napětí*.

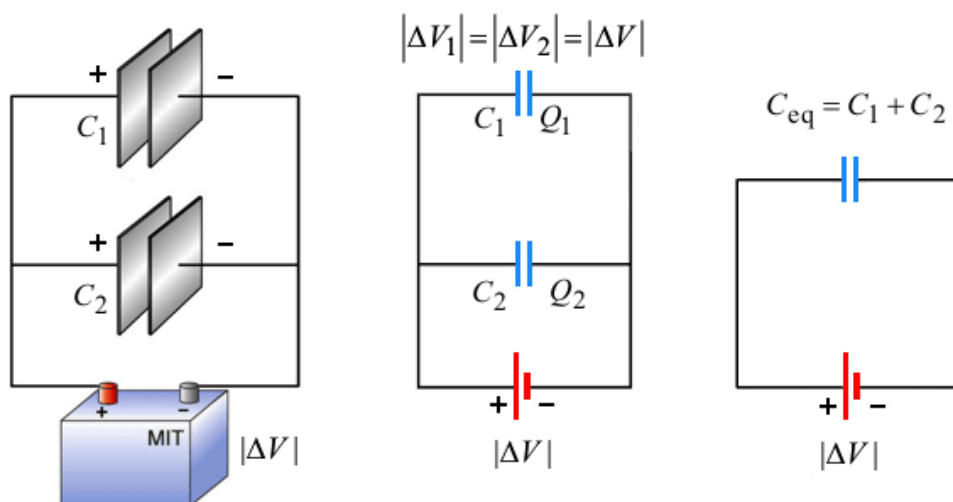


Obr. 5.3.1: Nabíjení kondenzátoru.

Připojení ke svorkám ve výsledku vede na sdílení nábojů mezi svorkami a elektrodami kondenzátoru. Pokud je například elektroda připojena ke kladné (záporné) svorce baterie, získá stejný kladný (záporný) náboj. Toto sdílení vede k okamžitému snížení náboje na svorkách a ke snížení svorkového napětí. V baterii dojde k následným chemickým reakcím, které odvedou náboj z jedné svorky na druhou tak, aby byla kompenzována ztráta náboje a udrženo svorkové napětí na původní úrovni. Baterii proto můžeme chápat jako nábojovou pumpu, která přepravuje náboj  $Q$  z jedné elektrody na druhou.

### 5.3.1 Paralelní zapojení

Předpokládejme, že máme dva kondenzátory: první má kapacitu  $C_1$  a náboj  $Q_1$ , druhý kapacitu  $C_2$  a náboj  $Q_2$  (viz Obr. 5.3.2).



Obr. 5.3.2: Paralelní zapojení kondenzátorů a ekvivalentní obvod.

Levé elektrody obou kondenzátorů  $C_1$  a  $C_2$  jsou připojeny ke kladné svorce baterie a mají stejný elektrický potenciál jako kladná svorka. Obdobně jsou obě pravé elektrody záporně nabitě a mají stejný potenciál jako záporná svorka. Potenciálový rozdíl  $|\Delta V|$  je proto na obou kondenzátorech stejný. Pro kapacitu tedy platí

$$C_1 = \frac{Q_1}{|\Delta V|}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{|\Delta V|}. \quad (5.3.1)$$

Oba kondenzátory mohou být nahrazeny jedním kondenzátorem s kapacitou  $C_{\text{eq}}$  a celkovým nábojem  $Q$  dodaným baterií. Vzhledem k tomu, že náboj  $Q$  je sdílen oběma kondenzátory, musí platit

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 |\Delta V| + C_2 |\Delta V| = (C_1 + C_2) |\Delta V|. \quad (5.3.2)$$

Ekvivalentní kapacita je dána vztahem

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q}{|\Delta V|} = C_1 + C_2. \quad (5.3.3)$$

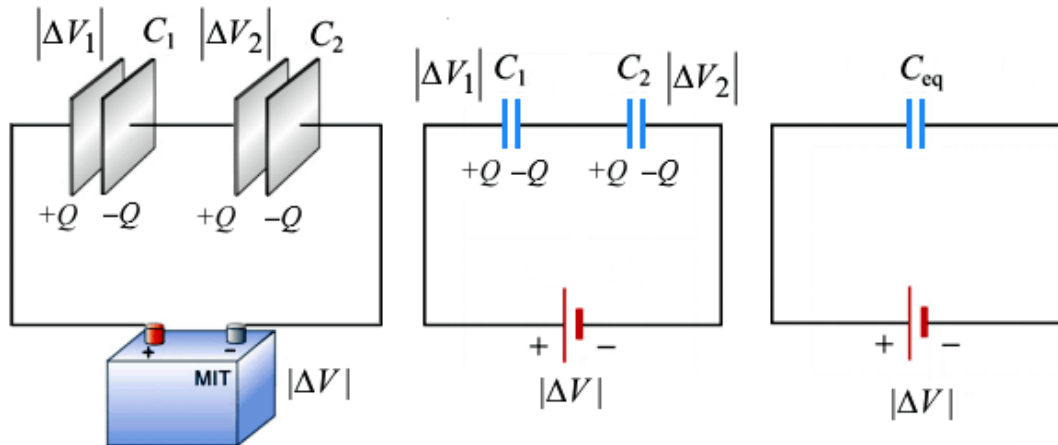
Kapacita kondenzátorů zapojených paralelně se sčítá. Toto pravidlo můžeme zobecnit na libovolný počet kondenzátorů:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N = \sum_{k=1}^N C_k. \quad (5.3.4)$$



### 5.3.2 Sériové zapojení

Předpokládejme dva, zpočátku nenabitě kondenzátory  $C_1$  a  $C_2$  spojené do série (viz Obr. 5.3.3). Na obou kondenzátorech je celkový potenciálový rozdíl  $|\Delta V|$ . Levá elektroda kondenzátoru je připojena ke kladné svorce baterie a získá kladný náboj  $+Q$ . Pravá elektroda kondenzátoru 2 je připojena k záporné svorce baterie a získá záporný náboj  $-Q$ . A co vnitřní elektrody? Původně byly nenabitě, nyní ale vnější elektrody přitahují stejné ale opačné množství náboje na vnitřních elektrodách. Pravá elektroda kondenzátoru 1 získá náboj  $-Q$ , levá elektroda kondenzátoru 2 získá náboj  $+Q$ .



Obr. 5.3.3: Kondenzátory zapojené v sérii a ekvivalentní kondenzátor.

Rozdíly potenciálů na jednotlivých kondenzátorech jsou

$$|\Delta V_1| = \frac{Q_1}{C_1}, \quad |\Delta V_2| = \frac{Q_2}{C_2}. \quad (5.3.5)$$

Z obrázku 5.3.3 vidíme, že celkový rozdíl potenciálů je prostým součtem obou rozdílů potenciálů

$$|\Delta V| = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|. \quad (5.3.6)$$

Při sériovém zapojení je vždy rozdíl potenciálů na všech kondenzátorech roven součtu rozdílů potenciálů na jednotlivých kondenzátorech. Uvažované dva kondenzátory mohou být nahrazeny kondenzátorem jediným s ekvivalentní kapacitou  $C_{\text{eq}} = Q / |\Delta V|$ . Vztah (5.3.6) pro součet potenciálů můžeme proto přepsat do tvaru

$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (5.3.7)$$

a pro výslednou kapacitu proto platí

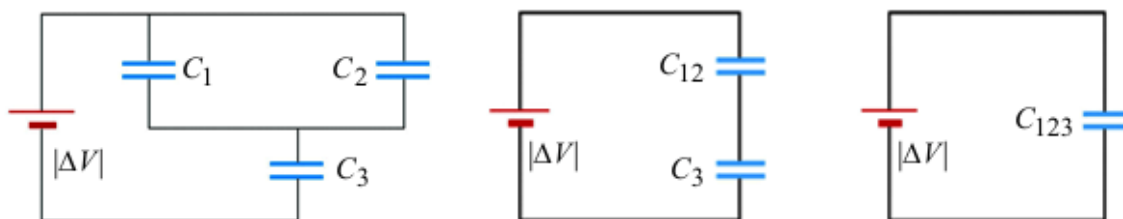
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (5.3.7)$$

Výraz snadno zobecníme pro libovolný počet kondenzátorů:

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}}. \quad (5.3.7)$$

### Příklad 5.4: Ekvivalentní kapacita

Nalezněte ekvivalentní kapacitu pro soustavu kondenzátorů zapojených podle Obr. 5.3.4.



Obr. 5.3.4: Kondenzátory zapojené jak sériově, tak paralelně. Patrné jsou jednotlivé fáze vytváření ekvivalentního obvodu

#### Řešení:

Kondenzátory  $C_1$  a  $C_2$  jsou zapojeny paralelně, a proto je nahradíme ekvivalentním kondenzátorem  $C_{12}$  s kapacitou

$$C_{12} = C_1 + C_2 .$$

Nyní jsou kondenzátory  $C_{12}$  a  $C_3$  zapojeny v sérii a proto pro ekvivalentní kapacitu platí

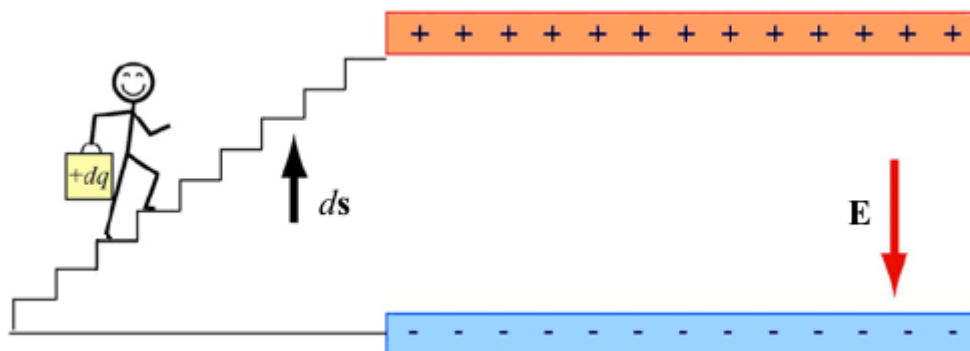
$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} .$$

Nyní snadno dopočteme

$$C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} .$$

## 5.4 Energie uložená v kondenzátoru

Již v úvodu jsme se zmínili, že kondenzátor může posloužit ke skladování energie. Množství uložené energie je rovno práci vynaložené na nabití kondenzátoru. Při nabíjení baterie vykonává práci přemístěním náboje z jedné elektrody kondenzátoru na druhou.



Obr. 5.4.1: Práci vykonává vnější činitel tak, že přenáší náboj  $dq$  ze záporné desky kondenzátoru na kladnou desku.

Předpokládejme, že na počátku není kondenzátor nabitý. V každé desce se nachází velké množství kladných i záporných nábojů. Jejich počet je ale shodný a celkový náboj obou desek je proto nulový a mezi deskami nepůsobí žádné elektrické pole. Představme si, že máme kouzelné vědro a schodiště vedoucí z dolní desky na horní (viz Obr. 5.4.1).

Začneme na dolní desce. Naplníme naše kouzelné vědro nábojem  $+dq$  a vynesme ho po schodišti na horní desku. Zde ho vylijeme a tím nabijeme horní desku kladným nábojem  $+dq$ . Dolní deska bude mít nyní náboj  $-dq$ . Sejdeme ze schodů a vědro opět naplníme nábojem  $+dq$ , vyjdeme po schodech a náboj vylijeme na horní desku. Tento proces mnohokrát opakujeme. Kondenzátor se postupně nabíjí a mezi deskami vzniká elektrické pole, které bylo na počátku nulové.

