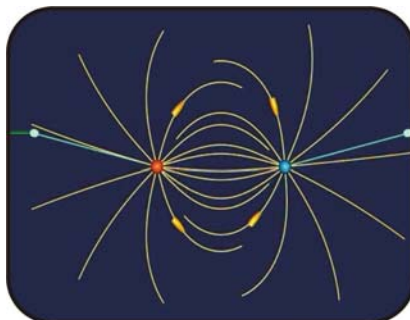


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

II. Coulombův zákon



Obsah

2	COULOMBŮV ZÁKON	2
2.1	ELEKTRICKÝ NÁBOJ	2
2.2	COULOMBŮV ZÁKON	2
2.3	PRINCIP SUPERPOZICE	4
2.4	ELEKTRICKÉ POLE	5
2.5	SILOKŘIVKY ELEKTRICKÉHO POLE	6
2.6	SÍLA PŮSOBÍCÍ NA NABITOU ČÁSTICI V ELEKTRICKÉM POLI	8
2.7	ELEKTRICKÝ DIPÓL	9
2.7.1	ELEKTRICKÉ POLE DIPÓLU	9
2.8	DIPÓL V ELEKTRICKÉM POLI	11
2.8.1	POTENCIÁLNÍ ENERGIE ELEKTRICKÉHO DIPÓLU	12
2.9	HUSTOTA NÁBOJE	13
2.9.1	OBJEMOVÁ HUSTOTA NÁBOJE	13
2.9.2	PLOŠNÁ HUSTOTA NÁBOJE	14
2.9.3	LINEÁRNÍ HUSTOTA NÁBOJE	14
2.10	ELEKTRICKÉ POLE ROVNOMĚRNĚ ROZLOŽENÉHO NÁBOJE	14
2.11	SHRNUTÍ	22
2.12	TECHNIKY ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ	23
2.13	ŘEŠENÉ ÚLOHY	24
2.14	TÉMATICKÉ OTÁZKY	32
2.15	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	33

2 Coulombův zákon

2.1 Elektrický náboj

Existují dva druhy náboje, které v přírodě pozorujeme. Označujeme je jako kladné a záporné a držíme se konvence, kterou při svých experimentech zavedl Benjamin Franklin. Při tření skleněné tyče hedvábím vznikl na tyči náboj, který označil jako kladný, naopak náboj, který vznikl na pečném vosku při tření kožešinou, označil jako záporný. Souhlasné náboje se navzájem odpuzují, opačné náboje se naopak přitahují. Jednotkou elektrického náboje je jeden Coulomb (C).

Nejmenší jednotkou „volného“ náboje, který se vyskytuje v přírodě, je náboj elektronu a nebo protonu, který má velikost

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (2.1.1)$$

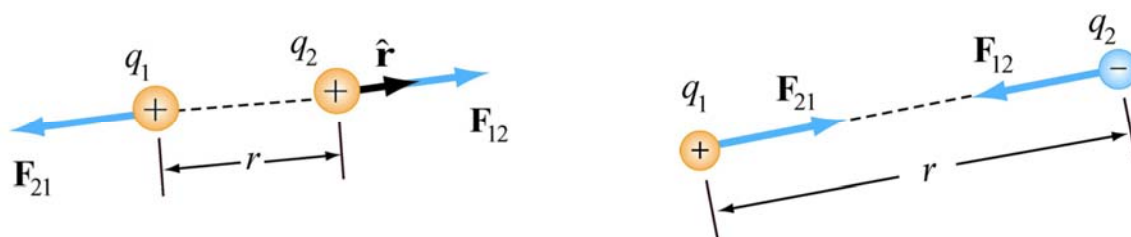
Náboj jakéhokoli tělesa je možné vyjádřit v násobcích náboje e . Elektron nese zápornou hodnotu náboje ($-e$), zatímco proton je nositelem kladného náboje ($+e$). V izolované soustavě zůstává celkové množství náboje zachováno, z čehož plyne, že elektrický náboj nelze nijak „zničit“. Lze jej ovšem přenášet z jednoho tělesa na druhé.

2.2 Coulombův zákon

Předpokládejme, že jsou ve vakuu umístěny dva bodové náboje, q_1 a q_2 , nacházející se ve vzdálenosti r . Síla, kterou působí náboj q_1 na náboj q_2 , je dána Coulombovým zákonem:

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.2.1)$$

kde k_e je konstanta úměrnosti a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor mířící od q_1 do q_2 , jak ukazuje obrázek 2.2.1 (nalevo).



Obr. 2.2.1: Síla působící mezi dvěma náboji.

Poznamenejme, že elektrická síla je vektor, který má kromě velikosti také směr. V soustavě SI je konstanta úměrnosti k_e dána výrazem

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (2.2.2)$$

kde

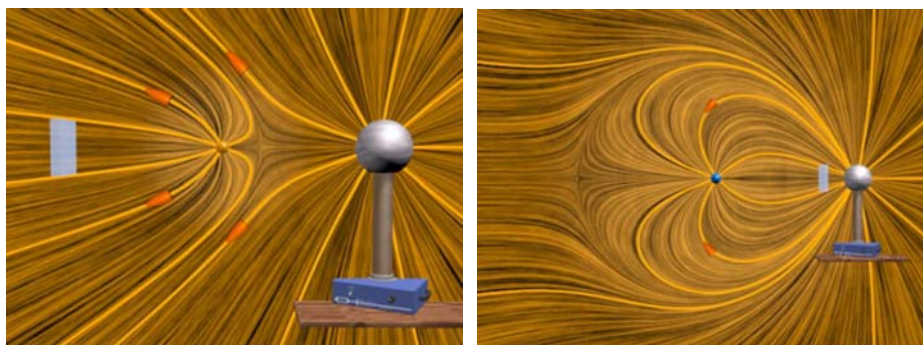
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (2.2.3)$$

je takzvaná permitivita vakua. Podobně síla, kterou působí náboj q_1 na q_2 je daná výrazem $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, jak ukazuje obrázek 2.2.1 (napravo). To vyplývá ze třetího Newtonova zákona.

Jako příklad si vezměme atom vodíku, v jehož jádře se nachází jeden proton. Ve vzdálenosti $r = 5,3 \times 10^{-11}$ m se nachází elektron. Elektrostatická síla, která mezi těmito dvěma částicemi působí je přibližně $F_e = k_e e^2 / r^2 = 5,2 \times 10^{-8}$ N. Tyto částice na sebe ale také působí gravitační silou, která je přibližně $F_g \approx 3,6 \times 10^{-47}$ N. Vidíme, že gravitační působení je oproti elektrostatickému naprosto zanedbatelné!

V Animace 2.1: Van de Graaffův generátor

Obrázek 2.2.2 (nalevo) znázorňuje odpudivou sílu, která působí mezi dvěma souhlasně nabitými tělesy, pomocí jejich elektrických polí. Soustava obsahuje nabitou kovovou kouli Van de Graaffova generátoru, která je v prostoru pevně umístěná a nemůže se pohybovat. Druhým objektem soustavy je malá nabitá koule, která je pohyblivá (gravitační působení mezi koulemi zanedbáváme). V souladu s Coulombovým zákonem se souhlasné náboje odpuzují a proto bude na malou kouli působit odpudivá síla, která ji bude tlačit směrem od Van de Graaffova generátoru.



Obrázek 2.2.2: *Nalevo* – dva souhlasné náboje se navzájem odpuzují díky „silám“, přenášeným elektrickým polem. Pro znázornění pole je využito jak metody šumové textury, tak znázornění silokřivek elektrického pole. ***Napravo*** – dva opačné náboje se díky účinkům silového pole přitahují.

Animace ukazuje pro daný případ pohyb malé koule a tvar elektrického pole. Všimněte si, že abychom v této animaci mohli pohyb kuličky zopakovat, musíme ji nejdříve „odrazit“ od malé podložky umístěné v prostoru v určité vzdálenosti od Van de Graaffova generátoru.

Než budeme diskutovat o této animaci, podívejme se na obrázek 2.2.2 (napravo), který ukazuje jeden snímek animace interakce opačně nabitých nábojů. Podle Coulombova zákona se tyto náboje přitahují, a proto se menší kulička pohybuje k větší, protože na ni působí přitažlivá síla. Abychom mohli animaci zopakovat, necháme opět kuličku odrazit od překážky, kterou tentokrát umístíme mezi menší kuličku a generátor.

Cílem těchto dvou animací je ukázat fakt, že Coulombova síla mezi dvěma náboji *není* nějakým „okamžitým působením na dálku“. Spíše by se dalo říci, že silové působení je přenášeno díky přímému „kontaktu“ Van de Graaffova generátoru s okolním prostorem prostřednictvím elektrického pole jeho náboje. Silové působení je pak kontinuálně z jednoho elementu prostoru přenášeno na okolní elementy až do blízkosti menší koule a odtud pak přímo na ni. Přestože se obě koule navzájem nedotýkají, jsou v přímém kontaktu s mechanismem silového působení, které mezi nimi existuje. Toto působení je (konečnou

rychlostí) přenášeno „poruchami“ v okolním prostoru, vyvolanými přítomností obou nabitých těles.

Zakreslování silokřivek pole využíval i Michael Faraday, tvůrce teorie elektromagnetického pole. Byl prvním, kdo ukázal, že tato pole, která spojitě vyplňují prostor mezi nabitými tělesy, přenášejí poruchy, jejichž výsledkem jsou vzájemná silová působení mezi objekty.

2.3 Princip superpozice

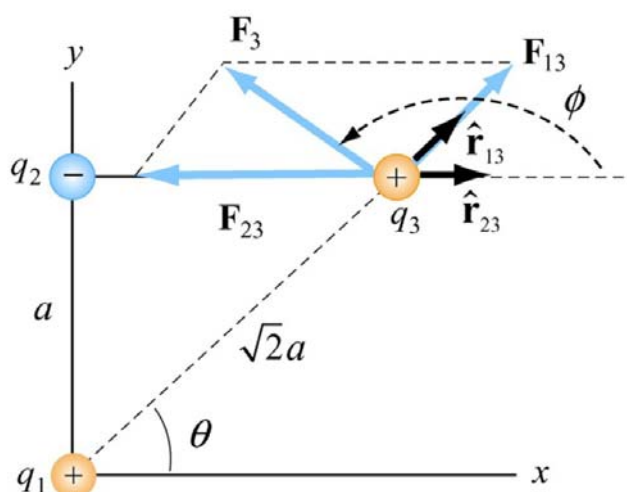
Coulombův zákon popisuje silové působení mezi jakýmkoli dvěma náboji. Pokud na sebe navzájem působí více nábojů, je celková síla, působící na libovolný náboj, dána jednoduchým vektorovým součtem jednotlivých silových účinků ostatních nábojů. Například pro případ tří nábojů je výsledná síla, kterou působí náboje q_1 a q_2 na náboj q_3 dána vztahem:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}. \quad (2.3.1)$$

Princip superpozice osvětluje následující příklad.

P Příklad 2.1: Soustava tří nábojů

Předpokládejte, že trojice nábojů je umístěna v rovině tak, jak ukazuje obrázek 2.3.1. Nalezněte sílu, která působí na náboj q_3 , je-li $q_1 = 6 \times 10^{-6} \text{ C}$, $q_2 = -6 \times 10^{-6} \text{ C}$, $q_3 = 3 \times 10^{-6} \text{ C}$, $a = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$.



Obr. 2.3.1: Soustava tří nábojů

Řešení:

Využitím principu skládání sil platí pro výslednou sílu, působící na náboj q_3 :

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mathbf{r}}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mathbf{r}}_{23} \right).$$

V tomto případě bude mít druhý člen v závorce záporný koeficient, protože náboj q_2 je záporný. Jednotkové vektory $\hat{\mathbf{r}}_{13}$ a $\hat{\mathbf{r}}_{23}$ nemíří stejným směrem. Abychom určili žádaný součet, můžeme každý vektor vyjádřit v kartézských složkách a síly sečíst podle pravidel vektorového součtu.

