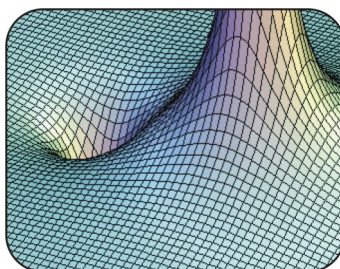


# ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

## I. Pole



### Obsah

<b>1. POLE</b>	<b>2</b>
<b>1.1 PŮSOBENÍ NA DÁLKU VERSUS TEORIE POLE</b>	<b>2</b>
<b>1.2 SKALÁRNÍ POLE</b>	<b>3</b>
1.2.1 POPISY SKALÁRNÍHO POLE	5
<b>1.3 VEKTOROVÁ POLE</b>	<b>6</b>
<b>1.4 TOK TEKUTINY</b>	<b>7</b>
1.4.1 VZTAH MEZI TEKUTINOVÝM MODELEM A ELEKTROMAGNETICKÝM POLEM	11
<b>1.5 GRAVITAČNÍ POLE</b>	<b>11</b>
<b>1.6 ELEKTRICKÁ POLE</b>	<b>12</b>
<b>1.7 MAGNETICKÉ POLE</b>	<b>13</b>
<b>1.8 REPREZENTACE VEKTOROVÝCH POLÍ</b>	<b>14</b>
1.8.1 ZNÁZORNĚNÍ VEKTOROVÉHO POLE POMOCÍ VEKTORŮ	15
1.8.2 ZNÁZORNĚNÍ VEKTOROVÝCH POLÍ POMOCÍ SILOKŘIVEK	15
1.8.3 ZNÁZORNĚNÍ VEKTOROVÝCH POLÍ POMOCÍ „ŠUMOVÉ TEXTURY“	17
1.8.4 POHYB ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH SILOKŘIVEK	17
<b>1.9 SHRnutí</b>	<b>18</b>
<b>1.10 ŘEŠENÉ ÚLOHY</b>	<b>18</b>
<b>1.11 NEŘEŠENÉ ÚLOHY</b>	<b>21</b>

# 1. Pole

## 1.1 Působení na dálku versus teorie pole

*„...Aby si mohl student uvědomit přínos této vědy (elektřiny a magnetizmu), musí být důvěrně obeznámen se značným množstvím velmi složité matematiky, jejíž pouhé uchování v paměti mu významně přispívá k jeho budoucímu růstu...“*

James Clerk Maxwell [1855]

Klasická teorie elektromagnetického pole se vynořila ve více méně kompletní formě v roce 1873 v práci Jamese Clerka Maxwella „Pojednání o elektřině a magnetizmu“. Maxwell založil svojí teorii z větší části na intuitivních úvahách Michaela Faradaye. Široké přijetí Maxwellovy teorie způsobilo zásadní posun našeho poznání fyzikální reality. V této teorii jsou elektromagnetická pole zprostředkovateli interakce mezi hmotnými objekty. Tento pohled se radikálně liší od staršího pohledu „působení na dálku“, který předcházal teorii pole.

Co je „působení na dálku“? Je to pohled na svět, ve kterém interakce dvou hmotných objektů nevyžaduje žádný jiný mechanismus než objekty samotné a prázdný prostor mezi nimi. To znamená, že objekty na sebe navzájem působí silou jednoduše díky svojí přítomnosti. Jakékoliv vzájemné síly mezi nimi (na příklad gravitační nebo elektromagnetické) jsou okamžitě přenášeny z jednoho objektu na jiný skrze prázdný prostor. Není zde potřeba zahrnout jinou metodu nebo zprostředkovatele takovýchto sil, či konečnou rychlost šíření zprostředkovaného přenosu. To je známo jako „silové působení na dálku“, protože kromě objektů působících na sebe „silou“ a „vzdáleností“ mezi nimi není již v prázdném prostoru zahrnuto nic. Žádný jiný mechanismus nebo zprostředkovatel není potřeba.

Mnoho vědců mělo námitky proti modelu „působení na dálku“, protože odporoval jejich každodenním zkušenostem, že silou může působit objekt na jiný jen v případě, když jsou v přímém kontaktu. V teorii pole je tento pohled pravdivý jen v určitém smyslu. To znamená, že objekty, které nejsou v přímém kontaktu (objekty oddělené zjevně prázdným prostorem) musí na sebe navzájem silově působit *prostřednictvím jakéhosi média nebo mechanismu nalézajícím se v prostoru mezi objekty*.

Síla mezi dvěma objekty je přenášena přímým „kontaktem“ prvního tělesa na zprostředkující mechanismus (médium) bezprostředně obklopující tento objekt. Poté ji tento prvek prostoru předá sousednímu, ten dalšímu a tímto plynulým způsobem je síla přenesena na médium bezprostředně obklopující druhý objekt a z toho nakonec na objekt samotný.

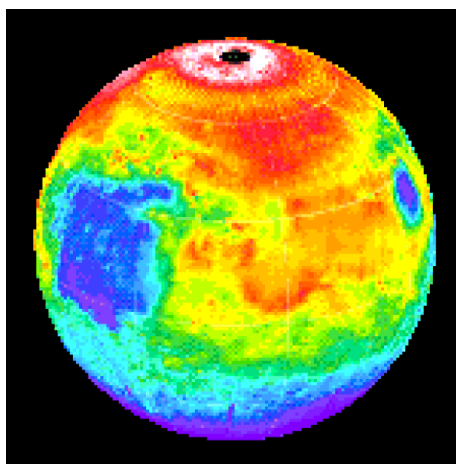
Ačkoliv dva objekty nejsou v přímém kontaktu společně navzájem, jsou v přímém kontaktu s médiem nebo mechanismem, které existují mezi nimi. Síla mezi objekty je přenášena (konečnou rychlostí) jakýmsi tlakem vyvolaným prostorem ležícím mezi nimi. Pohled „teorie pole“ se tak vyhýbá pojmu „působení na dálku“ a nahrazuje jej pojmem „působení nepřetržitým kontaktem“. Tento „kontakt“ je způsobený tlakem nebo „polem“ indukovaným v prostoru mezi objekty pouhou jejich přítomností.

Tato myšlenka je podstatou teorie pole a je také základem všech moderních teorií popisujících svět okolo nás. Klasická teorie elektřiny a magnetizmu byla první teorií pole. Zahrnuje mnoho matematicky komplikovaných pojmů. V důsledku toho je jí ještě nyní obtížné snadno porozumět. Záměrem této „názorné exkurze“ do elektřiny a magnetizmu je poskytnout náhled do podstaty teorie s využitím názorných animací.

## 1.2 Skalární pole

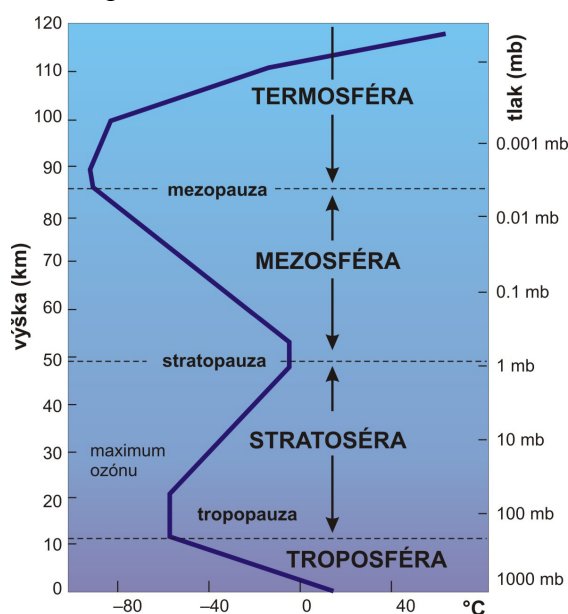
*Skalární pole* je funkce, která nám dává v každém bodě v prostoru právě jednu hodnotu nějaké proměnné. Jako příklad je uveden obrázek 1.2.1, který ukazuje noční teploty na Marsu změřené přístrojem „Thermal Emission Spectrometer“ umístěným na sondě Mars Global Surveyor (MGS). Data byla naměřena během prvních 500 oběhů mapovací mise MGS. Nejnížší teploty ( $-120\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) jsou znázorněny nachově, zatímco nejvyšší teploty ( $-65\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) jsou znázorněny bíle.