Předpokládejme, že náboj na horní desce je v určitém okamžiku roven  $+q$  a potenciálový rozdíl mezi deskami je proto  $|\Delta V| = q/C$ . K vylití dalšího vědra s nábojem  $dq$  na horní desku musíme překonat elektrické odpuzování a vykonat práci  $dW = |\Delta V| dq$ . Pokud je výsledný náboj na horní desce roven  $+Q$ , vykonali jsme práci

$$W = \int_0^Q |\Delta V| dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (5.4.1)$$

Tato práce je rovna elektrické potenciální energii  $U_E$  systému:

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q |\Delta V| = \frac{C \Delta V^2}{2}. \quad (5.4.2)$$

### 5.4.1 Hustota energie elektrického pole

Energii uloženou v kondenzátoru si můžeme představit jako energii vzniklého elektrického pole. V případě rovinného kondenzátoru je  $C = \varepsilon_0 A/d$  a  $\Delta V = Ed$ , proto

$$U_E = \frac{C \Delta V^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (Ad) \quad (5.4.3)$$

Součin  $Ad$  představuje objem kondenzátoru, a proto můžeme zavést objemovou hustotu elektrické energie

$$u_E = \frac{U_E}{\text{objem}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (5.4.4)$$

Povšimněte si, že hustota energie  $u_E$  je úměrná kvadrátu elektrického pole. Energii uloženou v kondenzátoru můžeme vypočítat i jiným způsobem. Na problém se podíváme z hlediska vnější práce. Desky kondenzátoru jsou opačně nabitě, a proto musí existovat síla, která mezi nimi udržuje konstantní vzdálenost. Z rovnice (4.4.7) vidíme, že malé množství náboje  $\Delta q = \sigma \Delta A$  je přitahováno k druhé desce silou  $\Delta F = \sigma^2 \Delta A / 2 \varepsilon_0$ . Pokud je celková plocha desky  $A$ , musí vnější činitel působit silou  $F_{\text{ext}} = \sigma^2 A / 2 \varepsilon_0$ , které odtahuje desky od sebe. Vzhledem k tomu, že intenzita elektrického pole mezi deskami je dána vztahem  $E = \sigma / \varepsilon_0$ , můžeme vnější sílu přepsat jako:

$$F_{\text{ext}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A. \quad (5.4.5)$$

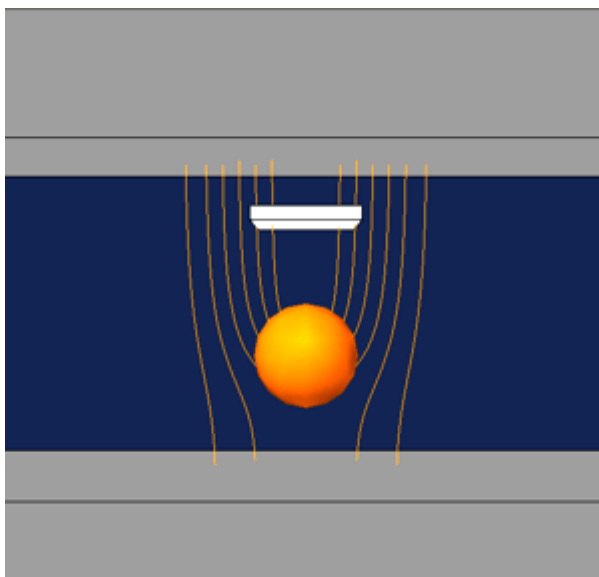
Povšimněte si, že vnější síla  $F_{\text{ext}}$  nezávisí na vzdálenosti  $d$ . Celkové množství práce vykonané vnější silou na udržování desek ve vzdálenosti  $d$  je

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_{\text{ext}} d = \left( \frac{\varepsilon_0 E^2 A}{2} \right) d \quad (5.4.6)$$

ve shodě se vztahem (5.4.3). Potenciální energie systému je rovna práci vykonané vnějšími silami a proto je  $u_E = W_{\text{ext}}/Ad = \varepsilon_0 E^2/2$ . Výraz pro hustotu potenciální energie je shodný s rovnicí (4.4.8) v kapitole 4. Hustota elektrické energie může proto být interpretována jako elektrostatický tlak  $P$ .

### **S** Interaktivní simulace 5.2: Náboj mezi deskami kondenzátoru

Aplet ukázaný na Obr. 5.4.2 je simulací experimentu, ve kterém je hliníková kulička umístěna na spodní desku kondenzátoru. Kulička je při nabíjení kondenzátoru zdvižena elektrostatickou silou. Pod horní elektrodou je nevodivá překážka, která zabrání kuličce v dotyku horní elektrody. Takový dotyk by totiž způsobil vybití kuličky.



**Obr. 5.4.2:** Elektrostatická síla působící na hliníkovou kuličku umístěnou mezi elektrody rovinného kondenzátoru.

Dokud se kulička dotýká spodní desky, má spolu s deskou přibližně stejnou povrchovou hustotu náboje. Při nabíjení kondenzátoru roste hustota náboje na kuličce úměrně rozdílu potenciálu mezi deskami. Navíc teče energie do prostoru mezi deskami, kde se vytváří elektrické pole. Tok energie je patrný jako pohyb siločiviek od okraje směrem do středu kondenzátoru.

Při zvětšování rozdílu potenciálů desek roste přitažlivá síla mezi kuličkou a horní deskou kondenzátoru. Projevuje se rostoucím tahem elektrického pole tak, jak se ke kuličce připojuje stále více siločiviek. Pokud je tah siločiviek dostatečný, aby vyrovnal gravitaci, začne kulička levitovat. Po oddělení kuličky od dolní desky se hustota náboje kuličky nadále již nemění. Na kuličku působí přitažlivá síla horní desky a odpudivá síla dolní desky. Výslednice sil míří směrem vzhůru.

### **P** Příklad 5.5: Hustota elektrické energie suchého vzduchu

Kritická hodnota elektrického pole, při které v suchém vzduchu dochází k průrazu je  $E_b = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ . Při tomto poli ztrácí vzduch své izolační schopnosti a dochází k elektrickému výboji. Určete hustotu elektrické energie při průrazu.

**Řešení:**

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2) (3 \times 10^6 \text{ V/m})^2 = 40 \text{ J/m}^3 \quad (5.4.7)$$

### **P** Příklad 5.6: Energie uložená v kulové slupce

Nalezněte energii uloženou v kovové kulové slupce o poloměru  $a$  a náboji  $Q$ .

**Řešení:**

Elektrické pole kulové slupky o poloměru  $a$  (příklad 4.3) je

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r > a \\ \mathbf{0}, & r < a \end{cases}. \quad (5.4.8)$$

Odpovídající hustota energie je vně sféry

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, \quad (5.4.9)$$

uvnitř sféry je hustota energie nulová. Vzhledem k tomu, že elektrické pole vně slupky nevymizí, musíme integrovat přes celou oblast od  $r = a$  do  $r = \infty$ . Ve sférických souřadnicích je objemový element  $dV = 4\pi r^2 dr$  a celková energie vychází

$$U_E = \int_0^\infty \left( \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{2} QV, \quad (5.4.10)$$

kde  $V = Q/4\pi\epsilon_0 a$  je elektrický potenciál na povrchu slupky (za předpokladu, že referenční hladinu volíme nulovou v nekonečnu). Snadno můžeme ověřit, že energie systému je rovna práci vykonané při nabíjení slupky. Předpokládejme, že v určitém okamžiku je na slupce náboj  $q$  a potenciál  $V = q/4\pi\epsilon_0 a$ . Práce potřebná k dodání dalšího náboje  $dq$  na slupku je  $dW = Vdq$ . Celková práce je proto

$$W = \int dW = \int Vdq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (5.4.11)$$

## 5.5 Dielektrika

V mnoha kondenzátorech je mezi desky vložen izolátor, například papír nebo plast. Takový materiál nazýváme dielektrikum a zajišťuje fyzické oddělení desek. Průrazné napětí dielektrik bývá vyšší než vzduchu a proto lze minimalizovat únik náboje při vysokých napětích.

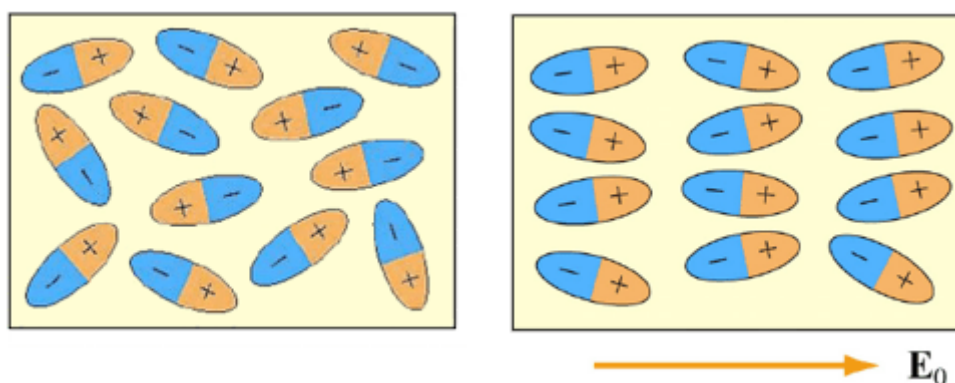
Experimentálně se zjistilo, že kapacita  $C$  vzroste, pokud vyplníme prostor mezi elektrodami dielektrikem. Předpokládejme, že kondenzátor bez dielektrika má kapacitu  $C_0$ . Pokud vložíme do prostoru mezi elektrody dielektrikum, kapacita vzroste na

$$C = \kappa_e C_0, \quad (5.5.1)$$

$\kappa_e$  se nazývá dielektrická konstanta. V následující tabulce jsou dielektrické konstanty některých materiálů. Experimentálně se ukázalo, že pro všechny dielektrické materiály platí  $\kappa_e > 1$ . V posledním sloupci tabulky je uvedena dielektrická pevnost. Jde o intenzitu pole, při kterém dojde v dielektriku k průrazu a náboj z elektrod začne odtékat.

Materiál	$\kappa_e$	Dielektrická pevnost ( $10^6$ V/m)
vzduch	1.0059	3
papír	3.7	16
sklo	4÷6	9
voda	80	–

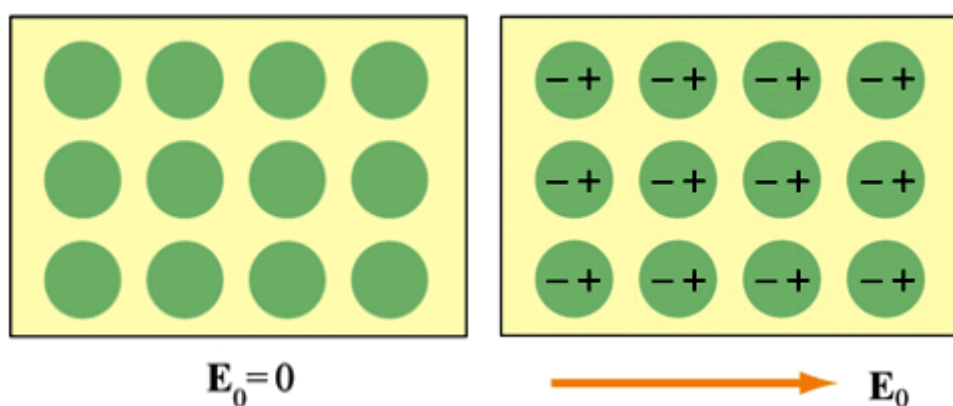
To, že kapacita roste při vložení dielektrika, lze vysvětlit na molekulární úrovni. Ukážeme, že hodnota  $\kappa_e$  je mírou dielektrické odezvy na vnější elektrické pole. Existují dva druhy dielektrik. První druh nazýváme *polární dielektrikum*. Polární dielektrikum obsahuje trvalé dipólové momenty. Příkladem takového dielektrika je voda.



**Obr. 5.5.1:** Orientace polárních molekul. Nalevo nepůsobí vnější pole, napravo je vnější pole nenulové.

Jak vidíme na Obr. 5.5.1, orientace polárních molekul je při nulovém poli náhodná. Pokud je přítomno vnější pole  $E_0$ , vzniká torzní síla, která zorientuje molekuly ve směru pole. Toto zorientování není díky tepelnému pohybu nikdy úplné. Seřazené molekuly následně generují elektrické pole, které má opačný směr než pole původní a menší velikost.

Druhým typem dielektrik jsou *nepolární dielektrika*. Tato dielektrika neobsahují stálé dipólové momenty. Elektrické dipólové momenty mohou být ovšem indukovány, pokud materiál umístíme do vnějšího elektrického pole.

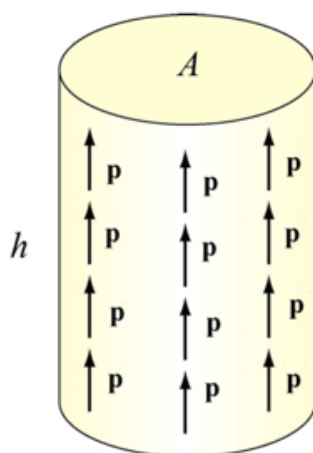


**Obr. 5.5.2:** Orientace nepolárních molekul. Nalevo nepůsobí vnější pole, napravo je vnější pole nenulové.

Obrázek 5.5.2 ukazuje orientaci nepolárních molekul v přítomnosti a bez přítomnosti vnějšího pole. Indukované náboje na povrchu molekul vytvoří elektrické pole  $\mathbf{E}_P$  s orientací opačnou k  $\mathbf{E}_0$ . Celkové pole potom je  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P$ ,  $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}_0|$ . V dalším textu ukážeme, jak lze indukované elektrické pole spočítat.