Z obrázku je patrné, že jednotkový vektor $\hat{\mathbf{r}}_{13}$, který míří od q_1 do q_3 , můžeme vyjádřit jako

$$\hat{\mathbf{r}}_{13} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}).$$

Obdobně jednotkový vektor $\hat{\mathbf{r}}_{23} = \hat{\mathbf{i}}$ míří od q_2 do q_3 . Dosazením dostaneme pro celkovou sílu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mathbf{r}}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mathbf{r}}_{23} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{(\sqrt{2}a)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) + \frac{(-q_1)q_3}{a^2} \hat{\mathbf{i}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \hat{\mathbf{j}} \right]. \end{aligned}$$

Velikost výsledné síly je

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right]^{1/2} = 3 \text{ N.}$$

Úhel, který v kladném směru svírá síla s osou x je

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}/4}{-1 + \sqrt{2}/4} \right) = 151,3^\circ.$$

Všimněte si, že tato rovnice má dvě řešení. Druhé řešení $\phi = -28,7^\circ$ je nesprávné, protože by znamenalo, že síla má kladnou složku $\hat{\mathbf{i}}$ a zápornou složku $\hat{\mathbf{j}}$. Pro soustavu N nábojů bude výsledná síla působící na j -tou částici

$$\mathbf{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij}, \quad (2.3.2)$$

kde \mathbf{F}_{ij} je síla, která působí mezi částicemi i a j . Z principu superpozice plyne, že síla působící mezi dvěma libovolnými náboji je nezávislá na přítomnosti ostatních nábojů. To platí za předpokladu, že se náboje nepohybují.

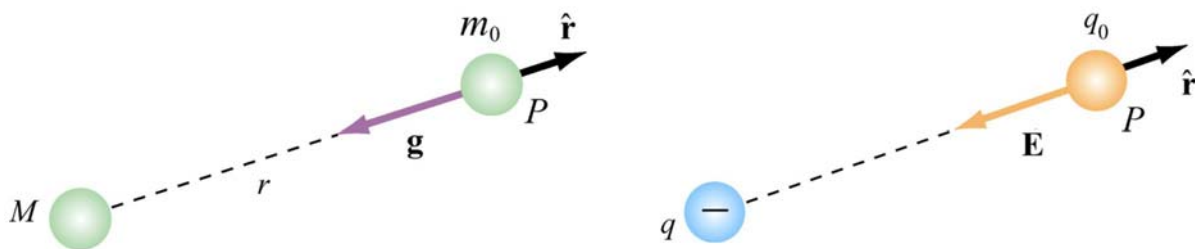
2.4 Elektrické pole

Elektrostatická síla působí podobně jako gravitační síla „do dálky“, přestože se objekty nijak nedotýkají. Abychom tuto skutečnost dokázali popsat, zavádíme představu silového pole vytvořeného jedním nábojem, pomocí kterého tento náboj působí na ostatní náboje.

Elektrický náboj q vytváří elektrické pole v celém svém okolí. Abychom vyjádřili intenzitu tohoto pole, vložíme do tohoto pole „testovací náboj“ q_0 a změříme sílu, jaká bude na tento náboj působit. Elektrické pole je popsáno intenzitou \mathbf{E} , kterou definujeme jako

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{q_0} \quad (2.4.1)$$

Náboj q_0 volíme nekonečně malý z toho důvodu, aby jím generované pole nijak neovlivňovalo „zdrojový náboj“ zkoumaného pole. Analogii mezi elektrickým polem a gravitačním polem $\mathbf{g} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \mathbf{F}_g / m_0$ znázorňuje Obr. 2.4.1.



Obr. 2.4.1: Analogie mezi gravitačním polem \mathbf{g} a elektrickým polem \mathbf{E} .

Z hlediska teorie pole říkáme, že náboj q vytváří elektrické pole \mathbf{E} , které na testovací částici q_0 působí silou $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$.

Ze vztahu (2.4.1), který je definičním vztahem elektrického pole, a s využitím Coulombova zákona, je elektrické pole ve vzdálenosti r od bodového náboje q dáno vztahem

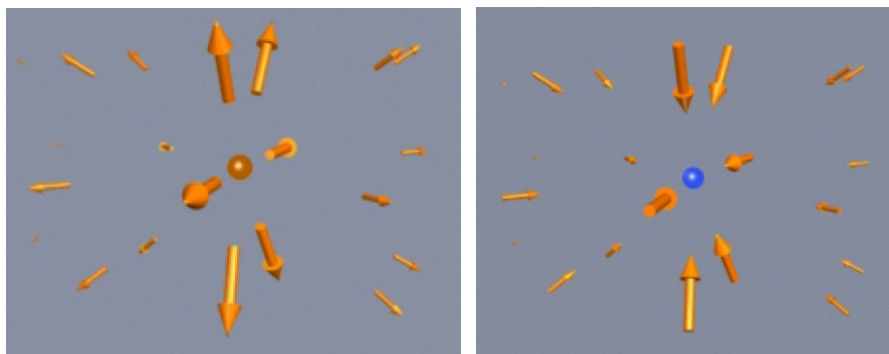
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.4.2)$$

Z principu superpozice sil vyplývá, že celkové elektrické pole soustavy nábojů je rovno vektorovému součtu polí jednotlivých nábojů:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (2.4.3)$$

V Animace 2.2: Elektrické pole bodových nábojů

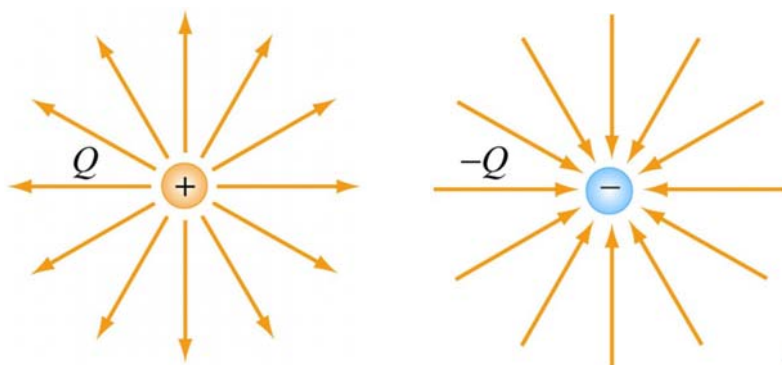
Obrázek 2.4.2 ukazuje snímky z animací elektrického pole pohybujícího se kladného a záporného náboje za předpokladu, že rychlost náboje je malá ve srovnání s rychlostí světla.



Obr. 2.4.2: Elektrické pole **kladného** náboje (nalevo) a **záporného** náboje (napravo), které se pohybují rychlostí malou vzhledem k rychlosti světla.

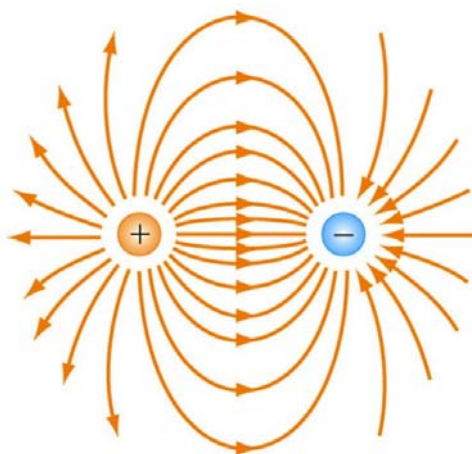
2.5 Silokřivky elektrického pole

Silokřivky elektrického pole jsou grafickým znázorněním elektrického pole v prostoru. Silokřivky elektrického pole kladného a záporného náboje ukazuje obrázek 2.5.1.



Obr. 2.5.1: Silokřivky pole bodového kladného (nalevo) a záporného (napravo) náboje.

Všimněte si, že silokřivky míří radiálně a to směrem ven pro kladný náboj a směrem dovnitř pro náboj záporný. Pro dvojici nábojů stejné velikosti, ale opačného znamení (elektrický dipól), jsou silokřivky elektrického pole vykresleny na obrázku 2.5.2.



Obr. 2.5.2: Silokřivky pole elektrického dipólu.

Tvar a rozložení silokřivek elektrického pole můžeme obdržet za následujících předpokladů:

1. Symetrie: Pro každý bod nad spojnici dvou nábojů existuje ekvivalentní bod, který leží pod ní. To znamená, že výsledné rozložení silokřivek je symetrické podél spojnice obou nábojů.
2. Pole v blízkosti náboje: V těsné blízkosti náboje převládá pole tohoto náboje. Proto jsou silokřivky radiální a kulově symetrické.
3. Pole ve velké vzdálenosti: Ve velké vzdálenosti od soustavy nábojů má pole velmi podobné vlastnosti jako pole bodového náboje $Q = \sum_i Q_i$. Pokud není $Q = 0$, mají silokřivky radiální směr.
4. Nulový bod: Jedná se o bod, ve kterém je $\mathbf{E} = 0$, a kterým nevedou žádné silokřivky.

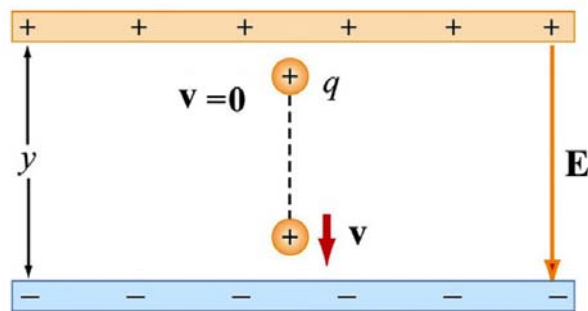
Vlastnosti silokřivek elektrického pole můžeme shrnout do následujících bodů:

- Vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} má v každém bodě směr tečny k silokřivkám pole.
- Počet silokřivek procházejících jednotkovou plochou kolmou k jejich směru můžeme chápat jako úměrný velikosti elektrického pole v dané oblasti.

- Silokřivky elektrického pole mají počátek v kladných nábojích (nebo v nekonečnu) a končí v záporných nábojích (nebo v nekonečnu).
- Množství silokřivek, majících počátek v kladném náboji nebo konec v záporném náboji, musí být úměrné velikosti nábojů.
- Dvě silokřivky se nikde nemohou křížit, v opačném případě by vektor intenzity v daném bodě mířil současně dvěma různými směry.

2.6 Síla působící na nabitou částici v elektrickém poli

Předpokládejme, že se náboj $+q$ pohybuje mezi dvěma paralelními deskami opačného náboje podle obrázku 2.6.1.



Obr. 2.6.1: Náboj pohybující se v konstantním elektrickém poli

Nechť je intenzita elektrického pole mezi deskami $\mathbf{E} = -E_y \hat{\mathbf{j}}$, kde $E_y > 0$. (V kapitole 4 ukážeme, že elektrické pole v prostoru mezi dvěma nekonečně velkými deskami opačného náboje je homogenní). Na částici bude působit směrem dolů síla

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad (2.6.1)$$

Povšimněte si rozdíl mezi nábojem q , na který působí síla, a náboji na deskách, které jsou *zdrojem* elektrického pole. Přestože náboj q je také zdrojem elektrického pole, nemůže jeho prostřednictvím působit sám na sebe. Proto je intenzita pole \mathbf{E} dána pouze „zdrojovými“ náboji. Podle druhého Newtonova zákona bude působící síla udělovat náboji zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_e}{m} = \frac{q\mathbf{E}}{m} = -\frac{qE_y}{m} \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.6.2)$$

Předpokládejme, že částice má v okamžiku, kdy je vypuštěna z kladně nabitě desky, nulovou počáteční rychlost ($v_0 = 0$). Rychlost částice při pohybu směrem k záporné desce bude pak dána vztahem

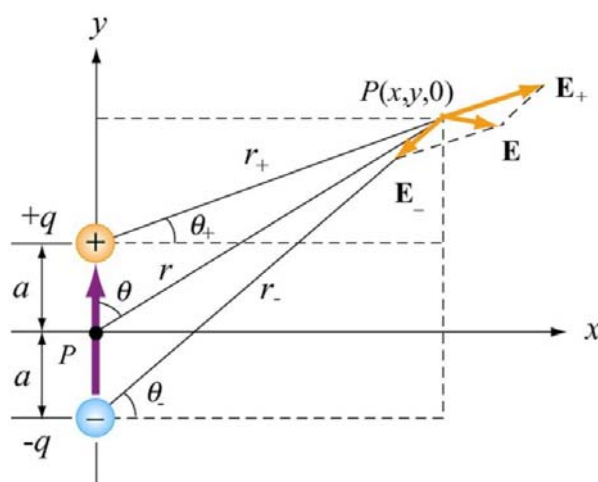
$$v_y = \sqrt{2|a_y|y} = \sqrt{\frac{2yqE_y}{m}}, \quad (2.6.3)$$

kde y je vzdálenost mezi deskami. Kinetická energie částice bude ve chvíli dopadu na zápornou desku rovna

$$K = \frac{1}{2}mv_y^2 = qE_y y. \quad (2.6.4)$$

2.7 Elektrický dipól

Elektrický dipól je tvořen dvěma náboji stejné velikosti ale opačné polarity, $+q$ a $-q$, které se nacházejí ve vzdálenosti $2a$, jak ukazuje obrázek 2.7.1.