Střed snímku Marsu je v planině Isidis Planitia ( $15^{\circ}$  severně,  $270^{\circ}$  západně). Je pokryt teplým materiálem, pravděpodobně s písčítým a kamenitým povrchem. Malá chladná (modrá) kruhová oblast napravo je oblast vulkánu Elysium. Je pokryta prachem, který v noci rychle chladne. V tomto ročním období je severní polární oblast zcela osvětlena a v noci je relativně horká. Na jižní polokouli je zimní období a tamní oblasti jsou extrémně chladné.



Obr. 1.2.1: Noční teploty na Marsu.

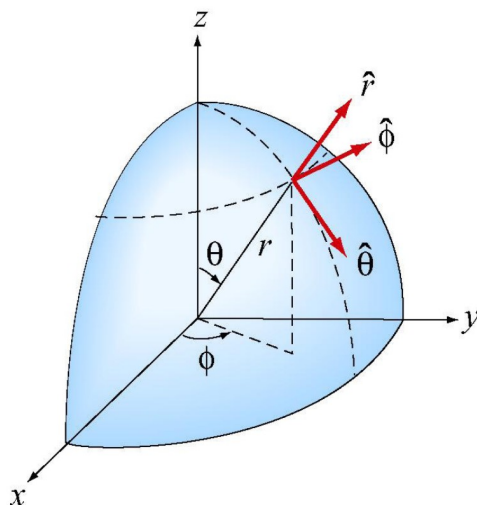
Na obrázku jsou různé teploty znázorněny různými barvami. Nicméně tato mapka může znázorňovat pouze rozložení teplot na povrchu (2D) a tudíž nám nemůže ukázat rozložení a změny teplot s výškou. V principu nám ale skalární pole udává hodnoty nejen ve dvou rozměrech, ale v každém bodě v prostoru.



Obr. 1.2.2: Změny teploty atmosféry Země jako funkce výšky nad jejím povrchem.

Obrázek 1.2.2 znázorňuje změny teploty jako funkce výšky nad povrchem Země. Výška je třetím rozměrem a může doplňovat grafy obdobné obrázku 1.2.1.

Jak znázornit třírozměrné skalární pole? Je například možné vytvořit třírozměrný objemový element atmosféry a zbarvením označit jeho teplotu.



Obr. 1.2.3: Sférické souřadnice.

Jinou cestou je jednoduše reprezentovat teplotu matematickou funkcí. Pro teplotu atmosféry Země můžeme využít sférické souřadnice  $(r, \theta, \phi)$  znázorněné na obrázku 1.2.3 s počátkem umístěným do středu Země. Teplota v jakémkoliv místě je pak dána funkcí  $T(r, \theta, \phi)$ . Jinými slovy, hodnota této funkce v bodě se souřadnicemi  $(r, \theta, \phi)$  je teplota v daných jednotkách. Teplotní funkce  $T(r, \theta, \phi)$  je příkladem „skalární funkce“. Výraz „skalár“ je zde proto, že teplota v nějakém bodě je jedno číslo a ne vektor (vektor je dán jak velikostí, tak také směrem).

### **P** Příklad 1.1: Zpola zmrzlá, zpola opečená planeta

Jako příklad skalárního pole uvažujme planetu, jejíž atmosféra rotuje se stejnou úhlovou frekvencí okolo planetární osy, s jakou celá planeta obíhá okolo své hvězdy, tj. ke hvězdě je přivrácená vždy ta samá polokoule. Nechť  $R$  označuje poloměr planety. Užijeme sférické souřadnice  $(r, \theta, \phi)$  s počátkem ve středu planety a zvolíme  $\phi = \pi/2$  ve středu polokoule přivrácené ke hvězdě. Zjednodušený model průběhu teploty v bodě se souřadnicemi  $(r, \theta, \phi)$  je dán vztahem

$$T(r, \theta, \phi) = [T_0 + T_1 \sin^2 \theta + T_2 (1 + \sin \phi)] e^{-\alpha(r-R)}, \quad (1.2.1)$$

kde  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  a  $\alpha$  jsou konstanty. Závislost na proměnné  $r$  ve členu  $e^{-\alpha(r-R)}$  znamená, že teplota exponenciálně ubývá s výškou, kterou se vzdalujeme od povrchu planety. Závislost proměnné  $\theta$  ve členu  $\sin^2 \theta$  značí úbytek teploty směrem k pólům. A konečně závislost na  $\phi$  ve členu  $(1 + \sin \phi)$  značí úbytek teploty, pokud se pohybuje směrem od centra polokoule obrácené ke hvězdě.

Skalární pole může samozřejmě sloužit i k popisu jiných skalárních fyzikálních veličin, jako je například atmosférický tlak. Nicméně jedním číslem (velikostí) v každém bodě prostoru nemůžeme dostatečně charakterizovat některé veličiny, jako je například rychlost větru, poněvadž k popisu rychlosti větru potřebujeme znát i směr větru v každém bodě.

### 1.2.1 Popisy skalárního pole

Pole je zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí dané hodnoty. Skalární pole je pole, které každému bodu v prostoru přiřazuje jedno číslo. Dobrý příklad takového pole je teplota atmosféry Země v blízkosti povrchu. Jiným příkladem je analytický výraz

$$\phi(x, y, z) = \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} - \frac{1/3}{x^2 + (y-d)^2 + z^2} \right]. \quad (1.2.2)$$

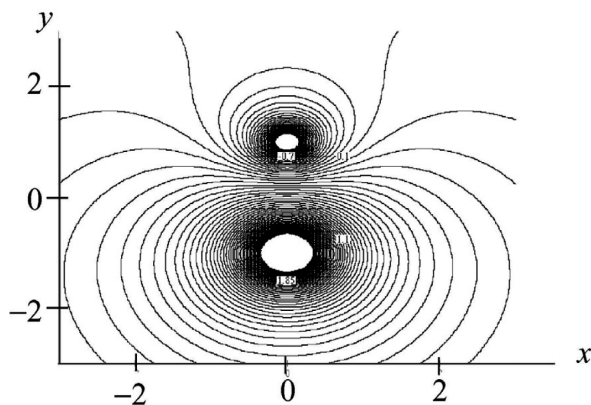
Tento výraz definuje hodnotu skalární funkce  $\phi$  v každém bodě  $(x, y, z)$  prostoru. Jak ale vystihnout a znázornit nějaké skalární pole, např. takové, jako popisuje (1.2.2)? Dále ukážeme tři možné reprezentace neboli znázornění polí.

#### 1. Vrstevnicové mapy

Jednou z možností je zafixovat jednu z proměnných (například  $z$ ) a pak znázornit mapu vrstevnic pro zbývající dva rozměry, ve které křivky představují linie konstantní hodnoty funkce  $\phi$ . Sled takovýchto map nám pro různé fixní hodnoty  $z$  potom dá představu vlastností dané skalární funkce. Ukážeme takovou vrstevnicovou mapu rovnice (1.2.2) v rovině  $xy$  pro  $z = 0$ , jmenovitě funkce

$$\phi(x, y, 0) = \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2}} - \frac{1/3}{x^2 + (y-d)^2} \right]. \quad (1.2.3)$$

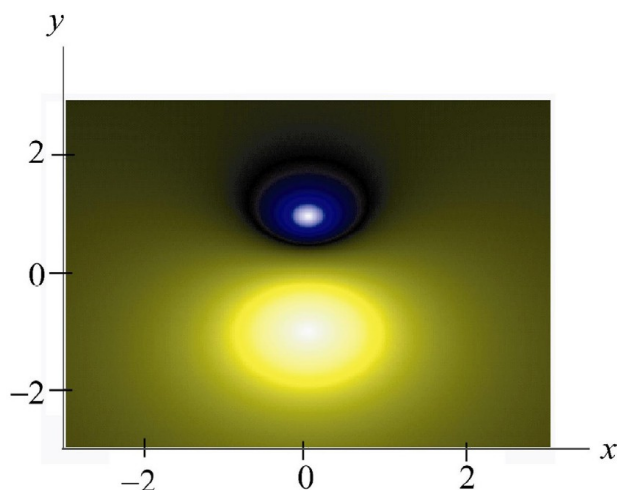
Různé hodnoty jsou znázorněny na Obr. 1.2.4 pro  $d = 1$ . Hodnoty jsou pro každou znázorněnou velikost vyneseny v grafu.



Obr. 1.2.4: Vrstevnicová mapa v rovině  $xy$  skalárního pole daného rovnicí (1.2.3).