### 5.5.1 Polarizace

Ukázali jsme si, že dielektrické materiály se skládají z mnoha stálých nebo indukovaných elektrických dipólů. Důležité je poznat průměrné elektrické pole vytvářené mnoha seřazenými dipóly. Předpokládejme, že máme část materiálu ve tvaru válce s podstavou velikosti  $A$  a výšky  $h$  (viz Obr. 5.5.3). Ve válci je rovnoměrně rozmístěno  $N$  dipólů, každý z nich má dipólový moment  $\mathbf{p}$ .



Obr. 5.5.3: Válec s rovnoměrně rozdělenými dipóly.

Předpokládejme, že všechny dipólové momenty jsou orientovány ve směru osy válce. Každý elementární dipól vytváří elektrické pole. Jaké je celkové pole takto seřazených dipólů bez přítomnosti vnějšího pole?

Abychom zodpověděli tuto otázku, definujme vektor polarizace  $\mathbf{P}$  jako objemovou hustotu dipólového momentu:

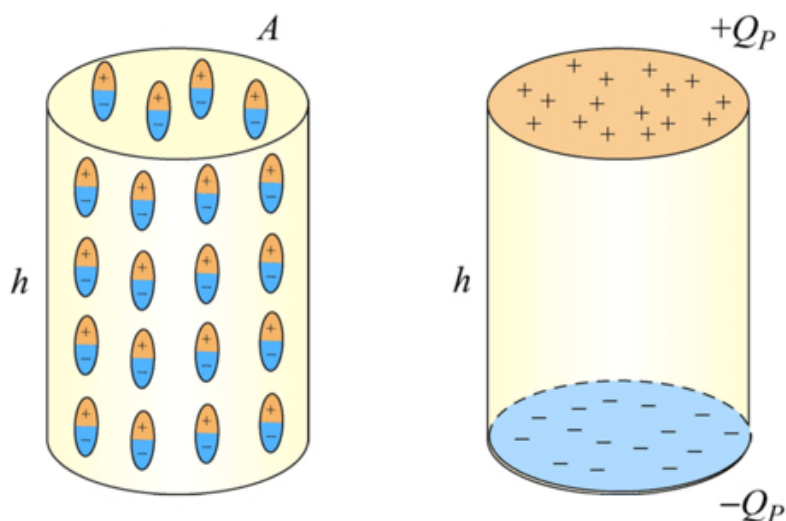
$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{\text{objem}} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k. \quad (5.5.2)$$

V případě našeho válce s dokonale orientovanými dipóly bude velikost polarizace rovna

$$P = \frac{Np}{Ah} \quad (5.5.3)$$

a směr shodný s orientací dipólů.

Jaké je průměrné elektrické pole vytvářené dipóly? Klíčem je pochopit, že situace zobrazená na Obr. 5.5.4 nalevo je ekvivalentní situaci zobrazené napravo, kde jsou náboje jednotlivých dipólů uvnitř válce nahrazeny dvěma ekvivalentními náboji  $\pm Q_P$  lokalizovanými na horní, resp. dolní podstavě válce.



Obr. 5.5.4: Nalevo – válec s rovnoměrným rozložením dipólů.  
Napravo – ekvivalentní rozdělení náboje.

Ekvivalence obou situací je zřejmá, pokud si uvědomíme, že každý kladný náboj uvnitř válce, který je lokalizován na vrcholu nějakého dipólu, je *vyrušen* záporným nábojem dipólu, který je právě nad ním. Jediný náboj, který se tímto mechanismem nevyruší, je na horní podstavě, protože zde již nejsou další dipóly, které by náboj eliminovaly. Vnitřek válce se proto jeví jako v průměru nenabitý (jde o průměrování přes mnoho dipólů), zatímco na horní podstavě je výsledný náboj kladný. Obdobně je na dolní podstavě válce záporný náboj.

Jak můžeme nalézt ekvivalentní náboj  $Q_P$  z veličin, které známe? Nejjednodušší je předpokládat, že náboje na obou podstavách vytvoří dipól s dipólovým momentem rovným součtu momentů všech elementárních dipólů, tj.  $Q_P h = Np$ , neboli

$$Q_P = \frac{Np}{h}. \quad (5.5.4)$$

Nyní určíme elektrické pole vytvořené náboji  $\pm Q_P$  na podstavách obdobně jako pro rovinný kondenzátor s plošnou hustotou náboje na deskách (horní a dolní podstavě)

$$\sigma_P = \frac{Q_P}{A} = \frac{Np}{Ah} = P. \quad (5.5.5)$$

Povšimněte si, že v SI je jednotka polarizace ( $\text{Cm/m}^3$ ) stejná jako plošná hustota náboje ( $\text{C/m}^2$ ). V obecném případě svírá vektor polarizace s vektorem vnější normály k podstavě úhel  $\theta$  a plošná hustota náboje

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta. \quad (5.5.6)$$

Ekvivalentní systém bude proto generovat průměrné elektrické pole velikosti  $E_P = P/\epsilon_0$ . Vzhledem k tomu, že směr tohoto pole je *opačný* vzhledem k vnějšímu poli, můžeme psát

$$\mathbf{E}_P = -\mathbf{P}/\epsilon_0. \quad (5.5.7)$$

Průměrné elektrické pole vytvářené dipóly má opačný směr než mají dipóly samotné. Je důležité si uvědomit, že jde jen o *průměrné* pole všech dipólů. Pokud bychom se přiblížili ke kterémukoli dipólu, uvidíme zcela odlišný obraz.

Předpokládali jsme, že všechny dipóly jsou dokonale seřazené. Pokud je orientace dipólů zcela náhodná, polarizace  $\mathbf{P}$  daná rovnicí (5.5.2) vyjde nulová a přítomnost dipólů nepovede



k vytvoření elektrického pole. Pokud jsou dipóly rozmístěny náhodně, ale preferují určitý směr, bude  $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$  a vznikne nenulové pole  $\mathbf{E}_p$ .

Zkoumejme nyní, jak se projeví dielektrikum v kondenzátoru. Nejprve předpokládejme, že atomy nebo molekuly dielektrika mají *permanентní* (stálý) dipólový moment. Samy od sebe se tyto dipóly nikdy neseřadí do preferovaného směru. Pokud neexistuje vnější pole, je výsledná polarizace  $\mathbf{P}$  nulová a průměrné elektrické pole  $\mathbf{E}_p$  také. Pokud ale vložíme dielektrikum do vnějšího pole  $\mathbf{E}_0$ , dipóly začnou pocítovat torzní sílu  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$ , která se bude snažit zorientovat dipóly  $\mathbf{p}$  do směru  $\mathbf{E}_0$ . Výsledkem bude nenulová polarizace  $\mathbf{P}$  rovnoběžná s vnějším polem  $\mathbf{E}_0$  a průměrné elektrické pole dipólů  $\mathbf{E}_p$  orientované proti směru vnějšího pole  $\mathbf{E}_0$ . Celková intenzita pole bude proto nižší. Celkové elektrické pole  $\mathbf{E}$  je součtem obou polí:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/\varepsilon_0. \quad (5.5.8)$$

V mnoha případech je polarizace nejenom ve stejném směru jako pole  $\mathbf{E}_0$ , ale je na něm lineárně závislá, tj  $\mathbf{P}$  je přímo úměrné  $\mathbf{E}_0$  (a tím také celkovému poli  $\mathbf{E}$ ). Je to i rozumný předpoklad, protože bez existence vnějšího pole  $\mathbf{E}_0$  by nedošlo k zorientování dipólů a polarizace  $\mathbf{P}$  by byla nulová. Lineární vztah mezi  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{E}$  napíšeme ve tvaru

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (5.5.9)$$

kde konstanta  $\chi_e$  se nazývá elektrická susceptibilita. Materiály splňující tento vztah nazýváme *lineární dielektrika*. Zkombinováním rovnic (5.5.8) a (5.5.9) dostaneme

$$\mathbf{E}_0 = (1 + \chi_e)\mathbf{E} = \kappa_e \mathbf{E}, \quad (5.5.10)$$

kde jsme označili

$$\kappa_e = 1 + \chi_e \quad (5.5.11)$$

dielektrickou konstantu. Vzhledem k tomu, že  $\chi_e > 0$  je vždy  $\kappa_e > 1$ . Pro výsledné elektrické pole proto máme

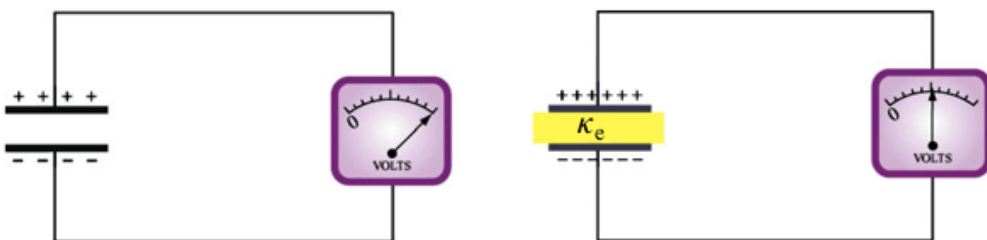
$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} < E_0. \quad (5.5.12)$$

Vlivem dielektrika je tedy elektrické pole v kondenzátoru vždy nižší než by bylo v prostoru bez dielektrika.

V případě dielektrik bez permanentních dipólových momentů pozorujeme obdobný jev, protože přítomnost elektrického pole  $\mathbf{E}_0$  indukuje elektrické dipólové momenty atomů či molekul. Tyto indukované elektrické momenty jsou rovnoběžné s elektrickým polem  $\mathbf{E}_0$  a vedou opět k polarizaci, která je rovnoběžná s  $\mathbf{E}_0$  a ke snížení intenzity celkového elektrického pole mezi elektrodami.

## 5.5.2 Dielektrika bez baterie

Na obrázku 5.5.5 je znázorněna situace, kdy baterii s potenciálovým rozdílem  $|\Delta V_0|$  připojíme nejprve svorkami ke kondenzátoru s kapacitou  $C_0$ . Kondenzátor se nabije nábojem  $Q_0 = C_0 |\Delta V_0|$ . Poté baterii odpojíme a ponecháme  $Q_0 = \text{const}$ .



**Obr. 5.5.5:** Vložení dielektrika za předpokladu, že  $Q_0 = \text{const}$ .

Poté vložíme mezi elektrody kondenzátoru dielektrikum. Rozdíl potenciálů na elektrodách se sníží faktorem  $\kappa_e$ :

$$|\Delta V| = \frac{|\Delta V_0|}{\kappa_e}. \quad (5.5.13)$$

Z toho plyne změna kapacity na hodnotu

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q_0}{|\Delta V_0|/\kappa_e} = \kappa_e \frac{Q_0}{|\Delta V_0|} = \kappa_e C_0. \quad (5.5.14)$$

Kapacita se v přítomnosti dielektrika zvýší faktorem  $\kappa_e$ . Elektrické pole v dielektriku bude

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_0|/\kappa_e}{d} = \frac{E_0}{\kappa_e}. \quad (5.5.15)$$

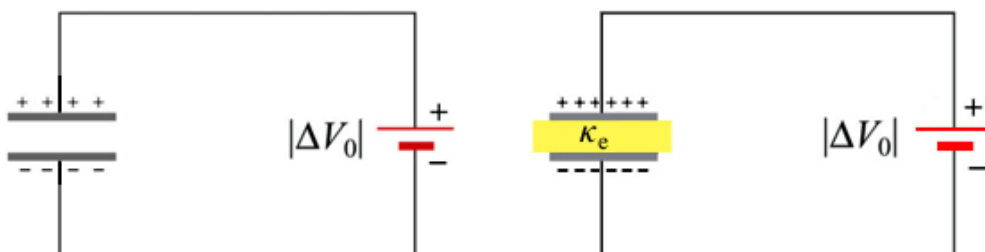
V přítomnosti dielektrika se elektrické pole v kondenzátoru sníží faktorem  $\kappa_e$ .

### 5.5.3 Dielektrika s baterií

Uvažme nyní druhou možnost, kdy baterie vytvářející rozdíl potenciálů zůstane připojena po vložení dielektrika k elektrodám kondenzátoru. Experimentálně bylo zjištěno (poprvé Faradayem), že se náboj na elektrodách zvýší faktorem  $\kappa_e$ :

$$Q = \kappa_e Q_0,$$

kde  $Q_0$  je náboj na elektrodách bez přítomnosti dielektrika.