Obr. 2.7.1: Elektrický dipól.

Vektor dipólového momentu \mathbf{p} , který míří od $-q$ do $+q$, je dán vztahem

$$\mathbf{p} = 2qa \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.7.1)$$

Velikost elektrického dipólu je $p = 2qa$, kde $q > 0$. Pro celý elektricky neutrální systém, který obsahuje N nábojů, je vektor dipólového momentu \mathbf{p} definován jako

$$\mathbf{p} \equiv \sum_{k=1}^{k=N} q_k \mathbf{r}_k, \quad (2.7.2)$$

kde \mathbf{r}_k je polohový vektor náboje q_k . Příkladem dipólů mohou být *polární* molekuly jako HCl, CO nebo H₂O. V principu mohou být dipólem aproximovány všechny molekuly, u nichž nesplývají centra kladných a záporných nábojů. V Kapitole 5 dále ukážeme, že i u nepolárních molekul může být jejich vložení do elektrického pole indukován dipólový moment.

2.7.1 Elektrické pole dipólu

Jaký je průběh elektrického pole dipólu? Podíváme-li se na Obr. 2.7.1, zjistíme, že x -ová složka vektoru intenzity elektrického pole v bodě P je

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2.7.3)$$

kde

$$r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2 \quad (2.7.4)$$

Podobně pro y -ovou složku platí

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2.7.5)$$

Pro případ elementárního dipólu, kde $r \gg a$ si můžeme ověřit, (viz řešená úloha 2.13.4) se výše uvedené výrazy zjednodušují na

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta \quad (2.7.6)$$

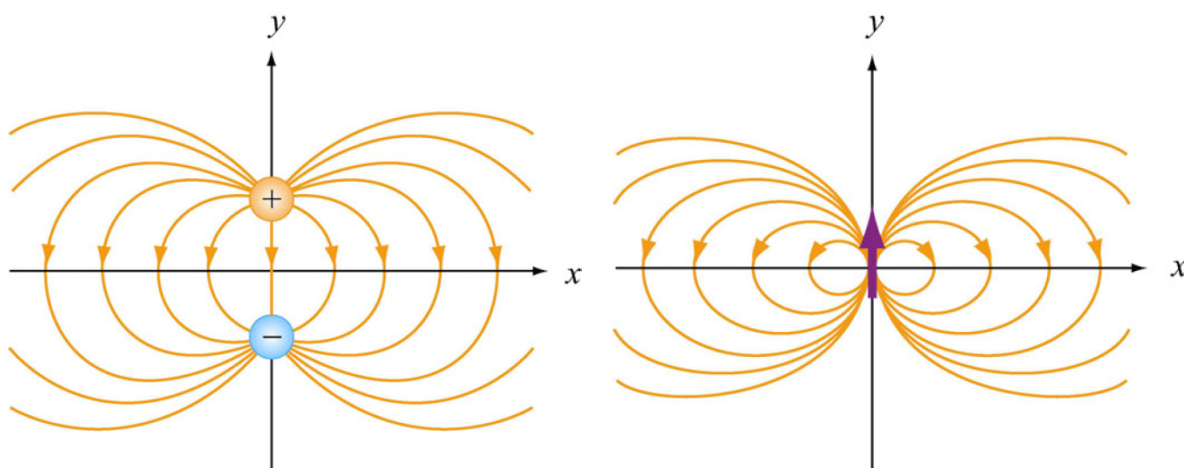
a

$$E_y = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1), \quad (2.7.7)$$

kde $\sin\theta = x/r$ a $\sin\theta = y/r$. Po dosazení $3pr \cos\theta = 3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ a následných úpravách dostaneme pro intenzitu elektrického pole dipólu výsledný vztah

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right). \quad (2.7.8)$$

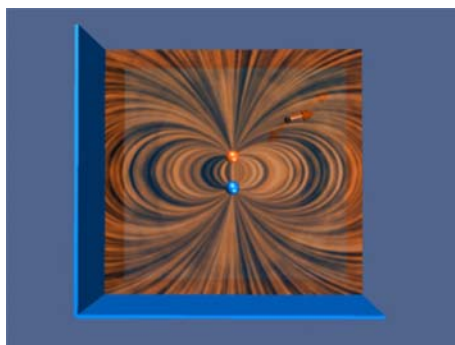
Poznamenejme, že rovnice (2.7.8) platí také pro třírozměrný případ, kde $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Z rovnice vyplývá, že intenzita elektrického pole dipólu klesá se třetí mocninou vzdálenosti, na rozdíl od intenzity pole bodového náboje, která klesá se druhou mocninou vzdálenosti. To se dalo očekávat, neboť celkový náboj dipólu je nulový, takže intenzita pole musí klesat rychleji než $1/r^2$. Siločivky elektrického pole dipólu a bodového (elementárního) dipólu ukazuje Obr. 2.7.2.



Obr. 2.7.2: Elektrické pole dipólu (nalevo) a elementárního dipólu (napravo).

S Interaktivní simulace 2.3: Elektrický dipól

Obrázek 2.7.3 ukazuje interaktivní ShockWave simulaci, která znázorňuje vznik elektrického pole dipólu. Ukazuje elektrické pole obou nábojů v bodu pozorovatele zároveň s vektorovým součtem jejich výsledného pole. Abychom znázornili výsledné elektrické pole, užíváme zobrazení šumovou texturou. Místo pozorování (malá černá kulička) můžeme měnit kurzorovými klávesami a sledovat pole v různých oblastech v okolí obou nábojů. Scénu lze natáčet pomocí myši.

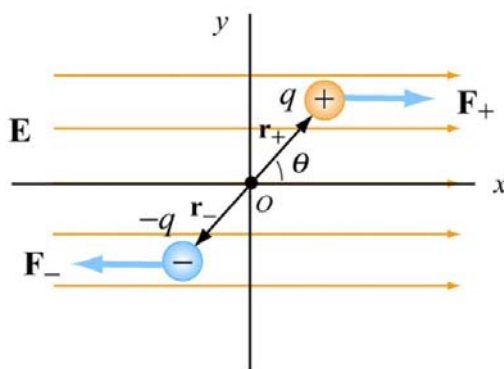


Obr. 2.7.3: Interaktivní ShockWave simulace elektrického pole dvou stejně velikých, ale opačných nábojů.

2.8 Dipól v elektrickém poli

Co se stane, když umístíte elektrický dipól do homogenního elektrického pole $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{i}}$ tak, aby vektor dipólového momentu \mathbf{p} svíral s osou x nenulový úhel? Z obrázku 2.8.1 vidíme, že jednotkový vektor, který míří ve směru \mathbf{p} je $\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$. Odtud dostaneme

$$\mathbf{p} = 2qa(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}). \quad (2.8.1)$$



Obr. 2.8.1: Elektrický dipól v homogenním elektrickém poli.

Jak je z obrázku patrné, na každý náboj působí stejné síly opačného směru, které vzhledem ke středu dipólu působí výsledným momentem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = \\ &= (a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \times (F_+ \hat{\mathbf{i}}) + (-a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - a \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \times (-F_- \hat{\mathbf{i}}) = \\ &= a \sin \theta F_+ (-\hat{\mathbf{k}}) + a \sin \theta F_- (-\hat{\mathbf{k}}) = 2aF \sin \theta (-\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

kde jsme použili $F_+ = F_- = F$. Směr momentu je $-\hat{\mathbf{k}}$, neboli směrem do papíru (obrazovky). Výsledkem působení momentu $\boldsymbol{\tau}$ je stáčení dipólu *po směru hodinových ručiček* tak, aby byl dipólový moment \mathbf{p} rovnoběžný s vektorem intenzity elektrického pole \mathbf{E} . S využitím vztahu $F = qE$ můžeme pro velikost momentu psát

$$\tau = 2a(qE) \sin \theta = (2aq)E \sin \theta = pE \sin \theta$$

a pro obecné vyjádření momentu dostáváme

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.8.3)$$

Vidíme tedy, že výsledkem vložení dipólu do elektrického pole je vznik momentu, působícího na dipól.

2.8.1 Potenciální energie elektrického dipólu

Práce, vykonaná elektrickým polem na pootočení dipólu $d\theta$ je

$$dW = -\tau d\omega = -pE \sin \theta d\theta. \quad (2.8.4)$$

Záporné znaménko značí, že moment působí *proti* zvětšujícímu se úhlu θ . Celkové množství práce vykonané elektrickým polem při rotaci dipólu z úhlu θ_0 na θ je

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE \sin \theta) d\theta = pE(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.8.5)$$

Z výsledku plyne, že pole koná *kladnou* práci, když $\cos \theta > \cos \theta_0$. Změna potenciální energie ΔU dipólu je rovna záporně vzaté práci elektrického pole:

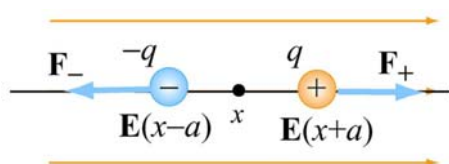
$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad (2.8.6)$$

kde $U_0 = -pE \cos \theta_0$ je potenciální energie v referenčním bodě. Referenční bod si vybereme tak, aby $\theta_0 = \pi/2$, takže potenciální energie $U_0 = 0$. Elektrický dipól vložený do vnějšího elektrického pole má tedy potenciální energii

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.8.7)$$

System je v rovnovážném stabilním stavu, pokud je jeho potenciální energie minimální. K tomu dojde, když je dipólový moment \mathbf{p} orientován stejným směrem jako vektor intenzity \mathbf{E} , a potenciální energie $U_{\min} = -pE$ je minimální. V opačném případě, kdy vektory \mathbf{p} a \mathbf{E} míří opačným směrem, je potenciální energie maximální, $U_{\max} = +pE$, a systém je nestabilní.

Pokud bude dipól umístěn do nehomogenního elektrického pole, bude na dipól kromě silového momentu působit ještě další síla, a výsledkem bude pohyb dipólu složený z rotace a přímého zrychleného pohybu. Obrázek 2.8.2 ukazuje situaci, kdy je intenzita pole \mathbf{E}_+ v bodě $+q$ odlišná od intenzity \mathbf{E}_- v bodě $-q$.



Obr. 2.8.2: Síly působící na dipól

Za předpokladu, že je dipól dostatečně malý, můžeme intenzitu vyjádřit rozvojem podle x :

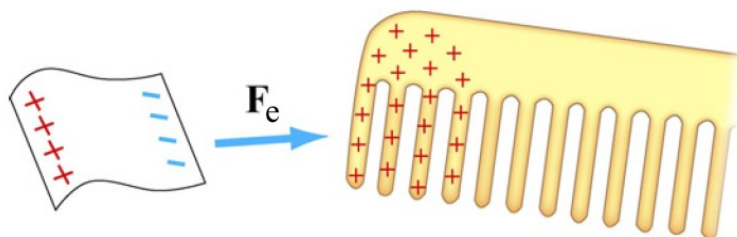
$$E_+(x+a) \approx E(x) + a \left(\frac{dE}{dx} \right), E_-(x-a) \approx E(x) - a \left(\frac{dE}{dx} \right). \quad (2.8.8)$$

Sílu, která působí dipól, pak můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_e = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 2qa \left(\frac{dE}{dx} \right) \hat{\mathbf{i}} = p \left(\frac{dE}{dx} \right) \hat{\mathbf{i}}. \quad (2.8.9)$$

Příkladem takové síly působící na dipól je přitahování malých útržků papíru hřebem, který byl nabit třením o vlasy. V papíru došlo k *indukci dipólového momentu* (o které budeme

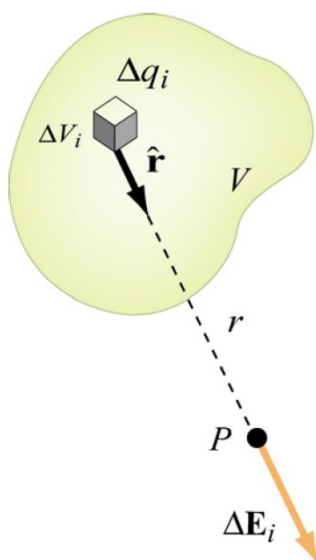
podrobněji mluvit v kapitole 5), a elektrické pole v okolí hřebenu je z důvodu jeho nepravidelného tvaru nehomogenní.