#### 2. Barevné kódování

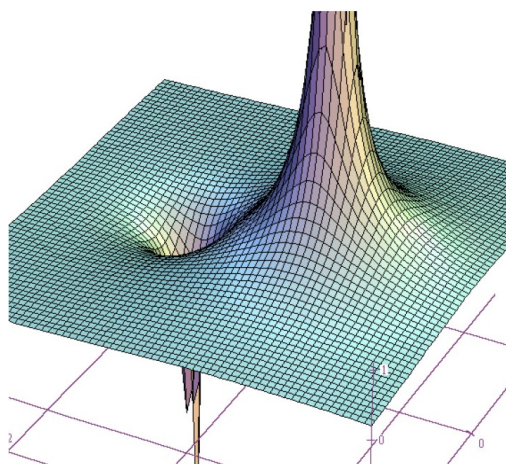
Jiným způsobem, jak znázornit hodnoty skalárního pole, je barevné odlišení hodnot v rovině dvou proměnných při fixní hodnotě třetí. Toto schéma jsme použili při znázornění teplotních polí na obrázcích 1.2.1 a 1.2.2. Na obrázku 1.2.5 je znázorněn podobný graf znázorňující pole  $\phi(x, y, 0)$ . Různé hodnoty funkce  $\phi(x, y, 0)$  jsou znázorněny rozdílnými barvami na diagramu.



Obr. 1.2.5: Barevně kódovaný diagram v rovině  $xy$  skalárního pole daného rovnicí (1.2.3).

### 3. Prostorový diagram

Třetím způsobem, jak znázornit skalární pole, je zafixovat jeden z rozměrů a vynášet hodnoty funkce jako výšku oproti zbytku prostorových souřadnic, řekněme  $x$  a  $y$ , tj. jako prostorový diagram. Obr. 1.2.6 ukazuje takový diagram stále té samé funkce  $\phi(x, y, 0)$ .

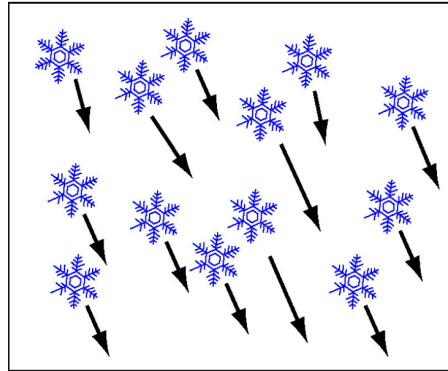


Obr. 1.2.6: Prostorový diagram skalárního pole daného rovnicí (1.2.3).

## 1.3 Vektorová pole

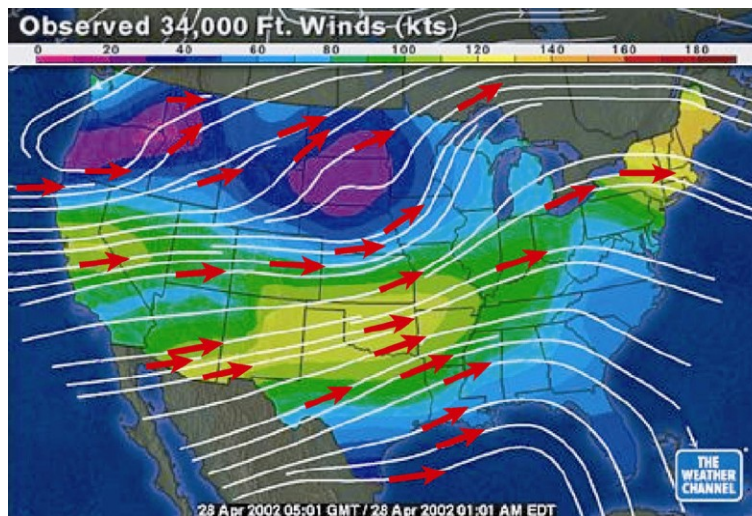
Vektor je veličina, kterou určuje nejen velikost, ale i směr v prostoru. Vektory používáme k popisu takových fyzikálních veličin, jako je např. rychlost, hybnost, zrychlení nebo síla působící na objekt. Nicméně, pokud se pokoušíme popsat systém, který se skládá z velkého počtu objektů (např. pohybující se voda, sníh, déšť,...), musíme přiřadit vektor každému samostatnému objektu.

Uvažujme na příklad padající sněhové vločky, které jsou namalovány na obrázku 1.3.1. Jak sníh padá, každá sněhová vločka se pohybuje svojí specifickou rychlostí. Pohyb sněhových vloček může být analyzován sadou fotografií jeho pohybu. V každém čase můžeme každé sněhové vločce přiřadit vektor rychlosti, který charakterizuje její pohyb.



Obr. 1.3.1: Padající sněh.

Padající sněh je příkladem diskrétního, tj. nespojitého prostředí. Na druhou stranu, jestliže chceme analyzovat pohyb tekutiny, musíme vektor rychlosti přiřadit v každém čase každé částice tekutiny. Každý vektor popisuje směr a velikost rychlosti v každém čase a v každém bodě prostoru. Soubor všech vektorů rychlosti se nazývá vektorové pole rychlostí. Podstatný rozdíl mezi vektorovým a skalárním polem je ten, že vektorové obsahuje informaci jak o velikosti, tak i o směru veličiny v každém časovém okamžiku pro každý bod v prostoru, zatímco skalární pouze udává velikost dané veličiny v každém čase a v každém bodě prostoru. Příkladem spojitého prostředí je např. proudění vzduchu. Na obrázku 1.3.2 je znázorněn příklad proudění vzduchu, kdy rychlost větru je funkcí polohy. Poznamenejme, že znázornění je pro fixní výšku cca 10 363 m.



Obr. 1.3.2: Proudění vzduchu. Šipky ukazují rychlost toku. „Proudové linie“ vznikly propojením jednotlivých šipek.

## 1.4 Tok tekutiny

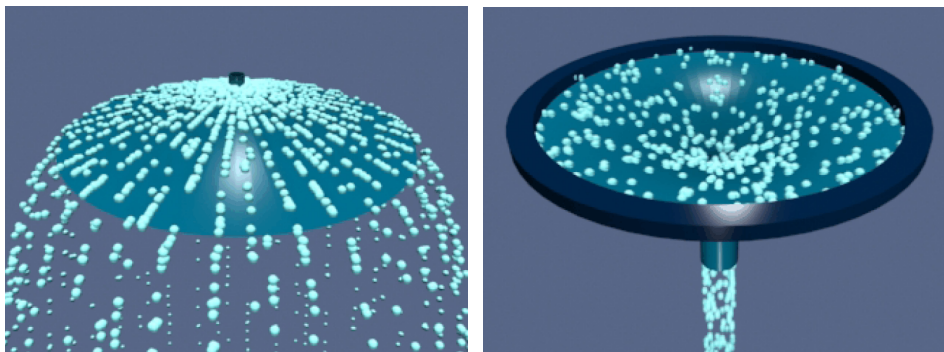
### **V** Animace 1.1: Zřídla a propady

Obecné vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z)$  můžeme napsat ve tvaru:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + F_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + F_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}, \quad (1.4.1)$$

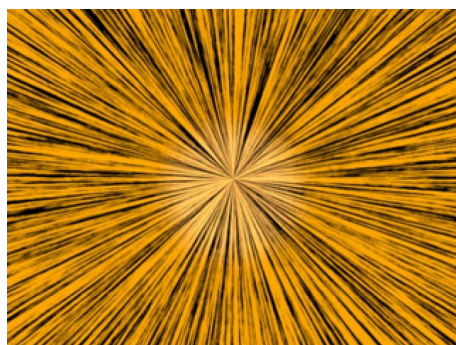
kde jednotlivé komponenty jsou skalární pole. Pro ilustraci vlastností vektorových polí použijeme tekutinové pole, protože vizualizace takovýchto typů vektorových polí jsou nejjednodušší. Na Obr. 1.4.1 vidíte fyzikální případ toku tekutiny, kde ke znázornění struktury

toku tekutiny byl použit konečný počet částic. Na obrázku 1.4.1 (nalevo) se částice (elementy tekutiny) vynořují ve středu kuželu (ve „zřídle“) a tekou dolů přitahovány gravitací. To znamená, že vytváříme částice v počátku a ony následně tekou pryč z místa jejich zrodu. Tento tok je někdy nazýván divergující tok, protože vzniknuvší částice se rozbíhají (*diverse* z latiny) z místa původu. Na Obr. 1.4.1 (napravo) je znázorněn opačný případ, kdy se tok částic sbíhá v jednom „propadu“ tekutiny.