**Obr. 5.5.6:** Vložení dielektrika za předpokladu, že  $|\Delta V_0| = \text{const}$ .

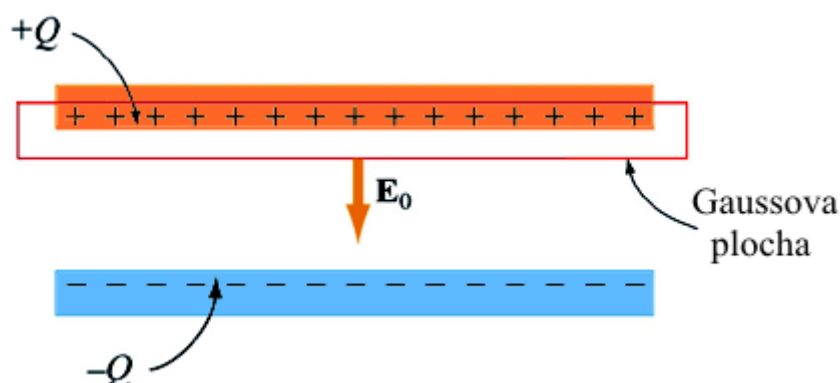
Kapacita se změní na hodnotu

$$C = \frac{Q}{|\Delta V_0|} = \frac{\kappa_e Q_0}{|\Delta V_0|} = \kappa_e C_0. \quad (5.5.17)$$

Jde o stejný výraz jako v případě, kdy jsme udržovali konstantní náboj na deskách kondenzátoru. Nyní se ovšem náboj zvýšil.

### 5.5.4 Gaussův zákon pro dielektrika

Uvažujme opět rovinný kondenzátor (viz Obr. 5.5.7).

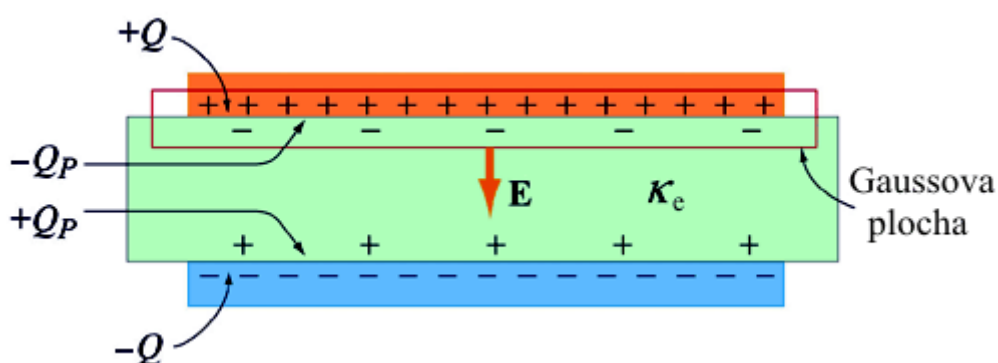


Obr. 5.5.7: Gaussova plocha bez přítomnosti dielektrika.

Bez přítomnosti dielektrika nalezneme pole  $\mathbf{E}_0$  mezi deskami z Gaussova zákona

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_0 A = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Pokud mezi desky vsuneme dielektrikum (Obr. 5.5.8), vznikne na povrchu desek indukovaný náboj  $Q_P$  opačného znaménka a výsledný náboj uzavřený v Gaussově ploše je  $Q - Q_P$ .



Obr. 5.5.8: Gaussova plocha v přítomnosti dielektrika.

Z Gaussova zákona odvodíme

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0} \quad (5.5.18)$$

neboli

$$E = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0 A}. \quad (5.5.19)$$

V předchozím textu jsme si ukázali, že dielektrikum zeslabí původní pole  $\mathbf{E}_0$  faktorem  $\kappa_e$ , proto

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0 A} = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0 A}. \quad (5.2.20)$$

Z této relace snadno určíme indukovaný náboj

$$Q_P = Q \left( 1 - \frac{1}{\kappa_e} \right). \quad (5.2.21)$$

Indukovaný náboj lze zapsat také pomocí plošné hustoty náboje

$$\sigma_P = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\kappa_e} \right). \quad (5.2.22)$$

Povšimněte si, že v limitě  $\kappa_e \rightarrow 1$  je  $Q_P = 0$ , což odpovídá situaci bez dielektrika.

Dosaďme nyní výsledek (5.2.21) do Gaussova zákona (5.5.18)

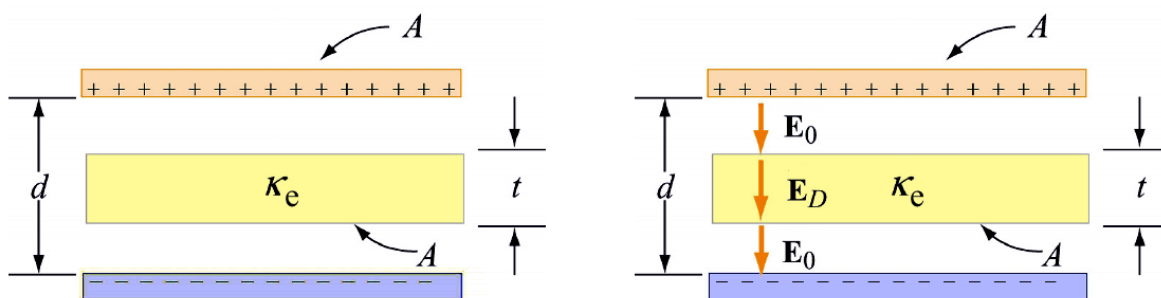
$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = \frac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad (5.5.23)$$

kde jsme označili  $\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0$  tzv. dielektrickou permitivitou. Další možností je zavést *indukci elektrického pole*  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \kappa_e \mathbf{E}$  a Gaussův zákon v dielektriku psát ve tvaru

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q. \quad (5.5.24)$$

### **P** Příklad 5.7: Kapacita v přítomnosti dielektrika

Předpokládejme, že mezi elektrody kondenzátoru je vsunuta nevodivá vrstva tloušťky  $t$  a plochy  $A$ , viz Obr. 5.5.9 (nalevo). Vrstva nemusí být nutně uprostřed mezi elektrodami. Jaká je kapacita systému?



**Obr. 5.5.9:** *Nalevo* – kondenzátor s dielektrikem.  
*Napravo* – elektrické pole mezi elektrodami.

### **Řešení:**

Chceme-li nalézt kapacitu, musíme nejprve určit rozdíl potenciálu  $\Delta V$ . Z předchozího víme, že bez přítomnosti dielektrika je pole mezi elektrodami dáno vztahem  $E_0 = Q/\varepsilon_0 A$

a v přítomnosti dielektrika je pole v dielektriku rovno  $E_D = E_0/\kappa_e$ . (viz Obr. 5.5.9 napravo). Potenciál nalezneme integrací elektrického pole podél úsečky vedoucí z horní na dolní elektrodu:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_+^- E dl = -\Delta V_0 - \Delta V_D = -E_0(d-t) - E_D t = \\ &= -\frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d-t) - \frac{Q}{\varepsilon_0 \kappa_e A} t = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left[ d-t \left( 1 - \frac{1}{\kappa_e} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

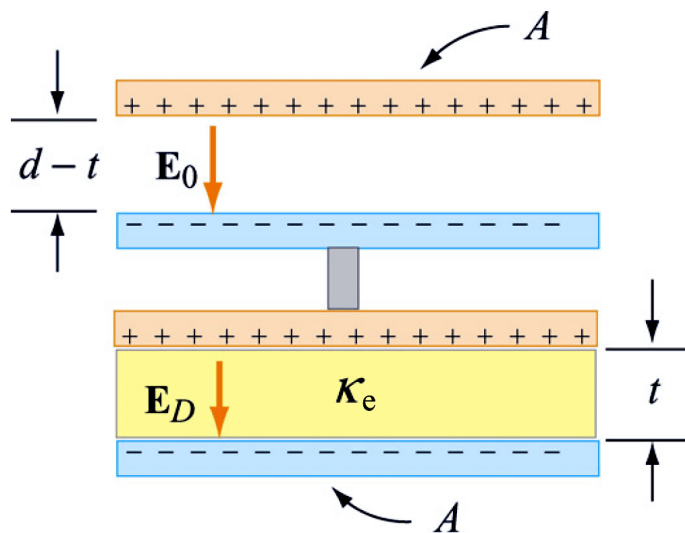
kde jsme označili  $\Delta V_D = E_D t$  rozdíl potenciálů mezi horní a dolní plochou dielektrika. Pro kapacitu máme

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t \left( 1 - \frac{1}{\kappa_e} \right)}. \quad (5.5.26)$$

Zajímavé jsou následující limity

1. Pro  $t \rightarrow 0$  se tloušťka dielektrika blíží nule a kapacita dává  $C = \varepsilon_0 A/d = C_0$ . Jde o očekávaný výsledek platící pro kondenzátor bez dielektrika.
2. Pro  $\kappa_e \rightarrow 1$  dostaneme  $C \rightarrow \varepsilon_0 A/d = C_0$ . Situace opět koresponduje s případem bez dielektrika.
3. Pro  $t \rightarrow d$  je celý prostor kondenzátoru vyplněn dielektrikem a platí  $C \rightarrow \kappa_e \varepsilon_0 A/d = \kappa_e C_0$ .

Je dobré si také uvědomit, že tato konfigurace je ekvivalentní dvěma kondenzátorům zapojeným do série podle obrázku 5.5.10.



Obr. 5.5.10: Ekvivalentní konfigurace.

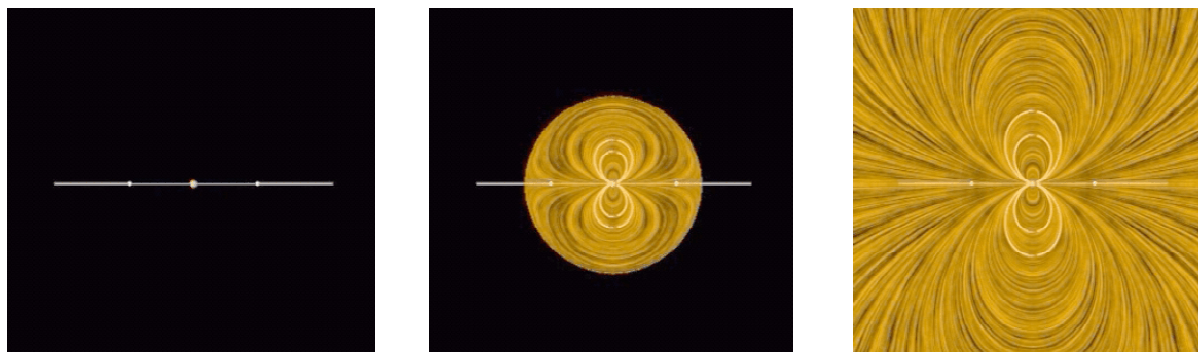
Podle rovnice (5.3.8) pro sériové zapojení platí

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{\varepsilon_0 A} + \frac{t}{\kappa_e \varepsilon_0 A}. \quad (5.5.28)$$

## 5.6 Vytváření elektrických polí

### **V** Animace 5.1: Vytvoření elektrického dipólu

Elektrická pole vytvářejí elektrické náboje. Pokud by neexistovaly náboje a neexistovaly by nikdy v minulosti, nebylo by nikde v prostoru žádné elektrické pole. Jak elektrické pole vzniká a jak vyplní prostor? Odpověď na tuto otázku si přiblížíme v animaci, ve které na začátku není žádné elektrické pole a nakonec toto pole vyplňuje celý prostor.



**Obr. 5.6.1:** Vytvoření elektrického dipólu. *Nalevo* – situace před rozdělením nábojů. *Uprostřed* – situace těsně po rozdělení nábojů. *Napravo* – situace dlouhou dobu po rozdělení nábojů.

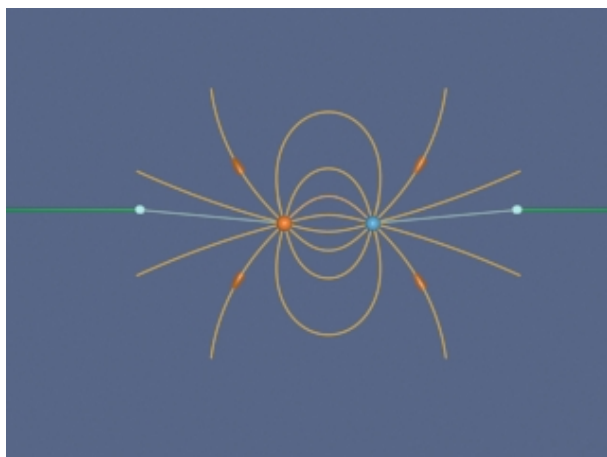
Předpokládejme, že kladný náboj je umístěn přesně na místě záporného náboje, takže se vzájemně vyruší. V celém prostoru není žádné elektrické pole. Nyní tyto dva náboje od sebe nepatrně oddělme tak, aby mezi nimi byla malá nenulová vzdálenost. Pokud je ponecháme v této pozici po dostatečně dlouhou dobu, vytvoří se kolem nich pole elektrického dipólu.