Obr. 2.8.3: Elektrostatické přitahování mezi kousky papíru a hřebenem.

2.9 Hustota náboje

Průběh elektrického pole v okolí malého počtu nabitých částic můžeme snadno odvodit využitím principu superpozice. Co však v případě, kdy máme velké množství částic rozložených v určité prostorové oblasti? Předpokládejme existenci systému zobrazeného na obrázku 2.9.1:



Obr. 2.9.1: Elektrické pole malého elementu náboje Δq_i .

2.9.1 Objemová hustota náboje

Nechť je naším úkolem určit intenzitu elektrického pole v nějakém bodě P . Předpokládejme malý element objemu ΔV_i , který obsahuje celkové množství náboje Δq_i . Vzdálenosti mezi náboji uvnitř objemového elementu ΔV_i jsou velmi malé ve srovnání s délkou r , která určuje vzdálenost ΔV_i a P . V limitním případě, kdy je element ΔV_i nekonečně malý, můžeme definovat objemovou hustotu náboje $\rho(\mathbf{r})$ jako

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i} = \frac{dq}{dV}. \quad (2.9.1)$$

Jednotkou objemové hustoty náboje $\rho(\mathbf{r})$ v soustavě SI je $[\text{C}/\text{m}^3]$. Celkové množství náboje obsaženého v objemu V je

$$Q = \sum_i \Delta q_i = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (2.9.2)$$

Způsob zavedení objemové hustoty náboje je analogický hustotě hmoty $\rho_m(\mathbf{r})$. V případě, že je v objemu obsaženo velké množství částic, můžeme také celkovou hmotnost vyjádřit integrálem

$$M = \int_V \rho_m(\mathbf{r}) dV. \quad (2.9.3)$$

2.9.2 Plošná hustota náboje

Podobným způsobem můžeme zavést *plošnou hustotu náboje* σ pro případ, kdy je náboj rozložen po ploše S o obsahu A :

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{dq}{dA}. \quad (2.9.4)$$

Plošná hustota udává množství náboje na plochu a v soustavě SI má rozměr $[C/m^2]$. Toto množství je rovno

$$Q = \iint_S \sigma(\mathbf{r}) dA. \quad (2.9.5)$$

2.9.3 Lineární hustota náboje

Pro případ, kdy je náboj rozložen po křivce k délky l , zavádíme *lineární hustotu náboje* λ :

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{dq}{dl}, \quad (2.9.6)$$

kteřou udáváme v jednotkách $[C/m]$. Celkový náboj je pak dán integrálem přes křivku k :

$$Q = \int_k \lambda(\mathbf{r}) dl. \quad (2.9.7)$$

Pokud jsou náboje rovnoměrně rozložené, jsou hustoty ρ , σ a λ pro dané entity konstantní.

2.10 Elektrické pole rovnoměrně rozloženého náboje

Intenzita elektrického pole, příslušná jednotlivým elementům náboje dq , je v bodě P dána Coulombovým zákonem:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.10.1)$$

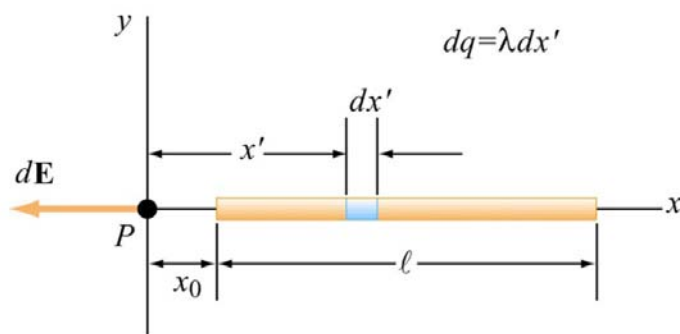
kde r je vzdálenost mezi dq a P a $\hat{\mathbf{r}}$ je příslušný jednotkový vektor (viz obrázek 2.9.1). Využitím principu superpozice můžeme celkovou intenzitu \mathbf{E} vyjádřit součtem (integrálem) všech infinitezimálních příspěvků:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dq. \quad (2.10.2)$$

Toto je příklad *vektorového integrálu*, který počítáme trojnásobnou integrací po jednotlivých složkách elektrického pole.

Příklad 2.2 Elektrické pole na ose tyče

Nevodivá tyč délky l rovnoměrně nabitá kladným nábojem s hustotou λ a celkovou velikostí Q leží podél osy x , viz obrázek 2.10.1.



Obr. 2.10.1: Elektrické pole tyče podél osy tyče.

Vypočtete intenzitu pole \mathbf{E} v bodě P , ležícím na ose tyče ve vzdálenosti x_0 od jejího konce.

Řešení:

Lineární hustota náboje podél tyče konstantní a je rovna $\lambda = Q / l$. Množství náboje obsažené v malém segmentu délky dx' je $dq = \lambda dx'$. Protože je tyč nabitá kladným nábojem Q , míří vektor intenzity v bodě P v záporném směru osy x a jednotkový vektor, který míří ze zdroje do bodu P je $\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{i}}$. Příspěvek elementu dq k intenzitě elektrického pole je

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2} (-\hat{\mathbf{i}}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dx'}{l x'^2} \hat{\mathbf{i}}.$$

Integrací podél celé délky tyče dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{dx'}{x'^2} \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+l} \right) \hat{\mathbf{i}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0(l+x_0)} \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

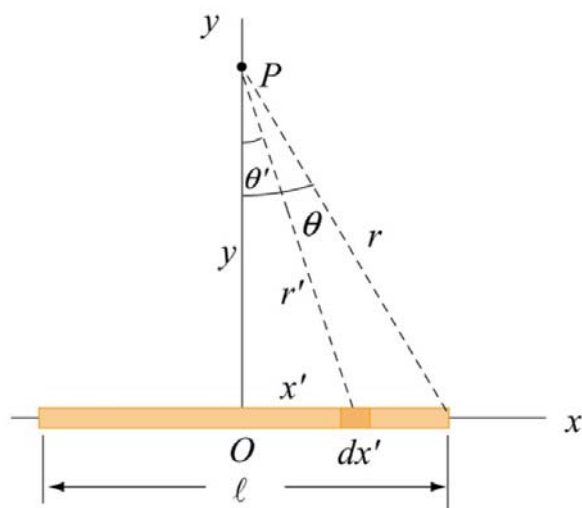
Povšimněte si, že pokud je bod P od tyče dostatečně vzdálen, $x_0 \gg l$, přechází poslední výraz na tvar

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0^2} \hat{\mathbf{i}}. \quad (2.10.4)$$

Tento výsledek je důsledkem faktu, že ve velkých vzdálenostech je rozdíl mezi rovnoměrně rozloženým nábojem a bodovým nábojem zanedbatelný.

Příklad 2.3: Elektrické pole na ose kolmé k tyči

Nevodivá tyč délky l rovnoměrně nabitá kladným nábojem s hustotou λ a celkovou velikostí Q leží podél osy x , viz obrázek 2.10.2. Vypočtete intenzitu elektrického pole v bodě P , který leží na kolmé ose tyče ve vzdálenosti y od středu tyče.



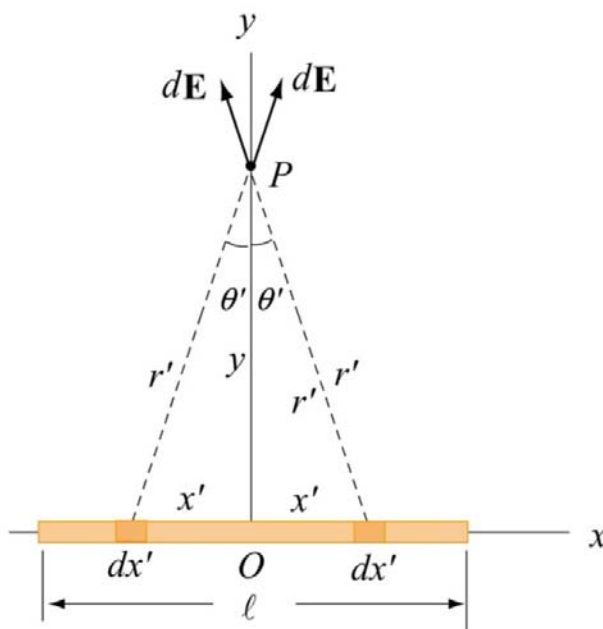
Obr 2.10.2.

Řešení:

Budeme postupovat obdobným způsobem jako v příkladu 2.2. Příspěvek malého elementu dx' , nesoucího náboj $dq = \lambda dx'$, k celkové intenzitě pole je

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2}. \quad (2.10.5)$$

Vzhledem k symetrii, ilustrované na obrázku 2.10.3, se x -ové složky vektoru intenzity navzájem vruší.



Obr. 2.10.3: Díky symetrii se x -ové složky vruší a tedy $E_x = 0$.

Pro y -ovou složku dE_y platí:

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (2.10.6)$$

Integrací přes celou délku tyče dostaneme pro intenzitu pole výraz:

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.10.7)$$

Dosazením za $x' = y \tan \theta'$, odkud $dx' = y \sec^2 \theta' d\theta'$, dostává předchozí integrál tvar

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} &= \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y \sec^2 \theta' d\theta'}{y^3 (\sec^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta' d\theta'}{(\sec^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta' d\theta'}{\sec \theta^3} = \\ &= \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sec \theta'} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \theta' d\theta' = \frac{2 \sin \theta}{y^2}, \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

odkud dosazením dostaneme

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin \theta}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \frac{l/2}{\sqrt{y^2 + (l/2)^2}}. \quad (2.10.9)$$

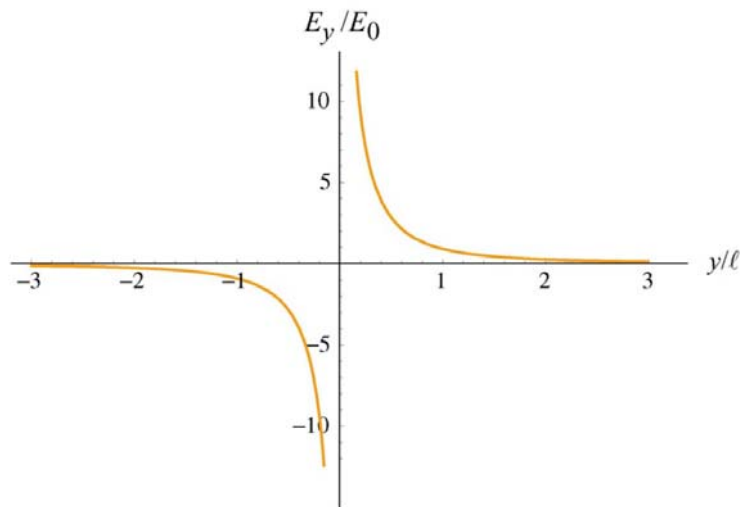
V limitním případě, kdy $y \gg l$, se výraz (2.10.9) redukuje na případ bodového náboje:

$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda l/2}{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y^2}. \quad (2.10.10)$$

V opačném případě, kdy je $l \gg y$, dostáváme

$$E_y \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y}. \quad (2.10.11)$$

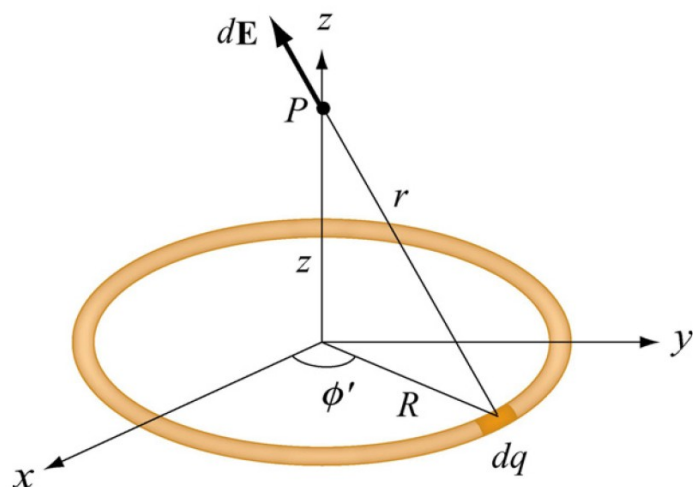
V tomto případě, kdy má tyč nekonečnou délku, má systém válcovou symetrii a pro výpočet vztahu (2.10.11) můžeme využít Gaussova zákona, jak ukážeme v kapitole 4. Typický průběh E_y/E_0 , kde $E_0 = Q/4\pi\epsilon_0 l^2$ jako funkce y/l je znázorněn na obrázku 2.10.4.