**Obr. 1.4.1:** *Nalevo* – příklad **zřídla** částic a k němu přiřazenému toku tekutiny.  
*Napravo* – příklad **propadu** částic a k němu přiřazenému toku.

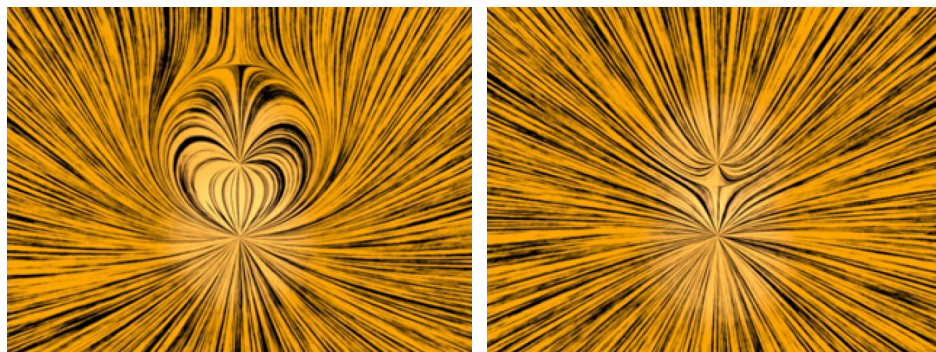
Jiné znázornění divergujícího toku je na Obr. 1.4.2



**Obr. 1.4.2:** Znázornění zřídla s využitím šumové textury.

Zde je směr toku znázorněn šumovou texturou, jejíž směr je v korelaci se směrem znázorňovaného toku tekutiny.

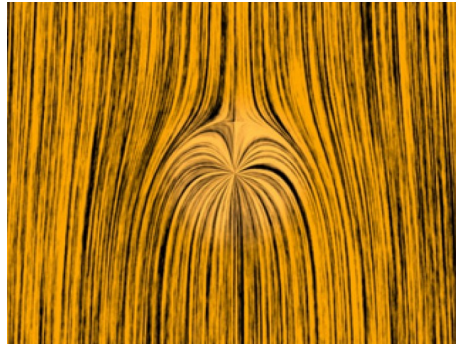
Na Obr. 1.4.3 (nalevo) je zřídlo v blízkosti menší výpusti (propadu) a Obr. 1.4.3 (napravo) znázorňuje dvě zřídla nestejně intenzity.



**Obr. 1.4.3:** *Nalevo* – **zřídlo i propad**, zdroj je silnější.  
*Napravo* – tok tekutiny, který je vytvořen **dvěma zřídly** nestejně intenzity.



A konečně na Obr. 1.4.4 je ukázán konstantní tok klesající dolů, který se vzájemně ovlivňuje se zřídlem. Zdroj je částečně schopen téci vzhůru proti proudu padající tekutiny, ale nakonec je také stržen a otočen směrem dolů.



**Obr. 1.4.4:** Konstantní tok dolů interagující s rozbíhajícím se zdrojem.

V jazyce vektorového počtu reprezentujeme tok pole tekutiny pomocí

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} . \quad (1.4.2)$$

Jestliže je bod  $(x, y, z)$  zřídlem, pak je v tomto bodě divergence  $\mathbf{v}(x, y, z)$  větší než nula. Tj.,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} > 0 , \quad (1.4.3)$$

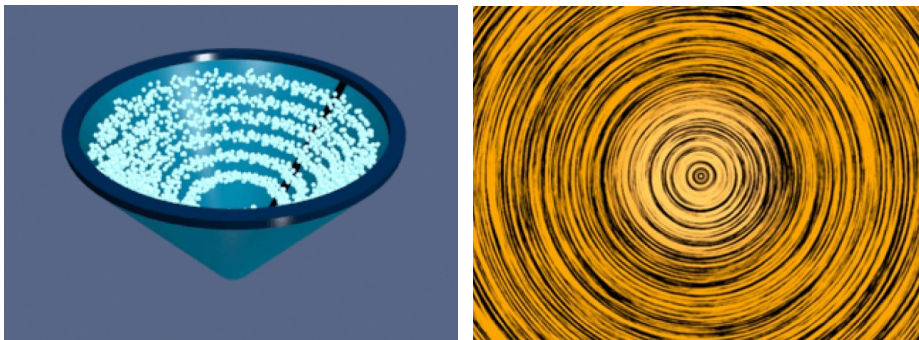
kde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

je operátor nazývaný gradient neboli „nabla“. Naopak, pokud je v bodě  $(x, y, z)$  propad, je v tomto bodě divergence vektorového pole  $\mathbf{v}(x, y, z)$  menší než nula. Jestliže je  $\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) = 0$ , pak v bodě  $(x, y, z)$  není ani zřídlo, ani propad. Pole, jehož pole má všude nulovou divergenci, nazýváme *nestlačitelné*.

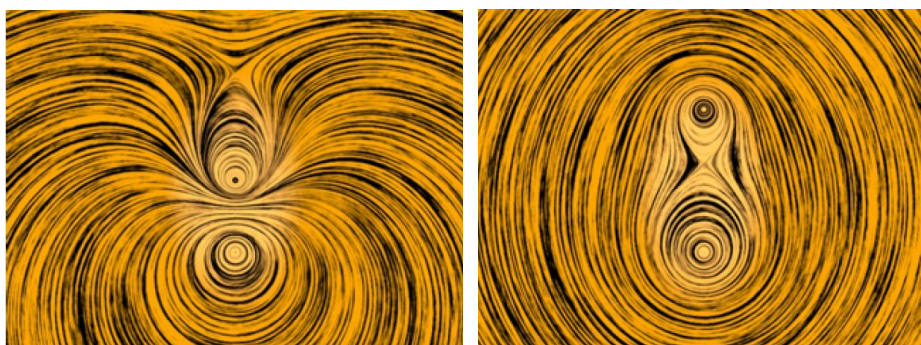
### **V** Animace 1.2: Cirkulace

Tok tekutiny, které neobsahuje ani zřídlo, ani propad, může vykazovat jinou třídu chování – cirkulaci, víření. Na Obr. 1.4.5 (nalevo) je ukázán fyzikální příklad toku pole, které nemá ani zdroj a ani propad. Částice ani nevznikají, ani nezanikají (kromě začátku pohybu), jednoduše se pohybují v kruzích. Jednoduše vířící tekutina může být znázorněna také pomocí šumové textury, jak je vidět na Obr. 1.4.5 (napravo).



**Obr. 1.4.5:** Nalevo – **cirkulující kapalina**. Napravo – znázornění **šumovou texturou**.

Tekutinnové pole může mít více než jeden střed víření. Na obrázku 1.4.6 (nalevo) je ukázán tok pole se dvěma víry, cirkulacemi. Toky víří v opačných směrech a jeden je silnější než druhý. Na obrázku 1.4.6 (napravo) máme stejnou situaci, ale směry obou vírů jsou stejné.



**Obr. 1.4.6:** *Nalevo* – tok okolo dvou center vírů v **opačných** směrech  
*Napravo* – tok okolo dvou center vírů se **stejným** směrem cirkulace.

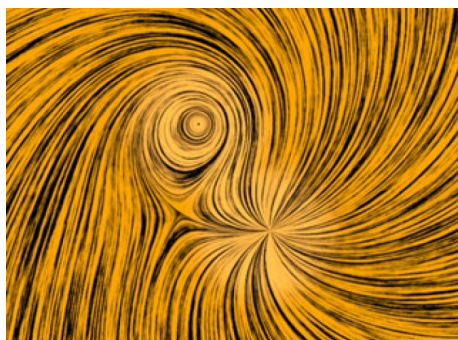
Na Obr. 1.4.7 je znázorněn homogenní tok směřující dolů, interagující s tokem cirkulujícím proti směru hodinových ručiček. Otáčivý tok je schopen téci kousek proti proudu, ale nakonec je stržen silnějším tokem směrem dolů.



**Obr. 1.4.7:** Homogenní tok směřující dolů interagující s tokem cirkulujícím proti směru hodinových ručiček.

V jazyce vektorového počtu říkáme, že toky znázorněné na obrázcích 1.4.5 až 1.4.7 mají nenulovou rotaci, ale nulovou divergenci. Na rozdíl od těchto případů, toky znázorněné na obrázcích 1.4.2 až 1.4.4 mají nulovou rotaci (nepohybují se po kružnicích), ale mají nenulovou divergenci (částice někde vznikají nebo zanikají).