Popišme nyní vznik dipólového pole podrobněji. Na Obr. 5.6.1 jsou tři snímky animace zobrazující oddělení nábojů. Na prvním snímku jsou náboje na stejném místě a elektrické pole je nulové v celém prostoru. Na druhém snímku je ukázáno, co se stane, když náboje oddělíme. Kolem nábojů vznikne expandující kulová oblast vyplněná elektrickým polem. Poslední snímek mapuje situaci dlouhou dobu po oddělení nábojů (náboje byly odděleny a poté se jejich konstantní vzdálenost již nemění). Kolem nábojů je patrné pole elektrického dipólu.

Co nám tato sekvence znázorňuje? Můžeme učinit následující závěry:

1. Elektrické pole generují náboje. Pokud nemáme náboje, nevznikne elektrické pole.
2. Pokud se v prostoru objeví nevykompenzovaný náboj, vzniklé elektrické pole nevyplní prostor okamžitě. Elektrické pole se šíří od zdroje konečnou rychlostí. Později uvidíme, že jde o rychlost světla.
3. Jakmile se rozdělení náboje ustálí, ustálí se i pole v okolí nábojů. Počáteční obrazec polí při oddělování nábojů ve skutečnosti představuje „záblesk“ elektrického dipólového záření. K zářivým procesům se vrátíme na konci tohoto kurzu. Do té doby budeme záření zanedbávat. Ustálený obrazec polí je pole elektrického dipólu diskutované dříve.

Vnější činitel (síla) oddělující náboje musí vykonávat práci, protože se náboje při vzdalování vzájemně přitahují. Vykonaná práce překonává elektrostatické přitahování a přemění se v energii záření a energii uloženou v elektrickém dipólovém poli, které vidíme na obrázku 5.6.1 napravo.



**Obr. 5.6.2:** Vytvoření elektrických polí dvou bodových nábojů. Dva nesouhlasné náboje jsou od sebe navzájem vzdalovány. Na obrázku jsou v určité vzdálenosti uměle zakončeny silokřivky polí, abychom se vyhnuli při vizualizaci nepřehlednostem.

Na Obr. 5.6.2 vidíme kompletní sekvenci oddělení dvou bodových nábojů opačných znamének při zanedbaném záření. Povšimněte si typického radiálního pole v blízkosti každého náboje.

#### **V Animace 5.2: Vytvoření a zánik elektrické energie**

Podívejme se na vznik elektrické energie v jiné souvislosti. Zanedbáme ztráty energie způsobené zářením. Na obrázku 5.6.3 je jeden snímek animace ilustrující proces vzniku a zániku elektrické energie.



**Obr. 5.6.3: Vznik a zánik** elektrické energie

Začneme s pěti zápornými a pěti kladnými náboji, všemi umístěnými v jednom bodu prostoru. Poněvadž zde není žádný celkový náboj, není zde ani elektrické pole. Nyní začneme pohybovat jedním kladným nábojem konstantní rychlostí z počáteční polohy do místa ve vzdálenosti  $L$  podél vodorovné osy. Až toto provedeme, začneme stejným způsobem pohybovat druhým kladným nábojem do stejného místa, kde je již umístěn první. Poté budeme pokračovat stejně se zbytkem kladných nábojů, dokud všechny neumístíme po vodorovné ose na stejné místo ve vzdálenosti  $L$  od jejich počáteční polohy. Obrázek 5.6.3 ukazuje konfiguraci elektrického pole během tohoto procesu. Ke znázornění velikosti elektrického pole využíváme barevného kódování šumové textury. Nejsilnější pole jsou bílá, nejslabší černá a pole prostřední síly jsou žlutá.

V průběhu animace „vzniku“ pole spojené s obrázkem 5.6.3 narůstá intenzita elektrického pole s každým kladným nábojem, který je umístěn na své místo. Tato energie přitéká podél drah, po kterých se náboje pohybují, a je dodávána vnější silou, která pohybuje nábojem proti elektrickému poli ostatních nábojů. Práce, kterou tato síla vykonává při rozdělávání jednotlivých nábojů a při překonávání jejich elektrické přitažlivosti se přemění v energii elektrického pole. Máme zde také animaci provázanou s obrázkem 5.6.3 ilustrující opačný proces, tj. kdy v sekvencích vracíme jednotlivé kladné náboje na jejich původní společné místo. Na konci tohoto procesu zde nemáme žádné elektrické pole, protože zde nejsou žádné nevykompenzované náboje.

V průběhu procesu „zániku“, kterou znázorňuje animace provázaná s obrázkem 5.6.3, se intenzita elektrického pole snižuje s každým kladným nábojem, který se navrátí do původní polohy. Tato energie odtéká z pole zpět podél drah, po kterých se náboje pohybují. Nyní se energie navrácí do oblasti vzniku vnějších sil pohybujících nábojem konstantní rychlostí podél siločar elektrického pole ostatních nábojů. Energie, kterou nyní odčerpává vnější činitel při zániku elektrického pole, je přesně stejného množství jako energie, kterou vnější činitel vynaložil při vzniku elektrického pole v předchozím případě, ovšem při zanedbání zářivých ztrát. Tyto ztráty jsou ale skutečně zanedbatelné, pokud pohybujeme náboji rychlostmi mnohem menšími, než je rychlost světla. Pokud zanedbáme tyto ztráty, je proces reversibilní. To znamená, že celková energie, kterou vnější síly vložily do vzniku elektrického pole, se přesně vrátí při zániku pole.

A ještě jedna poznámka na závěr. Kdykoliv se vytváří elektromagnetická energie, pak se elektrický náboj pohybuje (nebo je jím pohybováno) proti elektrickému poli ( $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} > 0$ ). Kdykoliv elektromagnetické pole zaniká, pak se elektrický náboj pohybuje (nebo je jím pohybováno) podél elektrického pole ( $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} < 0$ ). Až se dostaneme ke vzniku a zániku magnetického pole, uvidíme, že toto pravidlo zde platí naprosto stejně.

## 5.7 Shrnutí

- **Kondenzátor** je zařízení k uchování elektrického náboje a potenciální energie. **Kapacita** kondenzátoru je poměr náboje uloženého na kondenzátoru a rozdílu potenciálu mezi elektrodami:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Systém	Kapacita
izolovaná nabitá koule o poloměru $R$	$C = 4\pi\epsilon_0 R$
kondenzátor s rovinnými deskami o vzdálenosti $d$ a ploše $A$	$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$
válcový kondenzátor délky $L$ , vnitřním poloměru $a$ a vnějším $b$	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$
kulový kondenzátor s vnitřním poloměrem $a$ a vnějším $b$	$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$



- Ekvivalentní kapacita kondenzátorů spojených paralelně nebo sériově je

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad \text{paralelní zapojení,}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \text{sériové zapojení.}$$

- Práce vykonaná při nabíjení kondenzátoru na náboj  $Q$  (shodná s energií uloženou v kondenzátoru) je

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q|\Delta V| = \frac{1}{2}C|\Delta V|^2.$$

- Energie uložená v kondenzátoru může být také uvažována jako energie elektrického pole. Její **objemová hustota** (shodná s **elektrostatickým tlakem** na povrchu) je

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

- Vložení dielektrika s **dielektrickou konstantou**  $\kappa_e$  mezi elektrody se projeví nárůstem kapacity faktorem  $\kappa_e$ :

$$C = \kappa_e C_0.$$

- Vektor polarizace  $\mathbf{P}$  je objemová hustota elektrického dipólového momentu:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k.$$

- Elektrické pole indukované polarizací je

$$\mathbf{E}_P = -\mathbf{P} / \varepsilon_0.$$

- V přítomnosti dielektrika s dielektrickou konstantou  $\kappa_e$  je celkové elektrické pole ( $\mathbf{E}_0$  je označeno pole bez dielektrika)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P = \mathbf{E}_0 / \kappa_e.$$

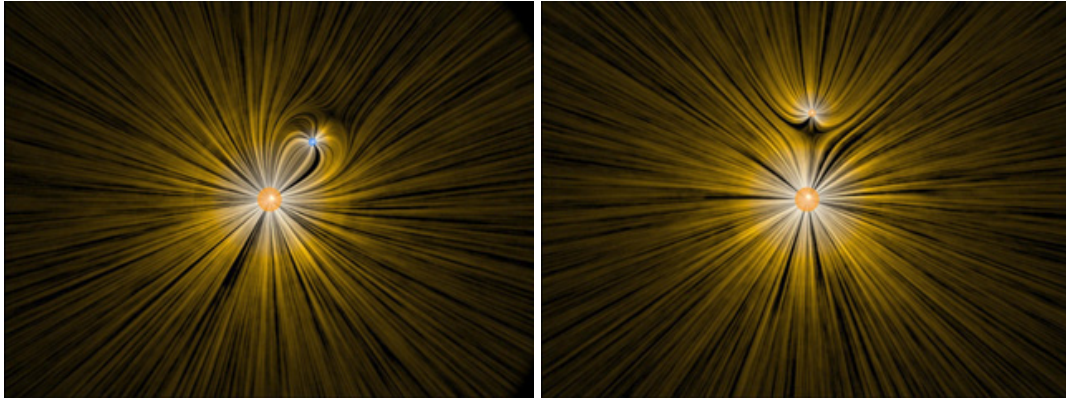
## 5.8 Dodatek: Iontová a van der Waalsova síla

V tomto dodatku si ukážeme, že elektrická pole jsou zodpovědná za to, jak atomy drží pohromadě.

*„...jak náš zrak v myšlenkách proniká do menších a menších vzdáleností a kratších a kratších časů, nalezneme chování přírody tak naprosto odlišné od toho, jaké pozorujeme ve viditelném a hmatatelném světě, který nás obklopuje, že žádný model utvořený podle našich velkorozměrových zkušeností nemůže být „pravdivý“. Takový model, který by nás zcela uspokojil, je nejen nedostupný, ale také nepředstavitelný. Nebo abychom byli přesní, můžeme si ho představit, nicméně to, co si představujeme, je špatně.“*

Erwin Schrödinger

Elektromagnetické síly jsou „pojivem“, které drží atomy pohromadě, tj. drží elektrony v blízkosti protonů a vážou atomy dohromady v látkách. Zde ukážeme velmi zidealizovaný semiklasický model tohoto problému.



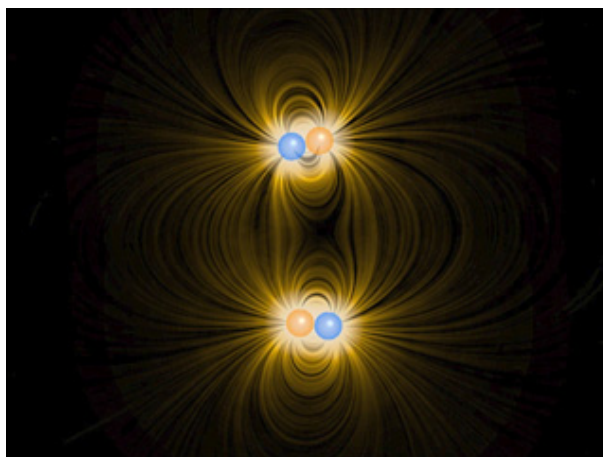
**Obr. 5.8.1:** **Záporný** (nalevo) nebo **kladný** (napravo) náboj se pohybuje v okolí hmotného kladného náboje umístěného v počátku. Dráha náboje je vychýlená z přímého směru díky tahu a tlaku silokřivek, která přenáší elektrická pole obklopující náboje.

Obrázky 5.8.1 jsou příklady napětí přenášených polí, tak jak jsme je viděli dříve. Nalevo vidíme záporný náboj pohybující se okolo hmotného kladného náboje. Jeho dráha je vychýlena směrem k tomuto náboji díky přitažlivosti, kterou tyto náboje navzájem pocítují. Toto přitahování je způsobeno napětími silokřivek, která přenášejí elektromagnetické pole. Jednoduchá interpretace interakce znázorněné na obrázku 5.8.1 je taková, že přitažlivost je prvotně způsobená tahem silokřivek přeneseným elektrickým polem, které náboje obklopuje.