Obr. 2.10.4: Elektrické pole nevodivé tyče jako funkce y/l .

Příklad 2.4: Elektrické pole na ose prstence

Nevodivý prstavec o poloměru R nabitý rovnoměrně nábojem Q s hustotou λ leží v rovině xy , jak ukazuje obrázek 2.10.5. Vypočítejte elektrické pole v bodě P , umístěném ve vzdálenosti z od středu prstence na jeho ose symetrie.

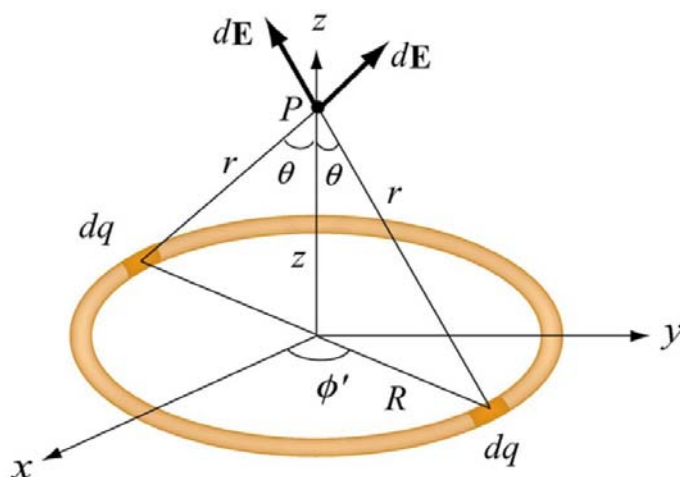


Obr. 2.10.5: Elektrické pole v bodě P způsobené elementem dq .

Řešení:

Předpokládejme, že se prstavec skládá z malých elementů dl' . Množství náboje, obsažené v tomto elementu, je $dq = \lambda dl' = \lambda R d\phi'$. Jeho příspěvek k celkové intenzitě v bodě P je

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.10.12)$$



Obr. 2.10.6.

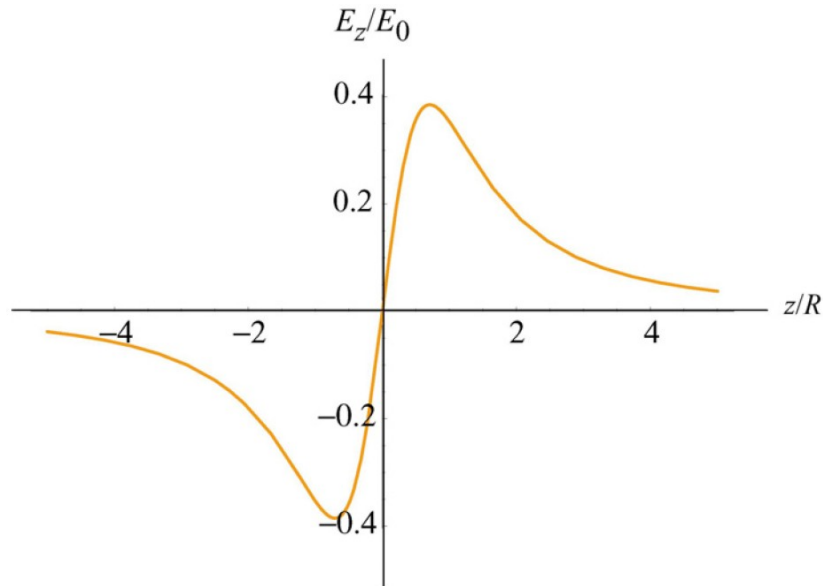
Ze symetrie soustavy, kterou vidíme na obrázku 2.10.6, vyplývá, že vektor intenzity musí mít v bodě P směr v kladném smyslu osy z .

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rz d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.10.13)$$

Po integraci přes celý prstavec dostaneme

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \oint d\phi' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.10.14)$$

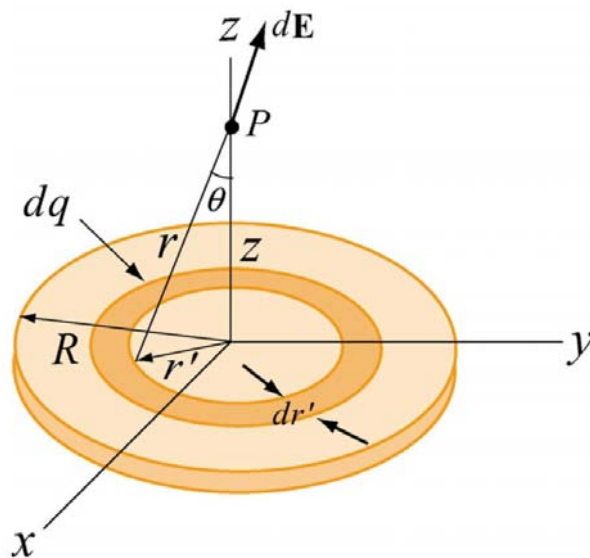
kde celkový náboj $Q = \lambda(2\pi R)$. Závislost intenzity pole jako funkce z je vykreslena na obrázku 2.10.7.



Obr. 2.10.7: Intenzita elektrického pole podél osy symetrie nevodivého prstence poloměru R , pro $E_0 = Q / 4\pi\epsilon_0 R^2$. Všimněte si, že ve středu prstence je díky symetrii elektrické pole nulové.

P Příklad 2.5: Elektrické pole rovnoměrně nabitého disku

Disk o poloměru R rovnoměrně nabitý nábojem Q leží v rovině xy . Nalezněte elektrické pole v bodě P podél osy z , která prochází středem disku a je na něj kolmá. Diskujte limitní případ $R \gg z$.



Obr. 2.10.8: Rovnoměrně nabitý disk poloměru R .

Řešení:

Rozdělením disku na soustavu koncentrických prstenců můžeme příklad vyřešit s pomocí výsledku, který jsme obdrželi v příkladu 2.4. Předpokládejme, že prstence mají poloměr r' a tloušťku dr' , jak je uvedeno na obrázku 2.10.8.

Ze symetrie úlohy vyplývá, že vektor intenzity míří v bodě P v kladném směru osy z . Protože prsteneček má náboj $dq = \sigma(2\pi r' dr')$ (z rovnice 2.10.14), přispívá prsteneček k celkovému poli intenzitou

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(2\pi\sigma r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.10.15)$$

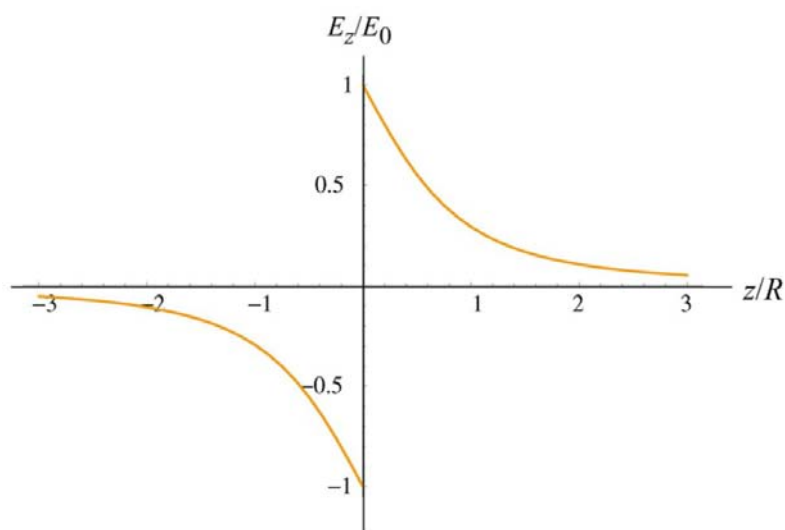
Integrací v intervalu od $r' = 0$ do $r' = R$ dostáváme pro intenzitu pole v bodě P

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} \right]_{z^2}^{R^2+z^2} = \\ &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

Rovnici můžeme přepsat pro dva možné případy

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & z > 0, \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & z < 0. \end{cases} \quad (2.10.17)$$

Relativní intenzita E_z/E_0 ($E_0 = \sigma/2\epsilon_0$) jako funkce z/R je vykreslena na obrázku 2.10.9.



Obr. 2.10.9: Elektrické pole nevodivé rovnoměrně nabitě plochy.

Abychom dokázali limitní přechod k poli bodového náboje pro $z \gg R$, použijeme Taylorova rozvoje:

$$1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - R^2}} = 1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}. \quad (2.10.18)$$

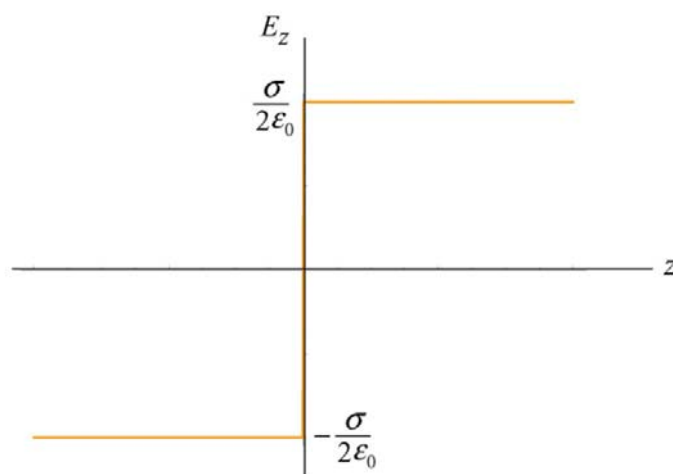
Odtud dostáváme

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}, \quad (2.10.19)$$

což je skutečně očekávaný výraz pro intenzitu pole bodového náboje. Můžeme se také zabývat opačným případem, kdy $R \gg z$, tedy případem, kdy je plocha velmi velká, nebo bod P leží v těsné blízkosti jejího povrchu. Intenzita elektrického pole má v tomto případě v zápisu pomocí jednotkového vektoru tvar

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z < 0. \end{cases} \quad (2.10.20)$$

Průběh elektrického pole v tomto limitním případě je znázorněn na obrázku 2.10.10.



Obr. 2.10.10: Elektrické pole nekonečně velké rovnoměrně nabitě nevodivé roviny.

Všimněte si nespojitého přechodu při průchodu rovinou. Tato diskontinuita je dána vztahem

$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.10.21)$$

Jak bude ukázáno v kapitole 4, mění se při plošné hustotě náboje σ normálová složka vektoru intenzity elektrického pole při průchodu plochou nespojitě o $\Delta E_n = \sigma / \epsilon_0$.