Konečně na Obr. 1.4.8 jsou ukázány oba toky pole, jak vír, tak i zdroj (jak rotace, tak také divergence vektorového pole jsou nenulové). Jakékoli vektorové pole lze zapsat jako součet nevírových částí (nulová rotace) a nedivergujících (nezřídlových, nezdrojových) částí (žádná zřídla ani propady částic). V našem studiu elektromagnetizmu uvidíme, že statické elektrické pole je nevírové (tj. vypadá jako na obrázcích 1.4.2 až 1.4.4) a statické magnetické pole je nedivergující, nezdrojové (tj. podobá se obrázkům 1.4.5 až 1.4.6). Jenom v případech časově proměnného elektrického pole můžeme pozorovat, že má elektrické pole obě vlastnosti, tj. je jak zdrojové, tak i vírové, takže vypadá jako na Obr. 1.4.8. Narozdíl od pole elektrického je pole magnetické vždy nezdrojové (nedivergentní), a to i v časově proměnných situacích. To znamená, že magnetické pole se vždy podobá modelům z obrázků 1.4.5 až 1.4.7.



**Obr. 1.4.8:** Tok tekutinového pole, které má jak zdroj tak i vír (rotaci).

### 1.4.1 Vztah mezi tekutinovým modelem a elektromagnetickým polem

Vektorová pole, která představují tekutinový model, mají bezprostřední fyzikální interpretaci: vektory v každém bodě v prostoru představují směr pohybu částic tekutiny a my můžeme vytvořit animaci takového pohybuujícího se pole, jak jsme viděli výše. Mnohem obecnější vektorová pole, například elektrická a magnetická pole, o kterých pojednáme níže, nemají takovou přímočarou fyzikální interpretaci, jako tekutinové pole. Není zde žádný „tok“ tekutiny podél elektrického ani magnetického pole.

Nicméně i když vektory elektromagnetického pole nepředstavují tok tekutiny, můžeme přenést mnoho pojmů, které jsme použili k popisu tekutinového pole, stejně dobře i na popis pole elektromagnetického. Například budeme mluvit o toku elektromagnetického pole skrze plochu. Jestliže jsme již mluvili o proudění tekutiny, „tok“ by měl mít dobře definovaný fyzikální smysl, a to takový, že by to mělo být množství tekutiny, které proteče skrze danou plochu za jednotku času. Když budeme mluvit o toku elektrického pole skrze plochu, stále budeme užívat stejné pojmy, jako když jsme diskutovali o toku tekutiny, i když jejich význam nebude shodný. Obdobně pak uvidíme, že magnetické vektorové pole má tvar stejný jako cirkulující tekutina a proto také někdy budeme mluvit o cirkulaci či víru magnetického pole. Ale nebude zde ale žádná tekutina, která by se pohybovala podél směru magnetického pole.

Při popisu elektromagnetického pole budeme používat mnoho termínů shodných s popisem toku tekutin proto, abychom lépe porozuměli struktuře elektromagnetických polí. Nicméně stále musíme mít na paměti, že tyto analogie mají omezenou platnost.

## 1.5 Gravitační pole

Dalším příkladem vektorového pole je pole gravitační, které používáme k popisu vzájemné interakce hmotných objektů. Podle Newtonova všeobecného gravitačního zákona je gravitační síla mezi dvěma hmotnými objekty s hmotnostmi  $m$  a  $M$  dána vztahem

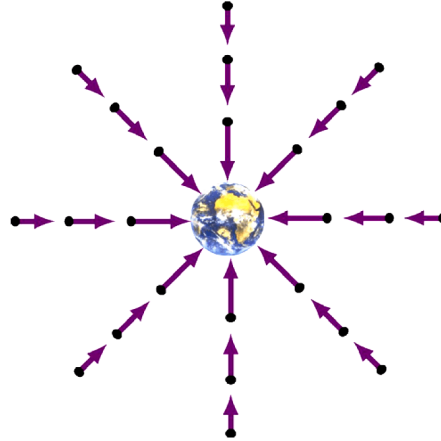
$$\mathbf{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.5.1)$$

kde  $r$  je vzdálenost mezi oběma tělesy a  $\hat{\mathbf{r}}$  je jednotkový vektor umístěný v místě tělesa s hmotností  $M$  a mířící směrem k tělesu s hmotností  $m$ . Konstanta úměrnosti je gravitační konstanta  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . Poznamenejme, že síla je vždy přitažlivá s velikostí nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti mezi tělesy.

Například, jestliže  $M$  je hmotnost Země, pak vektorové pole  $\mathbf{g}$  v každém bodě  $P$  prostoru definující gravitační sílu působící na jednotku hmotnosti můžeme psát

$$\mathbf{g} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.5.2)$$

Z tohoto výrazu vidíme, že je radiální a míří směrem k centru Země tak, jak je to znázorněno na obrázku 1.5.1

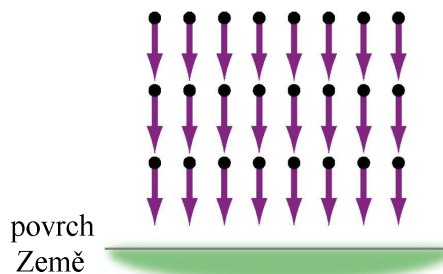


Obr. 1.5.1: Gravitační pole Země

V blízkosti povrchu Země je gravitační pole  $\mathbf{g}$  přibližně konstantní:  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{r}}$ , kde

$$g = G \frac{M}{R_g^2} \approx 9,8 \text{ m/s}^2 \quad (1.5.3)$$

a  $R_g$  je poloměr Země. Gravitační pole v blízkosti povrchu Země je znázorněno na obrázku 1.5.2.



Obr. 1.5.2: Homogenní gravitační pole v blízkosti povrchu Země.

Poznamenejme jen, že hmotné těleso se v takovémto gravitačním poli ne vždy nutně musí pohybovat svisle dolů. To je pravda jen v takovém případě, kdy směr počáteční rychlosti je stejný jako směr pole. Pokud má počáteční rychlost nenulovou kolmou složku, pak bude trajektorie parabolická.

## 1.6 Elektrická pole

Interakce mezi elektrickými částicemi v klidu popisuje elektrostatická síla. Narozdíl od gravitační síly máme v tomto případě dva směry elektrostatických sil, a to síly přitažlivé a odpudivé. Elektrostatická síla mezi dvěma náboji ubývá nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti nábojů a může být jak přitažlivá, tak i odpudivá. Elektrické náboje na sebe navzájem působí silami, které jsou analogické s gravitační silou. Uvažujme objekt, který

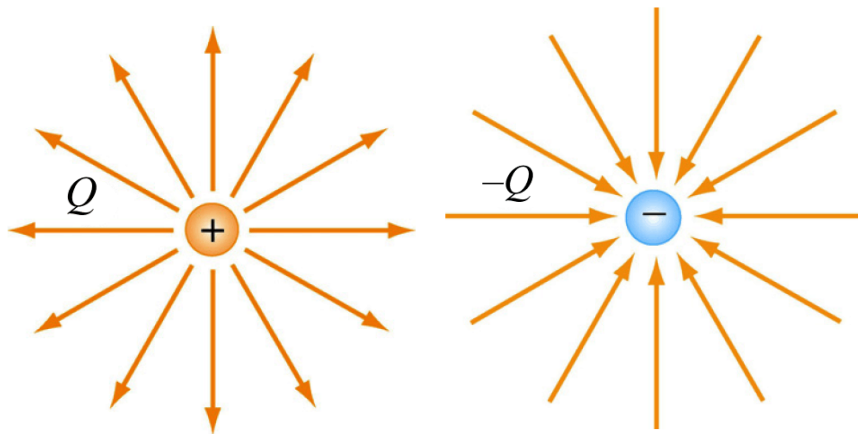
má náboj  $Q$ . „Testovací částice“ s nábojem  $q$ , která je umístěna v bodě  $P$  ve vzdálenosti  $r$  od náboje  $Q$  bude pocíťovat Coulombickou sílu

$$\mathbf{F}_e = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.6.1)$$

kde  $\hat{\mathbf{r}}$  je jednotkový vektor mířící od  $Q$  do  $q$ . Konstanta úměrnosti  $k_e = 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$  se nazývá Coulombova konstanta. Elektrické pole v místě  $P$  je definováno

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{q} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.6.2)$$

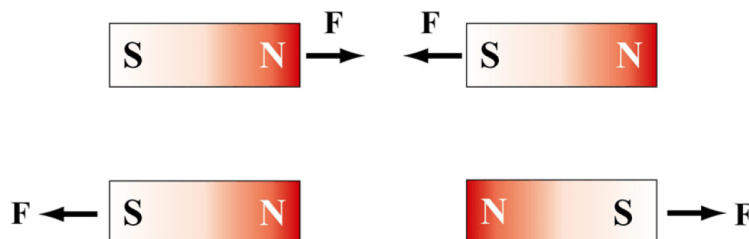
Jednotka elektrického pole je v SI soustavě newton/coulomb (N/C). Jestliže je náboj  $Q$  kladný, elektrické pole směřuje přímo od náboje a opačně, jestliže je  $Q$  záporné, pole míří přímo do náboje (Obr. 1.6.1). V termínech polní teorie můžeme říci, že náboj  $Q$  vytváří elektrické pole  $\mathbf{E}$ , které působí na náboj  $q$  silou  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ .



Obr. 1.6.1: Elektrické pole kladného a záporného náboje.

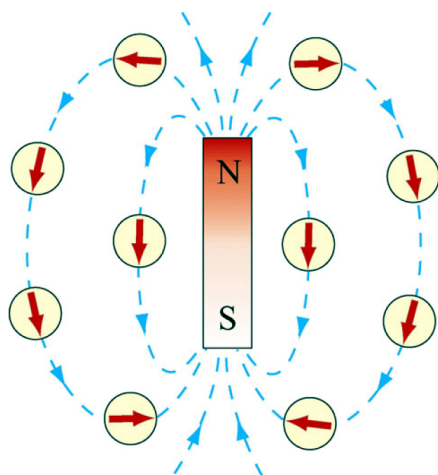
## 1.7 Magnetické pole

Další z příkladů vektorových polí je magnetické pole. Nejznámějším zdrojem magnetického pole je tyčový magnet. Jeden konec tyčového magnetu se nazývá severní pól a opačný pak jižní pól. Stejně póly se odpuzují, zatímco opačné přitahují (Obr. 1.7.1).



Obr. 1.7.1: Přitahující se a odpuzující se magnety.

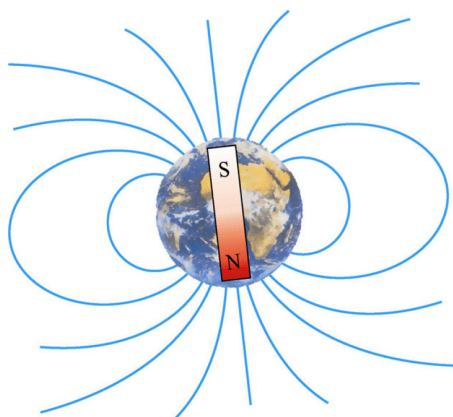
Jestliže do blízkosti tyčového magnetu umístíme kompas, střílky zamíří podél směru magnetického pole tak, jak je znázorněno na Obr. 1.7.2



Obr. 1.7.2: Magnetické pole tyčového magnetu.

Tento jev by se dal vysvětlit následovně: magnetické kompasy obsahují malinké tyčové magnetky, které mohou volně rotovat kolem osy procházející středem magnetu. Když umístíme kompas do blízkosti tyčového magnetu, který je zdrojem vnějšího magnetického pole, začne působit na stříčku točivý moment, jenž otočí stříčkou podél vnějšího magnetického pole.

Magnetické pole Země se chová stejně, jako by byl v Zemi tyčový magnet (Obr. 1.7.3). Poznamenejme jen, že jižní magnetický pól je na severní polokouli.



Obr. 1.7.3: Magnetické pole Země.

## 1.8 Re prezentace vektorových polí

Jak znázornit vektorová pole? Protože ve vektorovém poli je mnohem více informací ke znázornění, jejich vizualizace budou úměrně složitější ve srovnání se znázorňováním skalárních polí. Ukažme si různé způsoby, jak znázornit konkrétní analytický tvar vektorového pole:

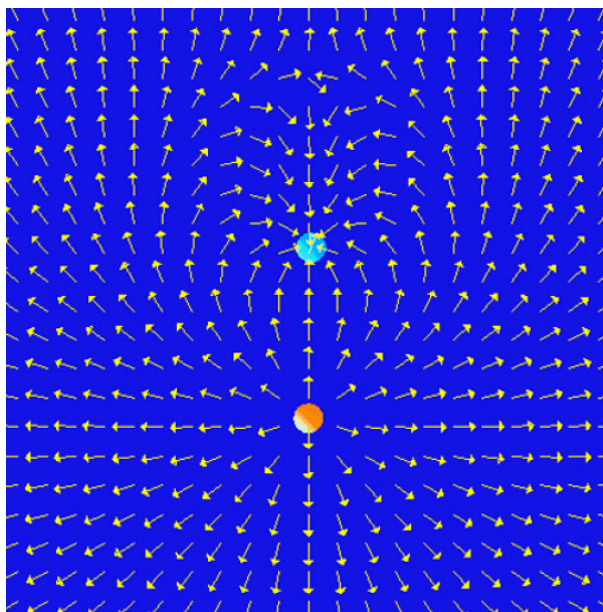
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \left[ \frac{\hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}(y+d) + \hat{\mathbf{k}}z}{\left(x^2 + (y+d)^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{3} \frac{\hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}(y-d) + \hat{\mathbf{k}}z}{\left(x^2 + (y-d)^2 + z^2\right)^{3/2}} \right]. \quad (1.8.1)$$

Toto pole odpovídá elektrickému poli dvou bodových nábojů opačných znamének, kde velikost kladného náboje je třikrát větší než záporného. Kladný náboj je umístěn v poloze

$(0, -d, 0)$  a záporný leží v poloze  $(0, +d, 0)$ . V kapitole 2.7 si ukážeme, jak se toto pole spočítá.

### 1.8.1 Znázornění vektorového pole pomocí vektorů

**S** Na Obr. 1.8.1 je příklad znázornění vektorového pole rovnice (1.8.1) v rovině  $z = 0$  pomocí vektorů. V ukázce jsou i náboje, které toto elektrické pole vytvářejí. Kladný náboj je znázorněn červeně a záporný modře. Toto barevné schéma budeme pro znázornění znamének nábojů používat vždy.



**Obr. 1.8.1:** Reprezentace typu „vektory“ pro pole dvou bodových nábojů, jednoho záporného a jednoho kladného. Velikost kladného náboje je třikrát větší než velikost záporného náboje.

V **apletu**, který je s obrázkem provázán, je možné měnit velikost nábojů a vzdálenosti uzlů mříže a měnit také vzájemnou polohu nábojů.

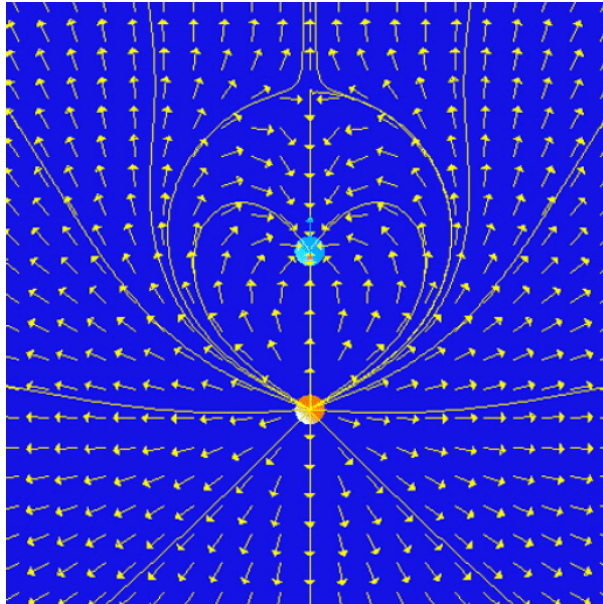
V tomto typu znázornění vektorových polí budeme klást šipky ukazující směr vektorového pole do pravoúhlé mříže. Směr šipky v daném místě ukazuje směr vektorového pole v tomto místě. V mnoha případech také můžeme volit délku šipky úměrně velikosti (intenzitě) vektorového pole v daném místě. Další možností je ukázat pouze směr vektorů (tj. všechny šipky budou mít stejnou délku), ale jejich barevné zabarvení nám znázorní velikost vektorového pole. Velikost vektorového pole také nemusíme znázorňovat vůbec a pouze směrem šipky naznačíme směr pole v daném bodě.