Na obrázku 5.8.1 (napravo) vidíme kladný náboj, jak se pohybuje okolo jiného hmotného kladného náboje. Jeho dráha je zakřivena od druhého náboje vlivem odpuzivých sil, kterými na sebe oba náboje působí. Tyto odpuzivé síly jsou opět způsobeny napětími silokřivek přenášenými elektromagnetickými poli, stejně jako jsme pozorovali výše. Tentokrát z obrázku vidíme, že odpuzování je zejména způsobené tlakem silokřivek, který přenáší pole obklopující oba náboje.

Co je společné oběma obrázkům? Je to pole neboli „aura“, která obklopuje nabitě objekty. Existence tohoto pole je mechanismem, kterým náboje mezi sebou navzájem interagují. Tyto náboje se nikdy přímo „nedotknou“. Interagují spolu pouze prostřednictvím svých polí. V následující části se pokusíme načrtnout, jak interakce drží látku pohromadě.

Na obrázku 5.8.2 je znázorněna interakce čtyř nábojů se stejnými hmotnostmi. Dva náboje jsou nabitě kladně a dva záporně. Všechny mají stejnou velikost náboje. Částice interagují Coulombovou silou. Nyní se musíme zmínit o kvantově mechanické „Pauliho“ síle, která je vždy odpuzivá a je velice důležitá na malých vzdálenostech, zatímco na velkých vzdálenostech je zanedbatelná. Kritická vzdálenost, kdy začíná být dominantní, je přibližně ve vzdálenosti kuliček znázorněných na obrázku 5.8.2. Tato „Pauliho“ síla je kvantově mechanického původu a zabraňuje nábojům, aby se zhroutily všechny do jednoho bodu (tj. udržuje záporně nabitě částice a kladně nabitě částice od sebe v konečných vzdálenostech). Navíc je pohyb částic utlumen členem úměrným jejich rychlosti, což jim umožňuje zůstat ve stabilních nebo metastabilních stavech.



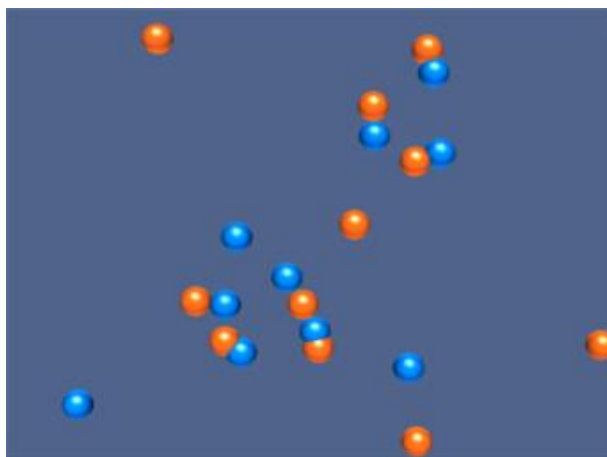
**Obr. 5.8.2:** Čtyři náboje s dynamickým útlumem interagující Coulombovou silou a na blízké vzdálenost se odpuzující Pauliho silou.

Když se nabité částice začnou vyvíjet z počátečního stavu, první věc, která se přihodí (velice rychle) je, že se náboje spárují do dipólů. Je to rychlý proces, protože Coulombova síla působící mezi nerovnovážnými náboji je velmi velká. Tento proces se nazývá „iontová vazba“ a je zodpovědná za meziatomární síly například u obyčejné kuchyňské soli NaCl. Poté, co se zformují dipóly, přetrvává zde stále interakce mezi sousedními dipóly, ale je mnohem slabší, protože elektrické pole dipólu ubývá mnohem rychleji než pole samotného náboje. To proto, že celkový náboj dipólu je nulový. Když se dva opačné náboje dostanou k sobě velmi blízko, jejich elektrická pole se navzájem „téměř“ vyruší.

Ačkoliv v principu může být dipól-dipólová interakce jak přitažlivá, tak i odpudivá, ve skutečnosti zde existují točivé momenty, které otočí dipól tak, že dipól-dipólová síla je přitažlivá. Po delším čase přivede tato dipól-dipólová interakce oba dipóly do vázaného stavu. Přitažlivá síla, která působí na oba dipóly, se nazývá „van der Waalsova“ síla a je zodpovědná za mezimolekulární síly, které k sobě vážou sloučeniny v pevných látkách. Poznamenejme, že elektrostatické síly také vážou elektrony k jádru.

### **S Interaktivní simulace 5.3: Soubor nábojů ve dvou dimenzích**

Obrázek 5.8.3 je interaktivní dvourozměrná ShockWave aplikace, která ukazuje stejnou dynamickou situaci, jako je na obrázku 5.8.2 s rozdílem, že nyní jsme zahrnuli větší počet kladných a záporných nábojů a zrušili jsme vykreslování polí, takže můžeme nyní měnit simulaci interaktivně v reálném čase. Na počátku umístíme náboje na náhodná místa v prostoru a necháme je vyvíjet se v čase pod vlivem sil, které na ně působí (elektrostatické přitahování / odpuzování, Pauliho odpuzování na velmi malých vzdálenostech a dynamický brzdňý člen úměrný rychlosti). Částice nakonec skončí v konfiguraci, ve kterých jsou celkové síly působící na jednotlivé částice v podstatě nulové. Jak jsme viděli v animaci na obrázku 5.8.2 výše, nejprve se jednotlivé částice zkombinují do dipólů a potom pomalu utvoří větší struktury. Prstence a lineární konfigurace jsou těmi nejobecnějšími uspořádáními, ale kliknutím a táhnutím částic může uživatel dosáhnout mnohem složitějších metastabilních uspořádání.



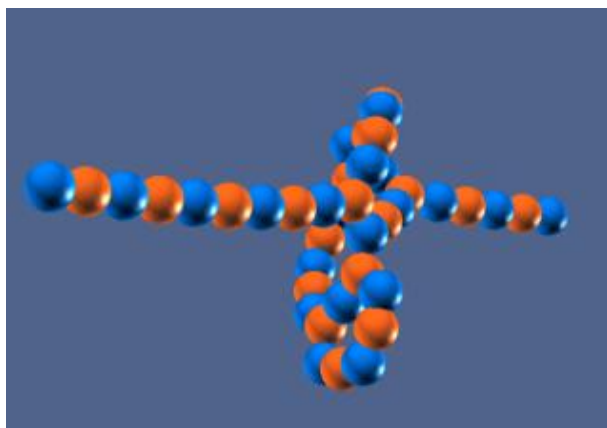
**Obr. 5.8.3:** Dvojdímenzionální interaktivní simulace souboru kladných a záporných nábojů, na které působí Coulombova síla, Pauliho odpuzivá síla a dynamický útlum.

Především si sekvenci vyzkoušejte v akci. Odstartujte ji a počkejte, dokud se simulace nevyvine do bodu, kdy máme řetízek ze sedmi či osmi částic. Kliknutím levým tlačítkem na jeden z konců řetízku nábojů za ně můžeme myší táhnout. Pokud to děláme dostatečně pomalu, celý řetízek následuje náboj, za který takto virtuálně táhneme. Když pohybujeme nábojem, přidáváme přímo energii tomu náboji, kterým za jeden konec řetízku táhneme. Tato energie jednak přímo vstupuje do pohybu náboje, ale je také předána zbytku nábojů prostřednictvím elektromagnetických polí. „Energie“, kterou náboj na opačném konci řetízku přijme o chvíli později poté, co jsme začali pohybovat s prvním nábojem, je dodána tokem energie v elektromagnetickém poli prostorem z místa, ve kterém jsme s pohybem náboje začali.

Takto interagují síly v mikrosvětě. Každý fyzikální objekt je pohromadě držený elektrostatickými silami. Kvantová mechanika jej zadržuje před kolapsem, elektrostatické síly mu brání před rozpadnutím. Když například zvedáte nějaký objekt z podlahy za jeho vrchní část, energie je přenášena z místa, kde jste objekt uchopili do jeho zbylé části tokem energie elektromagnetického pole. Když předmět zvedáte, konec objektu se nijak „nedotýká“ místa, za který jste předmět uchopili. Všechna energie, která je konci předmětu dodávána, aby se zvedl proti gravitační síle, je dodána tokem energie skrze elektromagnetické pole, které tak drží objekty pohromadě.

### **S** Interaktivní simulace 5.4: Soubor nábojů ve třech dimenzích

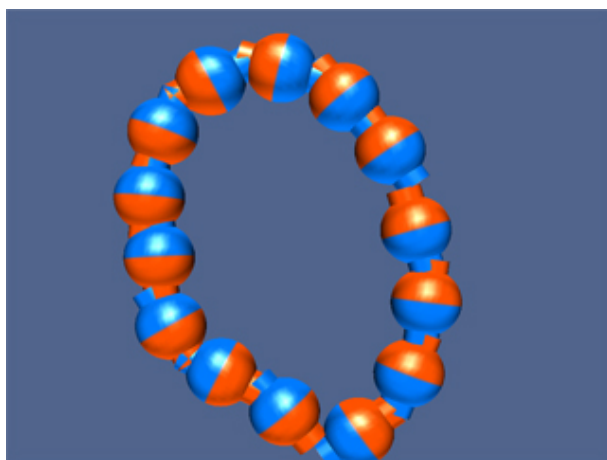
Obrázek 5.8.4 je interaktivní 3D ShockWave animace, která ukazuje stejnou dynamickou situaci, jako obrázek 5.8.3, jen s tím rozdílem, že nyní scénu vidíme ve třech rozměrech. Se scénou můžeme pravým tlačítkem myši otáčet a vidět tak vše z různých úhlů pohledu. Začneme s náboji umístěnými v náhodných polohách v prostoru a necháme je vyvíjet se v čase v soulase se silami, které na ně působí (elektrostatické přitahování, odpuzování, Pauliho odpuzování na velmi malých vzdálenostech a dynamický útlum úměrný rychlosti). Tato konfigurace je mnohem obecnější díky užití třetí dimenze. Navíc můžete stlačením klávesy „w“ zapnout sílu, která přitáhne náboje k sobě. Zapnutím této síly můžeme nechat náboje shromáždit se a vypnutím je opět nechat expandovat a zaujímat složité třírozměrné metastabilní struktury. Jeden takový příklad je na obrázku 5.8.4.



**Obr. 5.8.4:** Třídímní interaktivní simulace souboru kladných a záporných nábojů, na které působí Coulombova síla, Pauliho odpudivá síla a dynamický útlum.

### **S** Interaktivní simulace 5.5: Soubor dipólů ve dvou dimenzích

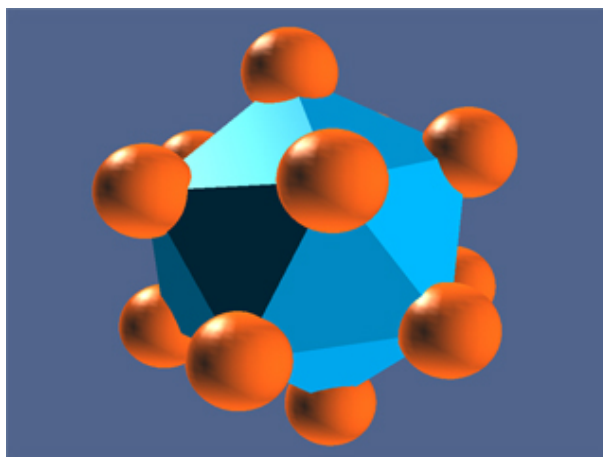
Na obrázku 5.8.5 je interaktivní ShockWave simulace, která ve dvou rozměrech ukazuje, jak spolu navzájem interaguje soubor elektrických dipólů. Dipóly se vytvoří na náhodných místech v prostoru a s náhodnou orientací, ale se všemi svými dipólovými vektory v rovině animace. Jak jsme již poznamenali výše, ačkoliv dipól-dipólová interakce je v principu jak přitažlivá, tak i odpudivá, ve skutečnosti se ale dipóly zorientují tak, aby síly mezi nimi byly přitažlivé. V této ShockWave simulaci takového chování vidíme, tj. dipóly se orientují tak, že se přitahují a toto přitahování mezi nimi vytvoří vázané struktury.



**Obr. 5.8.5:** Interaktivní simulace souboru elektrických dipólů, na které působí Coulombova síla, Pauliho odpudivá síla a dynamický útlum.