2.11 Shrnutí

- Elektrická síla, kterou působí náboj q_1 na druhý náboj q_2 je dána **Coulombovým zákonem**:

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

kde konstanta úměrnosti je

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2.$$

- **Intenzita elektrického pole** v daném bodě prostoru je definovaná jako elektrická síla působící na jednotkový náboj q_0 :

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{q_0}.$$

- Intenzita elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového náboje q je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

- S využitím **principu superpozice** můžeme výslednou intenzitu elektrického pole soustavy nábojů q_i ve vzdálenosti r_i vyjádřit vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i.$$

- Elektrické pole s intenzitou \mathbf{E} uděluje částici hmotnosti m s nábojem q zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}.$$

- **Elektrický dipól** je tvořen dvěma náboji stejné velikosti a opačné polarity. Vektor dipólového momentu \mathbf{p} míří od záporného náboje ke kladnému a má velikost

$$p = 2aq.$$

- Silový **moment**, působící na dipól umístěný v homogenním poli intenzity \mathbf{E} je

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

- **Potenciální energie** elektrického dipólu ve vnějším elektrickém poli intenzity \mathbf{E} je

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

- Příspěvek spojitého nábojového elementu dq k celkové intenzitě pole \mathbf{E} je

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

- V dostatečně veliké vzdálenosti od rovnoměrně nabitého elementu konečného rozměru je možné intenzitu pole aproximovat intenzitou pole bodového náboje stejné velikosti.

2.12 Techniky řešení příkladů

V této kapitole si ukážeme, jak je možné vypočítat intenzitu elektrického pole pro případ jak diskrétního tak spojitého rozložení nábojů. Pro první případ využíváme platnosti principu superpozice:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i,$$

v druhém případě musíme řešit vektorový integrál

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dq,$$

kde r je vzdálenost elementu dq od bodu P , ve kterém intenzitu počítáme, a $\hat{\mathbf{r}}$ je příslušný jednotkový vektor. Abychom rovnici vyřešili, můžeme postupovat tímto naznačeným způsobem:

1) Začneme s rovnicí $d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$.

2) Nábojový element dq vyjádříme jako

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{křivka}), \\ \sigma dA & (\text{plocha}), \\ \rho dV & (\text{objem}) \end{cases}$$

v závislosti na tom, jestli je náboj rozmístěn podél křivky, na ploše nebo v celém objemu.

3) Za dq dosadíme do výrazu pro $d\mathbf{E}$.

4) Určíme příslušný souřadnicový systém (Kartézský, cylindrický nebo sférický) a vyjádříme diferenciální elementy (dl , dA nebo dV) a r v daných souřadnicích (viz přehled v tabulce 2.1).

	Kartézské (x, y, z)	válcové (ρ, ϕ, z)	sférické (r, θ, ϕ)
dl	dx, dy, dz	$d\rho, d\phi, dz$	$dr, rd\theta, r\sin\theta d\phi$
dA	$dx dy, dy dz, dz dx$	$d\rho dz, \rho d\phi dz, \rho d\phi d\rho$	$r dr d\theta, r\sin\theta dr d\phi, r^2 \sin\theta d\theta d\phi$
dV	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Tabulka 2.1 Diferenciály elementů délky, plochy a objemu v různých souřadnicových systémech.

5) Přepíšeme $d\mathbf{E}$ pomocí integrační proměnné (integračních proměnných) a z charakteru symetrie určíme nenulovou složku vektoru intenzity elektrického pole.

6) Dokončíme integraci a určíme \mathbf{E} .

Následující tabulka ukazuje použití výše popsaného postupu k výpočtu elektrického pole rovnoměrně nabitě úsečky, prstence a disku.

	přímka	prstenec	disk
nákres			
(2) vyjádření dq pomocí hustoty náboje	$dq = \lambda dx'$	$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dA$
(3) dosazení do dE	$dE = k_e \frac{\lambda dx'}{r'^2}$	$dE = k_e \frac{\lambda dl}{r^2}$	$dE = k_e \frac{\sigma dA}{r^2}$
(4) vyjádření r a diferenciálu elementu v příslušné souřadnicové soustavě	dx' $\cos \theta = \frac{y}{r'}$ $r' = \sqrt{x'^2 + y^2}$	$dl = R d\phi'$ $\cos \theta = \frac{z}{r}$ $r = \sqrt{R^2 + z^2}$	$dA = 2\pi r' dr'$ $\cos \theta = \frac{z}{r}$ $r = \sqrt{r'^2 + z^2}$
(5) identifikace nenulových složek dE ze symetrie úlohy	$dE_y = dE \cos \theta$ $= k_e \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$	$dE_z = dE \cos \theta$ $= \frac{k_e \lambda R z d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$dE_z = dE \cos \theta$ $= k_e \frac{2\pi \sigma z r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$
(6) konečná integrace	$E_y = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{k_e \lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ $= \frac{2k_e \lambda}{y} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + y^2}}$	$E_z = \frac{k_e R \lambda z \oint d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ $= k_e \frac{(2\pi R \lambda) z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ $= k_e \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$E_z = \int_0^R \frac{2\pi \sigma k_e z r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$ $= 2\pi \sigma k_e \left(\frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$

2.13 Řešené úlohy

2.13.1 Atom vodíku

V klasickém modelu atomu vodíku obíhá elektron okolo protonu po dráze o poloměru $r = 0,53 \times 10^{-10}$ m. Velikost náboje elektronu i protonu je $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

- Jaká je velikost síly, působící mezi elektronem a protonem?
- Jaká je intenzita elektrického pole protonu ve vzdálenosti r ?
- Jaký je poměr elektrické síly a gravitační síly, kterými na sebe působí proton a elektron? Závisí výsledek na vzdálenosti protonu a elektronu?

(d) Na základě (c) vysvětlete, proč elektrické síly neovlivňují oběh planet okolo Slunce.

Řešení:

(a) Velikost síly je dána vztahem

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

Prostým dosazením hodnot do vztahu zjistíme, že velikost síly působící mezi elektronem a protonem je $F_e = 8,2 \times 10^{-8}$ N.

(b) Intenzita elektrického pole protonu je

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = 5,76 \times 10^{11} \text{ N/C}.$$

(c) Hmotnost elektronu je $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg a hmotnost protonu je $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg.

Poměr velikosti elektrické a gravitační síly je tedy

$$\gamma = \frac{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \right)}{\left(G \frac{m_p m_e}{r^2} \right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{G m_p m_e} = 2,2 \times 10^{39}.$$

Tento poměr tedy nezávisí na vzdálenosti r protonu a elektronu.

(d) Elektrická síla, působící mezi protonem a elektronem, je o 39 řádů silnější než gravitační síla. Proč jsou tedy pohyby planet určovány silou gravitační a nikoli elektrickou? Odpověď je daná tím, že velikost náboje elektronu a protonu je totožná. Dosud nejpřesnější experimenty ukazují, že jejich velikosti jsou shodné nejméně do řádu 10^{-24} . Protože objekty, jako jsou planety, obsahují stejné množství protonů a elektronů, jsou celkově elektricky neutrální, a proto jsou pohyby planet určovány gravitací.

P 2.13.2 Millikanův experiment s olejovou kapkou

Olejová kapka o poloměru $r = 1,64 \times 10^{-6}$ m a hustotě $\rho = 8,51 \times 10^2$ kg/m³ je z klidu vypuštěna do oblasti s konstantní intenzitou elektrického pole \mathbf{E} , která míří směrem dolů. Olejová kapka nese náboj q neznámé velikosti (díky ozařování rentgenovými paprsky). Velikost elektrického pole nastavíme tak, aby se gravitační síla $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ působící na olejovou kapku vyrovnala elektrické síle $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$. Předpokládejme, že tato rovnost nastane při intenzitě pole $\mathbf{E} = -E_y \hat{\mathbf{j}} = -(1,92 \times 10^5 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{j}}$ se složkou $E_y = 1,92 \times 10^5$ N/C.

(a) Jaká je hmotnost olejové kapky?

(b) Jaký je náboj olejové kapky v jednotkách elementárního náboje $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C?

Řešení:

(a) Hmotnost kapky oleje získáme, vynásobíme-li její hustotu ρ_0 jejím objemem V ,

$$M = \rho_0 V = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right),$$

kde předpokládáme, že kapka má kulový tvar, poloměr r a objem $V = 4\pi r^3/3$. Nyní do výrazu dosadíme zadané hodnoty a vypočteme hmotnost

$$M = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 1,57 \times 10^{-14} \text{ kg}.$$

- (b) Olejová kapka se bude nacházet v rovnovážné poloze, pokud bude výslednice působící gravitační a elektrické síly nulová: $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = 0$. Protože gravitační síla působí směrem dolů, musí elektrická síla působit opačný směrem. Odtud dostaneme

$$0 = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} \Rightarrow mg = -qE_y.$$

Protože vektory intenzity elektrického pole míří směrem dolů, musí být kapka nabitá záporným nábojem. Všimněte si, že vektor $\hat{\mathbf{j}}$ jsme zvolili tak, aby mířil vzhůru. Náboj kapky nyní vypočteme

$$q = -\frac{mg}{E_y} = -8,03 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

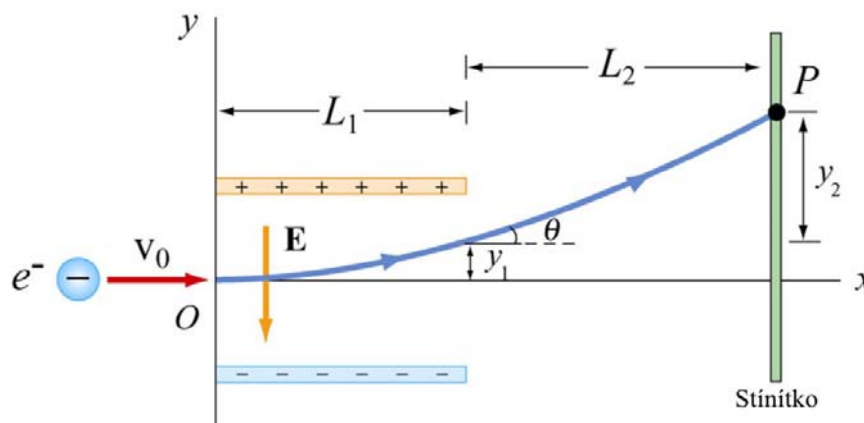
Protože elektron má náboj $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, je náboj kapky v jednotkách náboje e roven

$$N = \frac{q}{e} = 5.$$

Můžeme být překvapeni tím, že výsledkem je přirozené číslo. Millikanův experiment byl prvním přímým potvrzením faktu, že náboj je kvantován. Pro zadaná data dospíváme k závěru, že na kapce se ve skutečnosti vyskytuje 5 elektronů!

P 2.13.3 Náboj pohybující se kolmo na elektrické pole

Elektron je horizontálně vypuštěn do homogenního elektrického pole mezi dvěma opačně nabitými deskami, jak ukazuje obrázek 2.13.1. Částice má počáteční rychlost $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{i}}$ kolmo na vektor intenzity \mathbf{E} .



Obr. 2.13.1: Náboj pohybující se kolmo na elektrické pole

- Jaká síla bude působit na elektron mezi deskami?
- S jakým zrychlením se bude mezi deskami elektron pohybovat?
- Desky mají v x -ovém směru délku L_1 . V jakém čase t_1 opustí elektron prostor mezi deskami?
- Předpokládejte, že elektron vstoupí do elektrického pole v čase $t = 0$. Jaká je jeho rychlost v čase t_1 , kdy opouští prostor mezi deskami?

- (e) Jaká je vertikální odchylka elektronu v čase t_1 ?
 (f) Jaký úhel θ_1 svírá pohybující se elektron s horizontálou v čase t_1 ?
 (g) Elektron narazí v čase t_2 na stěnu zakreslenou na obrázku ve vzdálenosti L_2 od okrajů desek. Jaká je celková vertikální odchylka elektronu mezi časy $t = 0$ a t_2 ?

Řešení:

- (a) Vzhledem k tomu, že elektron má záporný náboj $q = -e$, je síla, která na něj působí

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -e\mathbf{E} = (-e)(-E_y)\hat{\mathbf{j}} = eE_y\hat{\mathbf{j}},$$

kde intenzita elektrického pole je $\mathbf{E} = -E_y\hat{\mathbf{j}}$, kde $E_y > 0$. Síla působící na elektron míří směrem ke kladně nabitě desce. Všimněte si, že pohyb elektronu je analogický pohybu tělesa vypuštěného horizontálně v gravitačním poli, které se po parabolické dráze pohybuje směrem k zemi. Jediný rozdíl spočívá v tom, že síla působící na elektron míří opačným směrem a elektron se proto po parabolické dráze pohybuje směrem vzhůru.