Obr. 1.8.1 je příkladem poslední možnosti. Šipky na mříži znázorňují pouze směr vektorového pole. Není zde použito žádné znázornění velikosti pole, ať pomocí délky šipek nebo barevným odlišením. Všimněte si, že šipky ukazují směrem od kladného náboje (kladný náboj je „zdrídlem“ elektrického pole) a míří směrem k zápornému náboji (záporný náboj je pro elektrické pole „propadem“).

### 1.8.2 Znázornění vektorových polí pomocí silokřivek

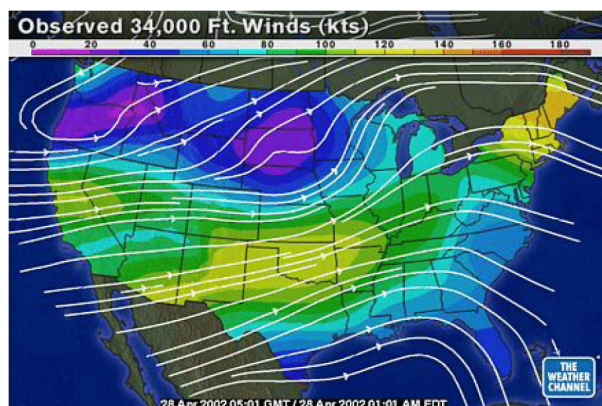
**S** Existují také jiné způsoby, jak znázorňovat vektorová pole. Jeden z nejznámějších je pomocí silokřivek. Michael Faraday je také nazýval „čárami síly“. Takové křivky se kreslí tak, že se začne v nějakém místě prostoru, nakreslí se velmi malý úsek ve směru lokálního vektorového pole. Po kratičké vzdálenosti nalezneme nový směr lokálního vektorového pole

v nové poloze a vykreslíme maličký úsek v novém směru. Poté opět nalezneme nový směr v dalším bodě, nakreslíme tímto směrem další kousek linie a tak pokračujeme stále dál a dál. Takto konstruujeme křivku v prostoru, která je v každém bodě tečná k lokálnímu vektorovému poli. Pokud začneme kreslit v různých počátečních bodech, můžeme nakreslit celou sadu silokřivek, které nám dají dobrou představu o vlastnostech vektorového pole. Obr. 1.8.2 je příkladem znázornění týchž dvou nábojů, které jsme již znázorňovali na Obr. 1.8.1., pomocí silokřivek.



**Obr. 1.8.2:** Reprezentace typu „vektory“ dvou bodových nábojů a téhož případu „silokřivkami“. Silokřivky jsou všude tečné ke směru lokálního vektorového pole. V [apletu](#) jejich zobrazení zaškrtnutím políčka „FIELD LINES“

Pro příklad, o kterém jsme diskutovali v 1.3, jsou silokřivky znázorněny na Obr. 1.8.3



**Obr. 1.8.3:** Silokřivky vzdušného proudění.

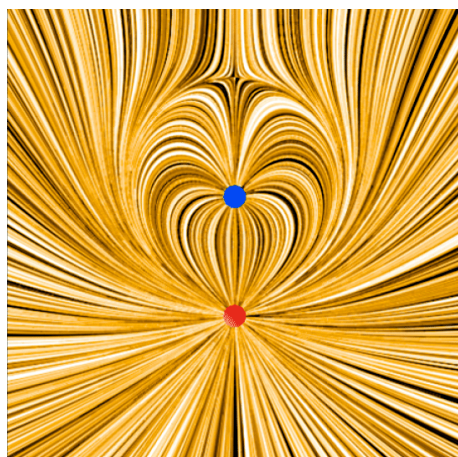
Závěrem lze říci, že silokřivky jsou znázorněním souboru vektorů tvořících pole a které jsou kresleny podle následujících pravidel:

- (1) Směr silokřivky v každém bodě v prostoru je tečný k poli v tomto daném bodě.
- (2) Silokřivky se nikdy nemohou křížit, jinak by ukazovaly v jednom bodě křížení dva různé směry vektorového pole.



### 1.8.3 Znázornění vektorových polí pomocí „šumové textury“

**S** Poslední z typů zobrazení vektorových polí je typ zobrazení pomocí šumové textury, která je lokálně korelována se směrem vektorového pole. Obdobné zobrazení lze přirozeným způsobem realizovat i experimentálně. Rozházíme-li semínka trávy v silném elektrickém poli, začnou se orientovat delší osou rovnoběžně se směrem siločárek pole. Poskytnou nám tím hustý soubor vzorků zobrazujících směry a tedy i tvar pole. Obr. 1.8.4 je reprezentace „travních semínek“ elektrického pole stejných dvou nábojů, jako na Obr. 1.8.1 a 1.8.2.



**Obr. 1.8.4:** Zobrazení elektrického pole znázorněného na obrázcích 1.8.1 a 1.8.2 pomocí šumové textury. V **apletu** propojeném s tímto obrázkem můžeme znázornit šumovou texturou (tlačítkem „GRASS SEEDS“) pole generované různě velkými náboji v různých polohách.

Lokální směry polí jsou v souladu se směry šumové textury diagramu. Šumová textura nám poskytuje mnoho informací o prostorové struktuře pole.

Tuto techniku můžeme použít také na magnetické pole, ale v případě jejího použití odpovídá šumová textura obrazci rozsypaných železných pilin v magnetickém poli, kdy se piliny zorientují delší stranou podél siločárek magnetického pole.

Častá otázka od nových studentů elektromagnetizmu je „Co je mezi siločávkami pole?“ Na obrázcích 1.8.2 a 1.8.4 můžeme vyčíst jasnou odpověď. Mezi dvěma siločávkami je množství jiných siločávek, které jsme si jenom nezvolili k nakreslení. Samotné pole je spojitě všude mezi náboji, což je jeho základní vlastnost.

### 1.8.4 Pohyb elektrických a magnetických siločávek

V tomto kurzu ukážeme prostorovou strukturu elektromagnetických polí s využitím metod, které jsme popsali výše. Navíc u zobrazení pomocí šumové textury budeme často ukazovat i časový vývoj polí. Budeme tak činit proto, že na změnách poloh siločávek znázorněných pomocí šumové textury názorně uvidíme v daném místě směr toku energie elektromagnetického pole. Tok je vždy ve směru  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , vektorového součinu elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetického pole  $\mathbf{B}$  a je tedy vždy kolmý jak k  $\mathbf{E}$ , tak i k  $\mathbf{B}$ . Je zde velký rozdíl mezi tekutinovým polem, kdy směr toku měl stejný směr jako rychlost tekutinového pole samotného.

Animace budeme využívat i pro časově proměnné elektromagnetické pole, protože tato pole umožňují jak tok energie, tak i její uchování. Jak spočítat tuto energii budeme řešit později, až se v kapitole 13 budeme zabývat Poyntingovým vektorem. Nyní jen v krátkosti poznamenejme, že při animaci pohybu siločávek pole nebo šumové textury, je směr pohybu struktury na diagramu stejný jako směr toku energie elektromagnetického pole.

## 1.9 Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem pole. Skalární pole  $T(x, y, z)$  je funkcí všech prostorových souřadnic. Jako příklady jsme zvolili teplotní pole a tlakové pole. Dále, vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z)$  je veličina mající velikost a směr, která je zadána uspořádanou trojicí čísel, jejichž hodnota závisí na volbě souřadnicového systému. Za příklady těchto polí jsme zvolili gravitační, elektrické a magnetické pole.