### **S** Interaktivní simulace 5.6: Past na nabitě částice

Obrázek 5.8.6 ukazuje interaktivní simulaci pasti na nabitě částice. Částice zde interagují jako dříve, ale nyní navíc pociťují sílu, která je tlačí směrem k počátku bez ohledu na znaménko jejich náboje. Tato síla „pasti“ lineárně roste se vzdáleností od počátku. Částice jsou nejprve rozházeny v prostoru naprosto nahodile, ale dynamický útlum je „ochlazuje“ a ony „krystalizují“ v různých vysoce symetrických strukturách, které závisí jen na počtu částic. Simulace napodobuje vysoce uspořádané struktury, které známe i z přírody (například sněhové vločky).



**Obr. 5.8.6:** Interaktivní simulace částicové pasti. Částice interagují podle stejných pravidel, jako dříve, ale nyní navíc každá pociťuje sílu, která ji přitahuje směrem k počátku bez ohledu na znaménko jejího náboje.

### Cvičení

Vyzkoušejte si následující zajímavé cvičení. Začněte simulaci. Simulace nejdříve začíná s 12 kladně nabitými částicemi v náhodných pozicích (je samozřejmě možné začít s jakýmkoliv množstvím různě nabitých částic, ale pro tuto chvíli jsme zvolili 12). V polovině případů se ustálí rovnováha tak, že ve středu struktury bude jedna částice a ostatních 11 na povrchu sféry, která ji obklopuje. V druhé polovině případů se všechny částice ustálí na povrchu sféry a ve středu nebude ani jedna nabitá částice. Ať jste zvolili jakoukoliv počáteční konfiguraci, zkuste pohybem jedné částice z nebo do středu změnit jednu stabilní konfiguraci v druhou. Pro označení částice zmáčkněte klávesu SHIFT a levé tlačítko myši a pro její pohyb použijte kurzorových šipek. Možná budete muset zkusit označit více částic, než se vám jednu podaří do počátku a rovnovážného stavu dostat.

Vyzkoušejte i jiný pokus. Přidejte dalších 8 kladných nábojů (zmáčknutím klávesy „p“ 8-krát za sebou). Tedy máme celkem 20 nabitých částic. Otáčením sféry kolem dokola vidíme, že uvnitř sféry máme 2 částice a 18 částic je obklopuje. Je toto nejnižší počet částic, v jejichž rovnovážné konfiguraci máme uzavřeny sférou 2 částice? Můžeme toto dokázat s 18-ti částicemi? Po zmáčknutí klávesy „s“ můžete zobrazit povrch, který je provázán s pozicemi všech 18-ti nábojů. V tomto zobrazení je symetrie mnohem jasnější.

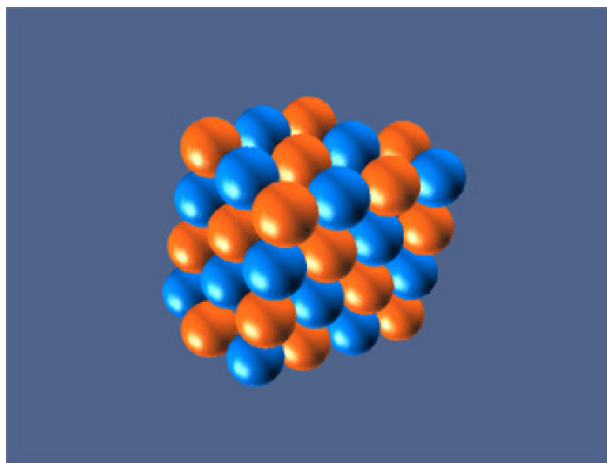
### **S** Interaktivní simulace 5.7: Třírozměrná mříž

Animace na Obr. 5.8.7 simuluje interakci nabitých částic ve třech dimenzích. Částice interagují prostřednictvím klasické Coulombovy síly a také prostřednictvím odpuzivé Pauliho kvantově-mechanické síly, která působí na malých vzdálenostech. Tímto mechanismem jsou započteny srážky mezi částicemi. Pohyb částic je navíc tlumen členem úměrným jejich rychlosti. Částice tak mohou zaujmout stabilní nebo metastabilní stav.

V simulaci byl nastaven poměr mezi Coulombovou a Pauliho silou takový, aby se vytvářely mřížové struktury obdobné krystalům. „Preferovaným“ stabilním stavem je pravouhlá mříž, i když jsou, v závislosti na počtu částic a jejich polohách, možné i další struktury.

*Tip:* Pokud vyberete částici a stisknete „f“, přepnete do zobrazení silokřivek lokálních polí kolem částic. Rychlost výpočtu závisí na počtu částic nebo silokřivek v simulaci.

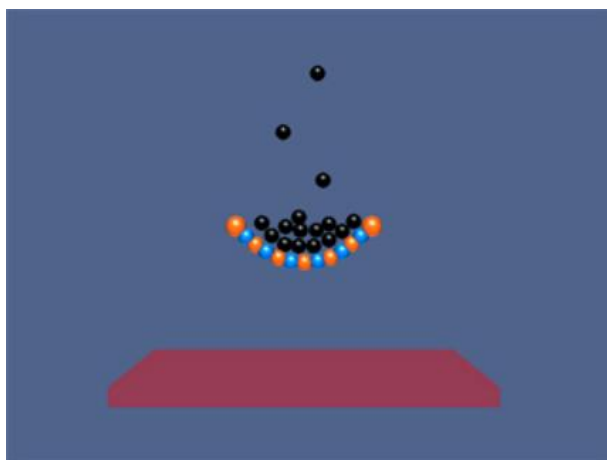




**Obr. 5.8.7:** Třírozměrná mříž – simulace interakce nabitých částic ve 3D.

### **S** Interaktivní simulace 5.8: Zavěšený dvourozměrný elektrostatický most

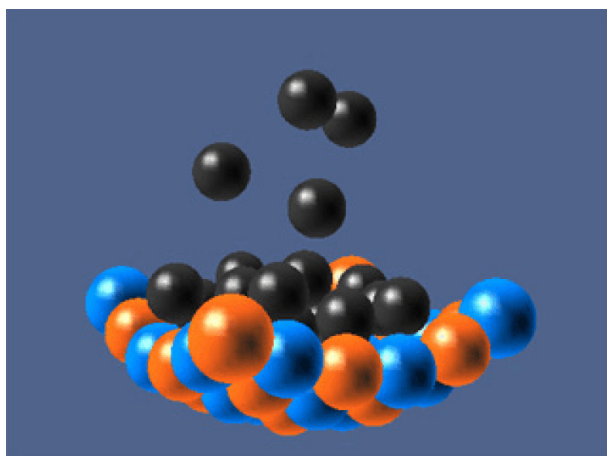
Na závěr si ukažme příklad na elektrostatické síly z reálného světa. Na obrázku 5.8.8 je simulace „elektromagnetického visutého mostu“. Most je tvořen řetězem přitahujících se střídavě kladných a záporných nábojů. Řetěz je upevněn v krajních bodech a zatížen gravitační silou směrem dolů. Nosnost „mostu“ je simulována jednoduše Coulombovou interakcí. Aby se kladné a záporné náboje díky ní nezhroutily do jednoho bodu, pracuje proti ní Pauliho odpudivá síla. Zpočátku je zatížení nízké, ale můžeme ho zvyšovat přidáváním hmotných, ale elektricky neutrálních částic zmáčknutím klávesy „o“. Přidávat můžeme tak dlouho, dokud se elektromagnetické vazby „nepřetrhnou“ a most nezhroutí.



**Obr. 5.8.8:** Interaktivní simulace elektrostatického visutého mostu ve 2D.

### **S** Interaktivní simulace 5.9: Zavěšený třírozměrný elektrostatický most

V simulaci vidíte „elektromagnetický most“ z mříže kladně a záporně nabitých částic. Most je uchycen ve čtyřech krajních bodech. Na most působí gravitační síla. Napětí mostu je tvořeno Coulombovou silou působící mezi jednotlivými částicemi a Pauliho silou, která zabrání zkolabovat jedné částici na druhou. Na počátku je most pod vlivem gravitace lehce prohnutý. Co se stane, když na most spadne hmotná neutrální částice? Stiskněte klávesu „o“ a podívejte se!



**Obr. 5.8.8:** Interaktivní simulace elektrostatického visutého mostu ve 3D.

## 5.9 Dodatek: Algoritmus pro výpočet kapacity

V této kapitole jsme se dozvěděli, jak vypočítat kapacitu  $C$  pro různé systémy. Celá procedura se skládá ze čtyř kroků:

1. Nalézt směr elektrického pole.
2. Vypočítat elektrické pole v celém prostoru.
3. Vypočítat rozdíl potenciálů na elektrodách.
4. Určit kapacitu jako  $Q/|\Delta V|$ .

V následující tabulce jsou jednotlivé kroky výpočtu kapacity ukázány pro rovinný, válcový a kulový kondenzátor.

Kondenzátor	Rovinný	Válcový	Kulový
Obrázek konfigurace			
1. Určení směru pole			
2. Výpočet pole	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E2\pi rl = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E2\pi rl = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

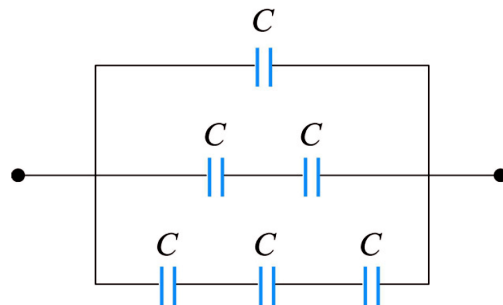


3. Výpočet $ \Delta V $	$\Delta V = -\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -Ed$	$\Delta V = -\int_a^b E dr =$ $\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $= -\frac{2\pi\epsilon_0}{2\pi\epsilon_0}$	$\Delta V = -\int_a^b E dr =$ $= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right)$
4. Výpočet $C = Q/ \Delta V $	$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}$	$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right)$

## 5.10 Řešené úlohy

### **P** Úloha 1: Ekvivalentní kapacita

Uvažujte zapojení podle obrázku 5.10.1. Nalezněte ekvivalentní kapacitu za předpokladu, že kapacita všech kondenzátorů jsou stejné.



Obr. 5.10.1: Schéma zapojení

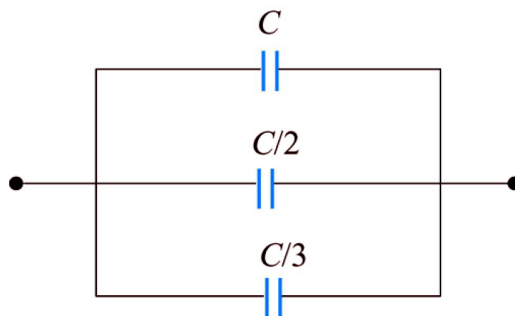
### Řešení:

Pro kondenzátory zapojené v obvodu je ekvivalentní kapacita dána vztahy

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad \text{paralelní zapojení,}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \text{sériové zapojení.}$$

S využitím vztahu pro sériové zapojení zjednodušíme obvod na tvar



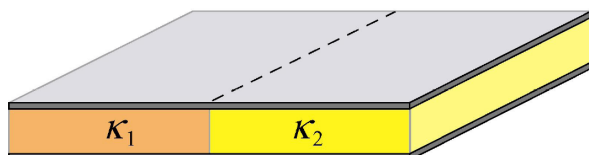
Obr. 5.10.3

Nyní jsou všechny tři výsledné kondenzátory zapojeny paralelně. Ekvivalentní kapacita proto bude:

$$C_{\text{eq}} = C \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{6} C.$$

**P Úloha 2: Kondenzátor vyplněný dvěma různými dielektriky**

Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn dvěma dielektriky s dielektrickými konstantami  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$ . Každé z dielektrik vyplňuje polovinu prostoru (viz Obr. 5.10.3). Elektrody mají plochu  $A$  a vzdálenost mezi nimi je  $d$ . Určete kapacitu systému.



Obr. 5.10.3: Kondenzátor vyplněný dvěma různými dielektriky.