- (b) Zrychlení elektronu je

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m} = -\frac{qE_y}{m}\hat{\mathbf{j}} = \frac{eE_y}{m}\hat{\mathbf{j}}$$

a jeho směr je vzhůru.

- (c) Čas průchodu elektronu mezi deskami je dán výrazem $t_1 = L_1 / v_0$. Čas t_1 nezávisí na zrychlení, protože horizontální složka rychlosti v_0 , která tento čas určuje, je nezávislá na velikosti pole.

- (d) Elektron má počáteční horizontální rychlost $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}}$. Protože zrychlení působí pouze v kladném směru osy y , mění se pouze y -nová složka rychlosti. Rychlost částice v čase t_1 je dána výrazem

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} = v_0\hat{\mathbf{i}} + a_y t_1\hat{\mathbf{j}} = v_0\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{eE_y}{m}\right)t_1\hat{\mathbf{j}} = v_0\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{eE_y L_1}{mv_0}\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

- (e) Z obrázku je patrné, že elektron proletí vzdálenost L_1 za čas $t_1 = L_1 / v_0$ a poté opustí prostor mezi deskami s vertikální odchylkou

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{eE_y}{m}\right) \left(\frac{L_1}{v_0}\right)^2.$$

- (f) V čase t_1 , kdy elektron opouští prostor desek, svírá s horizontálou úhel θ_1 , který je dán poměrem velikostí složek rychlosti,

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{(eE_y / m)(L_1 / v_0)}{v_0} = \frac{eE_y L_1}{mv_0^2}.$$

- (g) Poté, co elektron opustí prostor mezi deskami, nepůsobí na něj již žádná síla a částice se pohybuje přímočarým pohybem. Odchylka y_2 je dána

$$y_2 = L_2 \tan \theta_1 = \frac{eE_y L_1 L_2}{mv_0^2}$$

a celková odchylka od horizontály činí

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{eE_y L_1^2}{mv_0^2} + \frac{eE_y L_1 L_2}{mv_0^2} = \frac{eE_y L_1}{mv_0^2} \left(\frac{1}{2} L_1 + L_2 \right) ..$$

P 2.13.4 Elektrické pole dipólu

Předpokládejme existenci elektrického dipólu podle obrázku 2.7.1.

(a) Ukažte, že ve vzdálenosti $r \gg a$ jsou složky intenzity elektrického pole

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

kde $\sin \theta = x/r$ a $\cos \theta = y/r$.

(b) Ukažte, že výše uvedený výraz pro intenzitu elektrického pole může být v polárních souřadnicích vyjádřen jako

$$\mathbf{E}(r, \theta) = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

kde

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Řešení:

(a) Vypočteme intenzitu pole dipólu ve vzdálenosti $r \gg a$. X -ovou složku vektoru intenzity v bodě P můžeme v Kartézských souřadnicích (x, y, θ) vyjádřit jako

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos \theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right),$$

kde

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos \theta = x^2 + (y \mp a)^2.$$

Podobně můžeme vyjádřit y -novou složku:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin \theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin \theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right).$$

Nyní pomocí Taylorova rozvoje vyjádříme intenzitu pole pomocí polynomů. Obdržíme výrazy úměrné $1/r^3$ (kde $r = +(x^2 + y^2)^{1/2}$) a výrazy úměrné $1/r^5$, které zanedbáme. Začneme s úpravou

$$[x^2 + (y \pm a)^2]^{-3/2} = [x^2 + y^2 + a^2 \pm 2ay]^{-3/2} = r^{-3} \left[1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2} \right]^{-3/2}.$$

V limitním případě, kdy $r \gg a$, použijeme Taylorova rozvoje, kde $s \equiv (a^2 \pm 2ay)/r^2$:

$$(1+s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

Výše uvedené rovnice pro intenzitu elektrického pole přecházejí nyní na tvar

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{6xya}{r^5} + \dots, \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5} \right) + \dots$$

kde jsme zanedbali výrazy s s^2 . Intenzitu elektrického pole nyní můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2a}{r^3} \hat{\mathbf{j}} + \frac{6ya}{r^5} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3yx}{r^2} \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{3y^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} \right],$$

kde jsme použili definičního vztahu pro velikost dipólového momentu $p = 2aq$. Dosazením $\sin \theta = x/r$ a $\cos \theta = y/r$ (jak je patrné z obrázku 2.13.4), získáme výsledek

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

(b) Využijeme výrazu, který jsme obdrželi v úloze (a) v kartézských souřadnicích

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3 \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (3 \cos^2 \theta - 1) \hat{\mathbf{j}}].$$

Dalšími úpravami lze tuto rovnici zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (\cos^2 \theta - 1) \hat{\mathbf{j}}] = \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}})], \end{aligned}$$

kde jsme využili známé identity $\cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta$. Protože polární jednotkové vektory $\hat{\mathbf{r}}$ a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ můžeme pomocí kartézských složek vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

má vektor intenzity elektrického pole v polárních souřadnicích tvar

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

a pro velikost intenzity platí

$$E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2}.$$

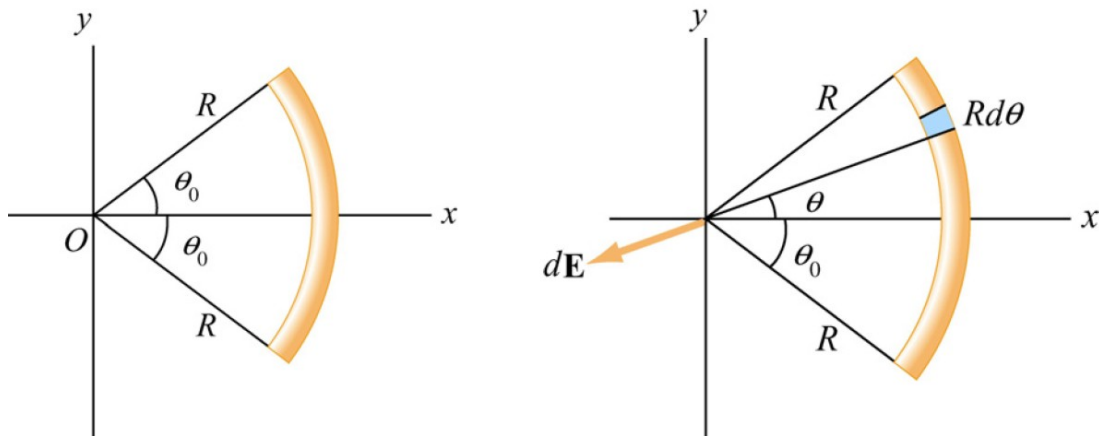
P 2.13.5 Elektrické pole oblouku

Tenká tyč, rovnoměrně nabitá s lineární hustotou l je ohnuta do tvaru oblouku o poloměru R . Oblouk má úhlovou velikost $2\theta_0$ a je souměrný podle osy x , jak ukazuje obrázek 2.13.2. Jaká je celková intenzita elektrického pole \mathbf{E} v počátku O ?

Řešení:

Předpokládejme, že diferenciální element délky $dl = R d\theta$ svírá s osou x úhel θ , jak ukazuje obrázek 2.13.2(b). Velikost náboje, který obsahuje, je $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$. Příspěvek k intenzitě elektrického pole v počátku O je

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} (-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}).$$



Obr. 2.13.2: Nalevo – geometrie nabitého zdroje. Napravo – nábojový element dq .

Integrací přes úhel od $-\theta_0$ do $+\theta_0$ dostáváme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta (-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) \Big|_{-\theta_0}^{\theta_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin\theta_0}{R} \hat{\mathbf{i}}.$$

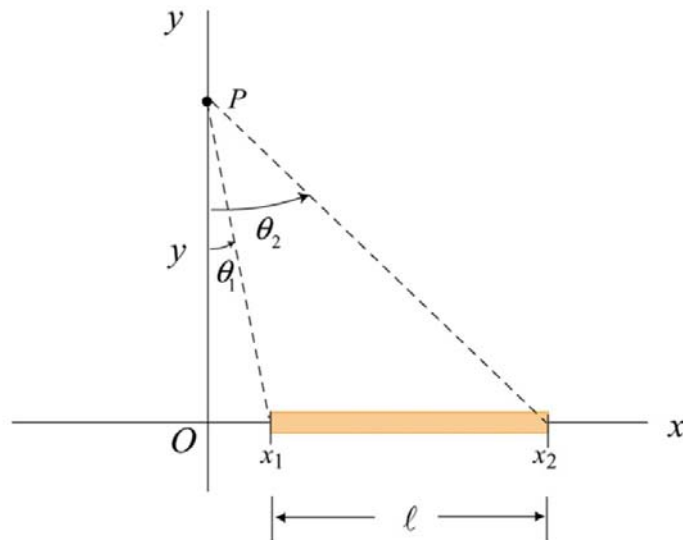
Vidíme, že vektor intenzity elektrického pole má nenulovou pouze x -ovou složku, což vyplývá ze symetrie úlohy. Při limitním přechodu $\theta_0 \rightarrow \pi$ se z oblouku stane prstenec. Protože $\sin\pi = 0$, vyplývá z výše uvedené rovnice, že ve středu nevodivého prstence je intenzita elektrického pole nulová. To je možné opět odhadnout ze symetrie zadání. Na druhé straně, pro velmi malý úhel $q \ll \theta_0$ je $\sin\theta_0 \doteq \theta_0$ a výraz přechází na pole bodového náboje:

$$\mathbf{E} \doteq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\theta_0}{R} \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda\theta_0 R}{R^2} \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{\mathbf{i}},$$

kde celkový náboj oblouku je $Q = \lambda l = \lambda(2R\theta_0)$.

P 2.13.6 Elektrické pole mimo osu tyče konečné délky

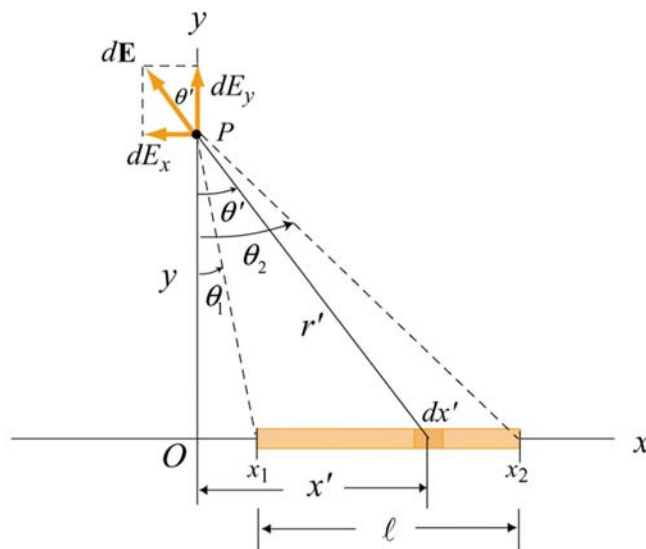
Nevodivá tyč délky l , nabitá rovnoměrně celkovým nábojem Q s hustotou λ leží podél osy x , jak znázorňuje obrázek 2.13.3. Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě P , který leží ve vzdálenosti y od osy tyče.



Obr. 2.13.3.

Řešení:

Problém můžeme vyřešit pomocí postupu, který jsme využili v příkladu 2.3. Podle obrázku 2.13.4. zavedeme délkový element dx' . Náboj, nesený tímto elementem, je $dq = \lambda dx'$.



Obr.: 2.13.4.

Příspěvek tohoto elementu k intenzitě pole v bodě P je

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} (-\sin\theta' \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta' \hat{\mathbf{j}}),$$

kde jsme jednotkový vektor $\hat{\mathbf{r}}$ zapsali v Kartézských souřadnicích: $\hat{\mathbf{r}} = -\sin\theta' \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta' \hat{\mathbf{j}}$. Díky absenci symetrie má intenzita v bodě P jak x -ovou tak y -novou složku. Složka ve směru osy x je dána vztahem

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \sin\theta' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x' dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Integrací od $x' = x_1$ do $x' = x_2$ dostaneme

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x'dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{x_1^2+y^2}^{x_2^2+y^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} u^{-1/2} \Big|_{x_1^2+y^2}^{x_2^2+y^2} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left[\frac{y}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1). \end{aligned}$$

Obdobně pro složku intenzity ve směru osy y platí

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \cos \theta' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Integrací přes celou délku tyče dostaneme

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

kde jsme k dokončení integrace využili výsledku z rovnice (2.10.8). Při limitně nekonečné délce, kdy $x_1 \rightarrow -\infty$ a $x_2 \rightarrow +\infty$, kde $x_i = y \tan \theta_i$ jsou odpovídající velikosti úhlů $\theta_1 = -\pi/2$ a $\theta_2 = +\pi/2$. Dosazením hodnot do výše uvedených výrazů dostaneme

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y},$$

což je zcela v souladu s výsledkem (2.10.11).

2.14 Tématické otázky

1. Porovnejte Coulombův zákon, $F_e = kq_1q_2/r^2$ s Newtonovým gravitačním zákonem, $F_g = Gm_1m_2/r^2$.
2. Mohou se silokřivky pole navzájem křížit? Vysvětlete.
3. Dva opačné náboje jsou umístěny na přímce dle následujícího obrázku.



Velikost náboje napravo je třikrát větší než velikost náboje nalevo. Kde, kromě nekonečna, může být intenzita elektrického pole nulová?

4. Testovací náboj se nachází v bodě P v blízkosti kladně nabitě nevodivé tyče.



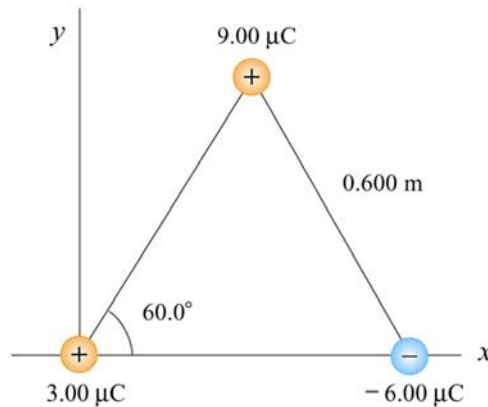
Jak se změní velikost a směr intenzity elektrického pole, jestliže zmenšíme velikost náboje, ale jeho znaménko a vše ostatní zachováme?

- Elektrický dipól, který je tvořen dvěma stejně velkými bodovými náboji opačného znaménka na koncích nevodivé tyče, může volně rotovat okolo těžiště v jejím středu. Tyč je vložena do nehomogenního elektrického pole. Bude na ni působit síla a/nebo moment sil?

2.15 Neřešené úlohy

P 2.15.1 Tři bodové náboje

Tři bodové náboje jsou umístěny do vrcholů rovnostranného trojúhelníku dle obrázku 2.15.1.

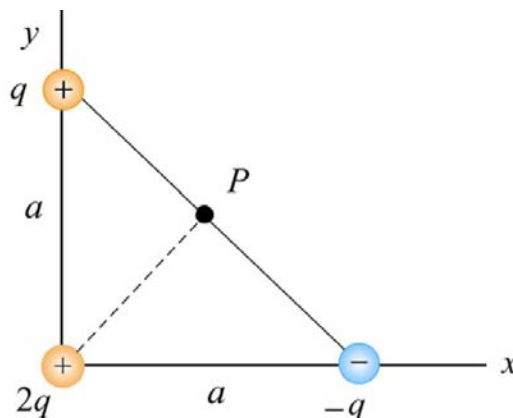


Obr. 2.15.1: Tři bodové náboje.

Vypočtete, jaké síly působí na (a) náboj $9,00 \mu\text{C}$ a (b) $-6,00 \mu\text{C}$.

P 2.15.2 Tři bodové náboje

Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník o odvěsně a má ve vrcholech umístěny náboje q , $+2q$ a $-q$, viz obrázek 2.15.2.

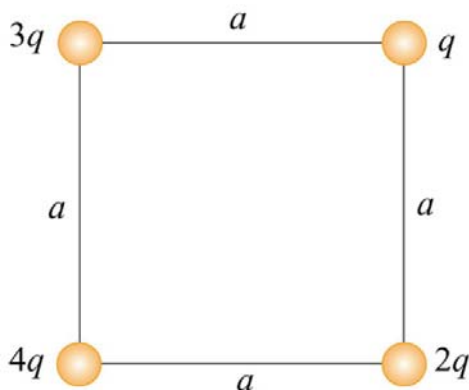


Obr. 2.15.2.

Jaká je intenzita elektrického pole v bodě P , který leží uprostřed strany spojující náboje $+q$ a $-q$? Vyjádřete velikost a směr intenzity pole.

P 2.15.3 Čtyři bodové náboje

Čtyři bodové náboje jsou umístěny v rozích čtverce o straně a dle obrázku 2.15.3.



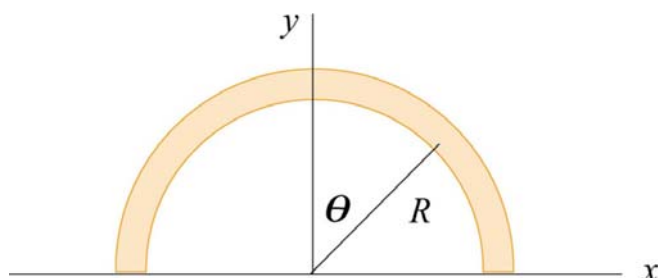
Obr. 2.15.3: Čtyři bodové náboje.

(a) Jaká je intenzita elektrického pole v místě náboje q ?

(b) Jaká síla působí na náboj $2q$?

P 2.15.4 Polokruhový závit

Kladně nabitý drát je ohnut do tvaru půlkruhu o poloměru R , viz obrázek 2.15.4.



Obr. 2.15.4.

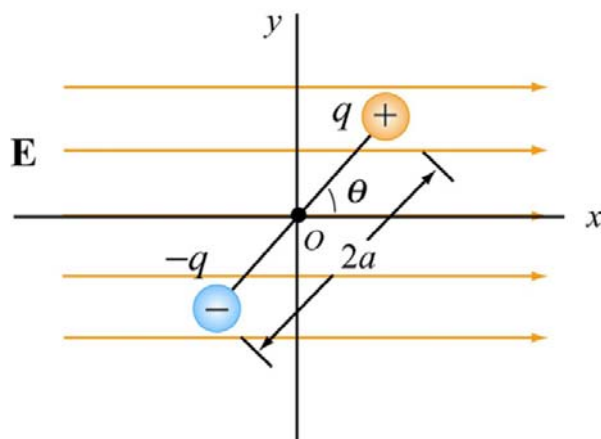
Celkový náboj půlkruhu je Q . Nábojová hustota podél drátu však není konstantní, ale je dána výrazem $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$.

(a) Jaký je vztah mezi λ_0 , R a Q ?

(b) Kdybychom do počátku umístili náboj q , jaká celková síla by na něj působila?

P 2.15.5 Elektrický dipól

Elektrický dipól se nachází v rovině xy v homogenním elektrickém poli s vektorem intenzity mířícím v kladném směru osy x a je z rovnovážné polohy vychýlen o malý úhel θ , viz obrázek 2.15.5.

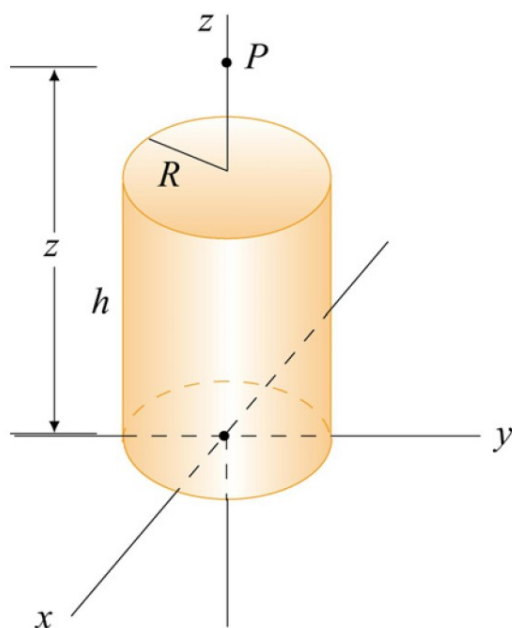


Obr. 2.15.5.

Náboje od sebe dělí vzdálenost $2a$ a moment setrvačnosti dipólu je I . Ukažte, že při uvolnění dipólu z počáteční polohy dojde díky jeho natočení k jeho harmonickým kmitům. Jaká je frekvence oscilací?

P 2.15.6 Nabitý dutý a plný válec

- (a) Rovnoměrně nabitá stěna *dutého válce* o poloměru R a výšce h má celkový náboj Q . Jaká je intenzita elektrického pole v bodě P ve vzdálenosti z od podstavy válce? Situace je zakreslena na obrázku 2.15.6. (*Návod*: Válcovou stěnu nahraďte soustavou nabitých prstenců).

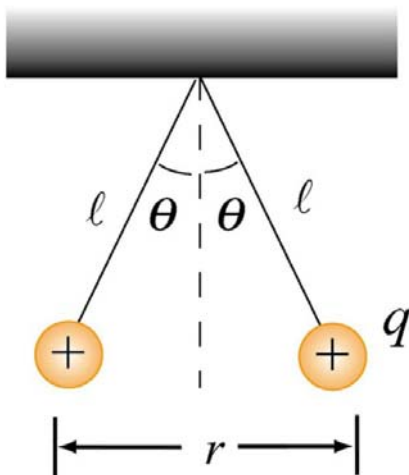


Obr. 2.15.6: Rovnoměrně nabitý válec.

- (b) Válcovou stěnu nahraďte *plným válcem* poloměru R a výšky h , který je rovnoměrně nabit s objemovou hustotou ρ . Jaká je intenzita pole v bodě P ? (*Návod*: Válec nahraďte soustavou nabitých disků).

P 2.15.7 Dvě vodivé koule

Dvě malé koule z vodivého materiálu o stejné hmotnosti m nabité stejným nábojem q jsou zavěšeny na nevodivých závěsech délky l . Každá koule svírá s vertikálou úhel θ (viz obrázek 2.15.7). Předpokládejte, že úhel θ je tak malý, že $\theta \doteq \sin \theta$.



Obr. 2.15.7.

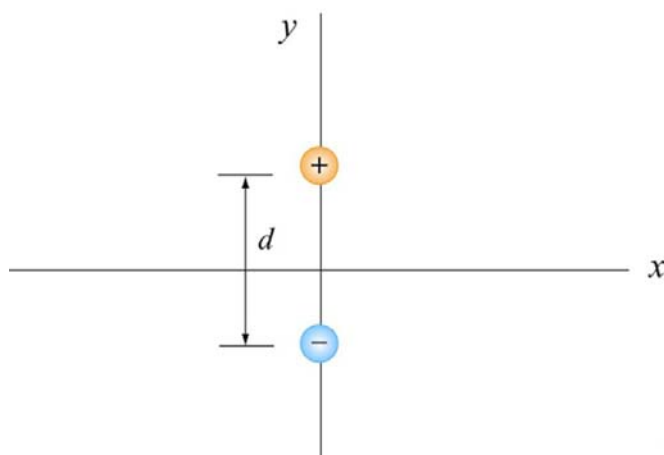
(a) Ukažte, že v rovnovážné poloze je vzdálenost mezi koulemi

$$r = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}.$$

(b) Jaký je náboj q , je-li dáno $l = 1,2$ m, $m = 10$ g a $x = 5$ cm?

P 2.15.8 Moment elektrického dipólu

Elektrický dipól je tvořen dvěma náboji $q_1 = +2e$ a $q_2 = -2e$ ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C), které se nacházejí ve vzdálenosti $d = 10^{-9}$ m od sebe. Náboje jsou umístěny na ose y , jak ukazuje obrázek 2.15.8.



Obr. 2.15.8.

Předpokládejte působení homogenního elektrického pole $\mathbf{E}_{\text{ext}} = (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$.

- (a) Jaká je velikost a směr dipólového momentu?
- (b) Jaká je velikost a směr momentu sil působících na dipól?
- (c) Přispívají elektrická pole nábojů q_1 a q_2 k momentu sil, působícímu na dipól? Stručně vysvětlete.