**Řešení:**

Rozdíl potenciálů je u obou polovin kondenzátoru stejný a proto můžeme systém považovat za dva kondenzátory spojené paralelně. Kapacita proto bude

$$C = C_1 + C_2,$$

kde

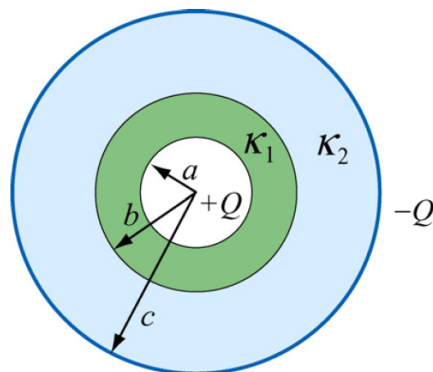
$$C_k = \frac{\kappa_k \varepsilon_0 (A/2)}{d}, \quad k = 1, 2.$$

Obě kapacity sečteme

$$C = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 (A/2)}{d} + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 (A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} (\kappa_1 + \kappa_2).$$

**P Úloha 3: Kulový kondenzátor s dvěma různými dielektriky**

Uvažujme dvě kulový kondenzátor s vnitřní elektrodou na poloměru  $a$  a vnější na poloměru  $c$ . Prostor mezi elektrodami je vyplněn dvěma různými dielektriky tak, že dielektrická konstanta je  $\kappa_1$  mezi  $a$  a  $b$  a  $\kappa_2$  mezi  $b$  a  $c$  (viz Obr. 5.10.4). Určete kapacitu systému.



Obr. 5.10.4: Kulový kondenzátor s dvěma různými dielektriky.

**Řešení:**

Celý systém může být řešen jako dva kondenzátory zapojené do série, protože je celkový rozdíl potenciálů roven součtu rozdílů potenciálů jednotlivých kondenzátorů. Ekvivalentní kapacita kulového kondenzátoru s vnitřním poloměrem  $r_1$ , vnějším poloměrem  $r_2$  a dielektrikem s dielektrickou konstantou  $\kappa_e$  je dán vztahem

$$C = 4\pi\epsilon_0\kappa_e \left( \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right).$$

Ekvivalentní kapacita systému splňuje

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\kappa_1 \left( \frac{ab}{b-a} \right)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\kappa_2 \left( \frac{bc}{c-b} \right)} = \frac{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}{4\pi\epsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc},$$

neboli

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc}{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}.$$

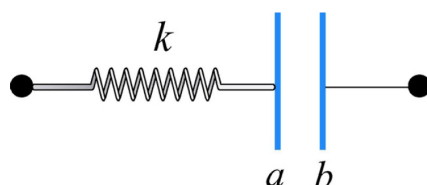
Zajímavé je provést limitu  $\kappa_1, \kappa_2 \rightarrow 1$ . V tomto případě se výraz zjednoduší na

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 abc}{c(b-a) + a(c-b)} = \frac{4\pi\epsilon_0 abc}{b(c-a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ac}{c-a}.$$

Jde o vztah (5.2.11) pro kulový kondenzátor s vnitřním poloměrem  $a$  a vnějším  $c$ .

#### **P Úloha 4: Kondenzátor spojený s pružinou**

Uvažujme rovinný deskový kondenzátor vyplněný vzduchem, jehož jedna elektroda je pohyblivá a spojená pružinou s konstantní tuhostí  $k$ . Druhá elektroda je nepohyblivá. Systém je v klidu (viz Obr. 5.10.5). O kolik se natáhne pružina, nabijeme-li kondenzátor náboji  $\pm Q$ ?



Obr. 5.10.5: Kondenzátor spojený s pružinou

#### **Řešení:**

Síla, kterou působí pružina na desku  $a$  kondenzátoru je

$$\mathbf{F}_S = -kx \hat{\mathbf{i}}.$$

Na desku  $a$  ještě působí elektrostatická síla od desky  $b$ :

$$\mathbf{F}_e = QE \hat{\mathbf{i}} = Q \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{\mathbf{i}} = \frac{Q^2}{2A\epsilon_0} \hat{\mathbf{i}},$$

kde  $A$  je plocha elektrody. Povšimněte si, že náboje na desce  $a$  nemohou vykonávat sílu samy na sebe podle třetího Newtonova zákona o akci a reakci. Proto uvažujeme jen elektrické pole desky  $a$ . Obě síly jsou v rovnováze, proto platí

$$kx = \frac{Q^2}{2A\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Q^2}{2kA\epsilon_0}.$$

## 5.11 Tématické otázky

### Otázka 1:

Náboje na deskách rovinného kondenzátoru mají opačná znaménka a přitahují se. Chceme-li zvětšit vzdálenost desek, musí vnější síly vykonat práci. Je kladná nebo záporná? Co se stane s prací vykonanou vnějšími silami?

### Otázka 2:

Jak se změní uložená energie, pokud ztrojnásobíme potenciální rozdíl na elektrodách kondenzátoru?

### Otázka 3:

Jak ovlivní přítomnost dielektrika maximální provozní napětí kondenzátoru? Zvýší ho nebo sníží? Vysvětlete.

### Otázka 4:

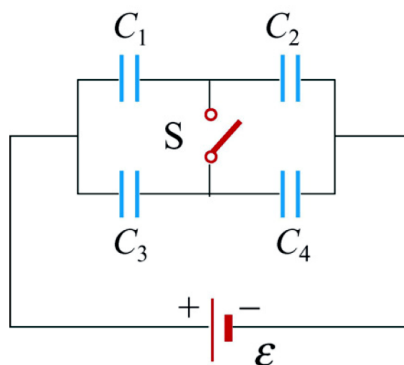
Jak ovlivní kapacitu kondenzátoru ochlazení dielektrika?

## 5.12 Neřešené úlohy

### **P** Úloha 1: Kondenzátory v obvodu

Baterie s napětím 12 V nabíjí 4 kondenzátory podle schématu. Předpokládejte, že  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$  a  $C_4 = 4 \mu\text{F}$ .

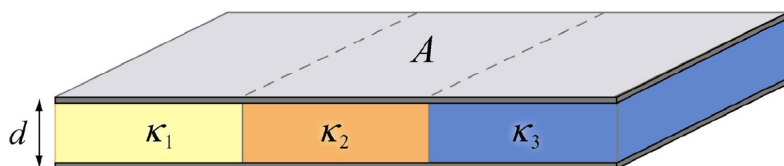
- Jaká je ekvivalentní kapacita skupiny  $C_1$  a  $C_2$ , pokud je spínač S rozpojený?
- Jaký je náboj na každém z kondenzátorů, pokud je spínač S rozpojený?
- Jaký je náboj na každém z kondenzátorů, pokud je spínač S spojený?



### **P** Úloha 2: Kondenzátory a dielektrika

- Rovinný kondenzátor s plochou elektrod  $A$  a vzdáleností elektrod  $d$  je vyplněn třemi různými dielektriky podle obrázku. Každé z dielektrik zaujímá  $1/3$  celkového objemu. Jaká je kapacita soustavy? [Návod: Uvažujte ekvivalentní soustavu tří paralelních kondenzátorů].

Proveďte limitu  $\kappa_j \rightarrow 1$  a ukažte, že výsledný vztah vede na vztah pro kondenzátor bez dielektrika.



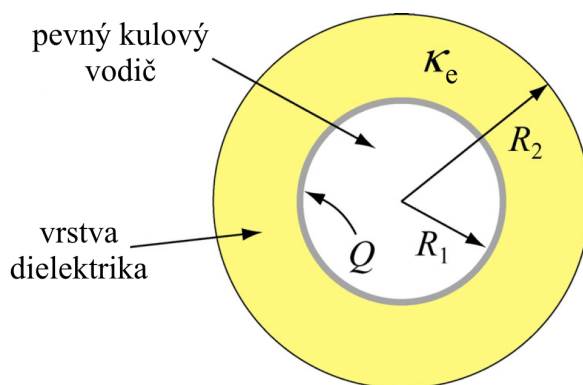
b) Stejný kondenzátor je nyní vyplněn dielektriky podle následujícího obrázku. Jaká je jeho kapacita? Použijte Gaussův zákon k nalezení pole v každém dielektriku a integrací určete potenciálový rozdíl  $\Delta V$  na celém kondenzátoru. Opět proveďte limitu  $\kappa_j \rightarrow 1$  a ukažte, že výsledný vztah vede na vztah pro kondenzátor bez dielektrika. Můžete tento kondenzátor uvažovat jako tři kondenzátory zapojené v sérii?



### **P** Úloha 3: Gaussův zákon v přítomnosti dielektrika

Pevná vodivá koule poloměru  $R_1$  má na povrchu volný náboj  $Q$ . Koule je obklopena kulovou slupkou dielektrika s dielektrickou konstantou  $\kappa_e$  až do poloměru  $R_2$ . Systém je izolován od ostatních vodičů a v jeho okolí je vzduch ( $\kappa_e \sim 1$ ).

- Určete vektor elektrické indukce  $\mathbf{D}$  v celém prostoru (tj. velikost a směr v kovové kouli, dielektriku i okolním vzduchu).
- Určete intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  v celém prostoru.

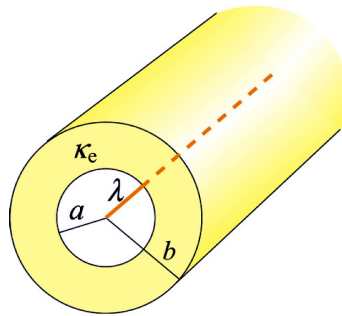


### **P** Úloha 4: Gaussův zákon a dielektrika

Válcová slupka dielektrika má vnitřní poloměr  $a$  a vnější poloměr  $b$  (viz obrázek). Materiál má dielektrickou konstantu  $\kappa_e = 10$ . Ve středu slupky je podél osy rozmístěn volný náboj s lineární hustotou  $\lambda$ .

- Nalezněte elektrické pole v oblastech  $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $r > b$ .
- Jaký je indukovaný náboj na jednotku délky na vnitřním povrchu dielektrika?  $[-9\lambda/10]$

c) Jaký je indukovaný náboj na jednotku délky na vnějším povrchu dielektrika? [ $+9\lambda/10$ ]



### **P Úloha 5: Kondenzátor s dielektrikem**

Rovinný kondenzátor má kapacitu 112 pF, plocha jedné elektrody je 96.5 cm<sup>2</sup>, dielektrikum ze slídy s dielektrickou konstantou  $\kappa_e = 5.4$ . Na elektrody kondenzátoru bylo přivedeno napětí 55 V. Určete

- intenzitu elektrického pole ve slídě [13.4 kV/m]
- velikost volného náboje na elektrodách [6.16 nC]
- velikost indukovaného náboje [5.02 nC]
- velikost polarizace [520 nC/m<sup>2</sup>]

### **P Úloha 6: Síla na desky kondenzátoru**

Desky rovinného kondenzátoru mají plochu  $A$  a je na nich celkový náboj  $+Q$  (viz obrázek). Ukažte, že se desky kondenzátoru přitahují silou  $F = Q^2/(2\epsilon_0 A)$ .

- Určete pomocí Coulombova zákona celkovou sílu na levou desku způsobenou elektrickým polem pravé desky. Zanedbejte okrajové jevy.
- Pokud odtahujete desky od sebe, překonáváte jejich přitažlivost a konáte práci. Tato práce se přeměňuje přímo na dodatečnou elektrostatickou energii. Spočítejte sílu nezbytnou na zvětšení vzdálenosti desek z hodnoty  $x$  na hodnotu  $x + dx$ . K výpočtu využijte fakt, že konaná práce  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$  se přemění na elektrického pole s hustotou energie  $\epsilon_0 E^2/2$  a náboj  $Q$  se nemění.
- Využijte odvozený výraz pro sílu a ukažte, že plošná hustota síly (elektrostatický tlak) působící na každou elektrodu je  $\epsilon_0 E^2/2$ . Tento výsledek platí pro vodič libovolného tvaru s elektrickým polem  $\mathbf{E}$  na povrchu.
- Atmosférický tlak je 101.341 N/m<sup>2</sup>. Jak veliké by muselo být elektrické pole, aby byl elektrostatický tlak roven atmosférickému? [151 MV/m. Povšimněte si, že Van de Graafovy generátory mohou dosáhnout intenzity pole až 100 MV/m. Poté dojde k průrazu. Elektrostatický tlak v blízkosti generátoru je tedy stejného řádu jako atmosférický tlak].

### **P Úloha 7: Hustota energie kondenzátoru s dielektrikem**

Uvažte případ, kdy dielektrikum s dielektrickou konstantou  $\kappa_e$  zcela vyplní prostor mezi elektrodami rovinného kondenzátoru. Ukažte, že hustota energie pole mezi deskami je  $u_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$ . Použijte následující postup:

- Napište výraz  $u_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$  jako funkci  $\mathbf{E}$  a  $\kappa_e$  (eliminujte  $\mathbf{D}$ ).

- b) Za daného elektrického pole a potenciálu a pro volný náboj  $Q$  na deskách určete práci vykonanou nabíjením kondenzátoru z  $q = 0$  na  $q = Q$ .
- c) Nalezněte hustotu energie  $u_E$ .