## 1.10 Řešené úlohy

### **P** Úloha 1: Vektorová pole

Zakreslete do grafů vektorová pole:

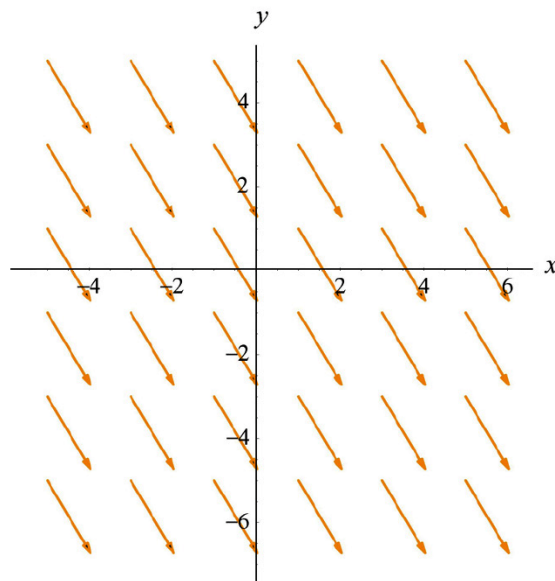
(a)  $\mathbf{v} = 3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}}$ ,

(b)  $\mathbf{v} = r$ ,

(c)  $\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ ,

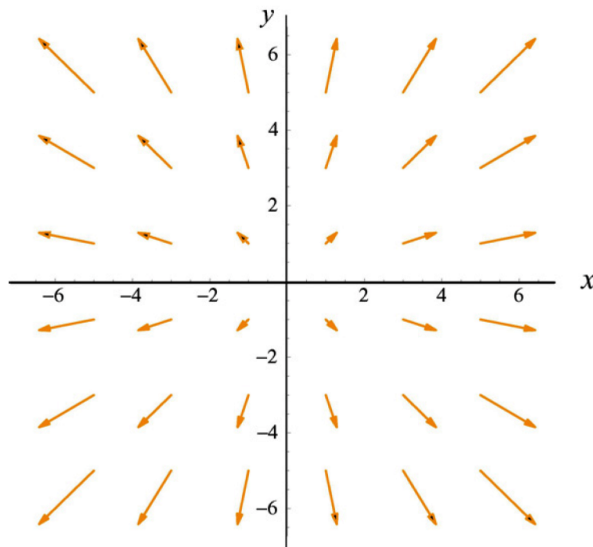
(d)  $\mathbf{v} = \frac{3xy}{r^5}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y^2 - x^2}{r^5}\hat{\mathbf{j}}$ .

**Řešení 1a:** Úloha je příkladem dvourozměrného (2D) homogenního vektorového pole. Řešení je znázorněno na obrázku 1.10.1:



Obr. 1.10.1.

**Řešení 1b:** Viz Obr. 1.10.2.

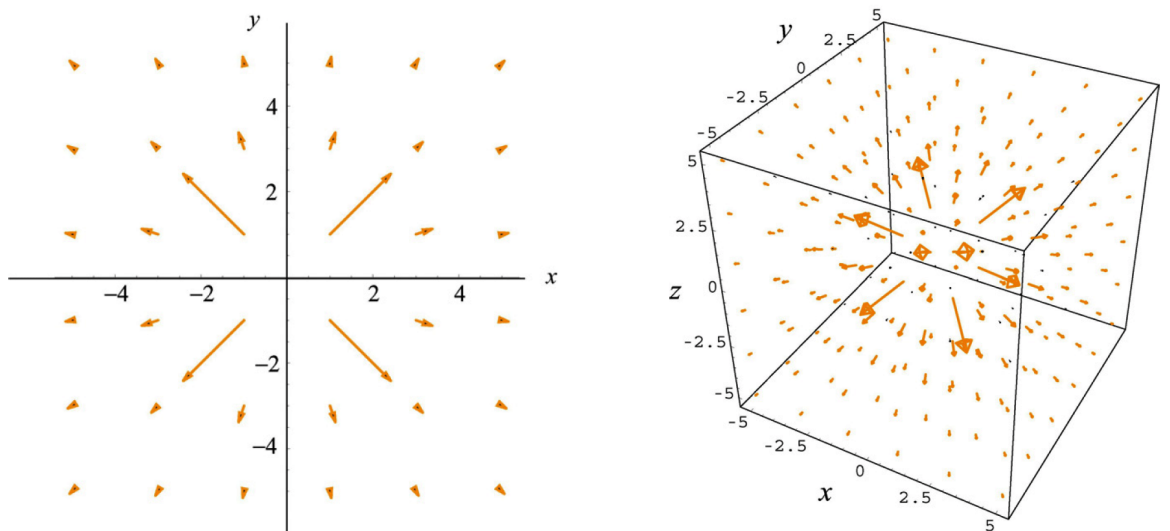


Obr. 1.10.2.

**Řešení 1c:** Ve 2D s použitím kartézských souřadnic, kde  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  můžeme vektorové pole  $\mathbf{v}$  zapsat ve tvaru

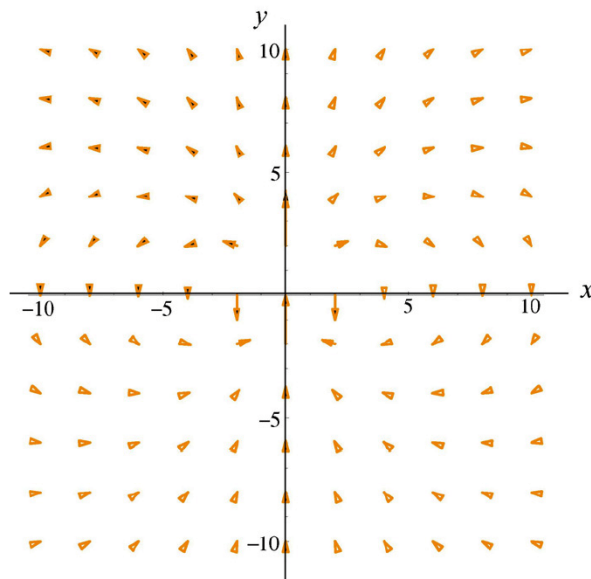
$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Pole je znázorněno na obrázku 1.10.3 nalevo. Jak gravitační pole Země  $\mathbf{g}$ , tak elektrostatické pole  $\mathbf{E}$  bodového náboje mají stejný průběh vektorového pole jako je toto pole  $\mathbf{v}$ . Třírozměrný graf, kde  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$  je ukázán na obrázku 1.10.3 napravo.



Obr. 1.10.3.

**Řešení 1d:** Tento diagram zachycuje vektorové pole generované bodovým elektrickým dipólem, který je umístěn v počátku souřadnic.



Obr. 1.10.4.

**P Úloha 2: Skalární pole**

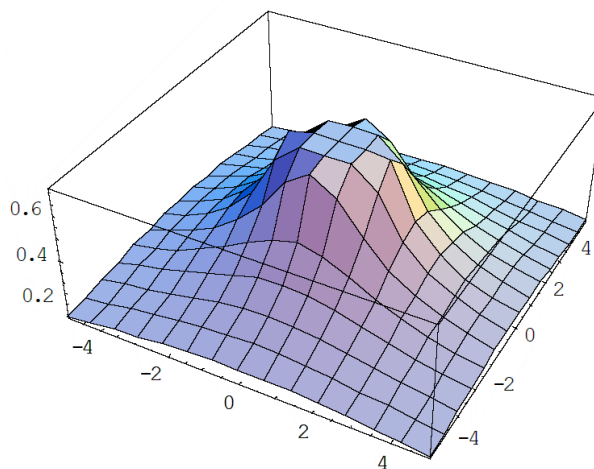
Zakreslete do grafu následující dvourozměrné skalární funkce:

(a)  $f(r) = \frac{1}{r},$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}.$

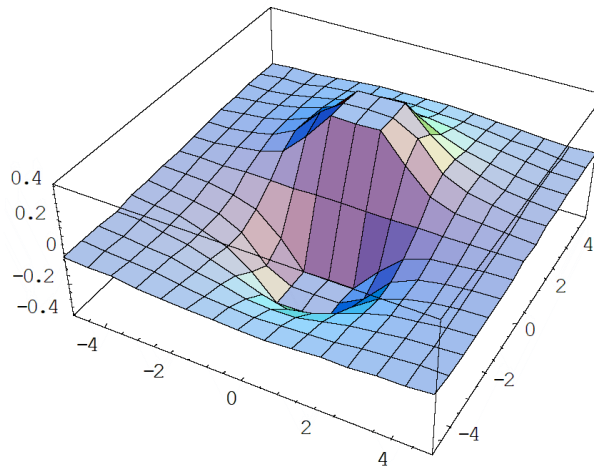
Ve dvou rozměrech můžeme  $r$  vyjádřit ve tvaru  $r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

**Řešení 1a:** Funkce může být použita ke znázornění elektrického potenciálu bodového náboje umístěného v počátku souřadnic. Poznamenejme jen, že hodnoty v grafu byly v okolí počátku uměle upraveny díky singularitě pro  $r = 0,$  která nemůže být přesně zobrazena.



Obr. 1.10.5.

**Řešení 1b:** Tento graf znázorňuje potenciál dipólu s kladným nábojem umístěným v bodě  $y = 1$  a záporným nábojem v bodě  $y = -1$ . A stejně jako v předchozím grafu nejsou singularity v bodech  $(x, y) = (0, \pm 1)$  vykresleny.



Obr. 1.10.6.

## 1.11 Neřešené úlohy

### **P** Úloha 1: Znázornění vektorových polí

Znázorněte vektorová pole:

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| (a) $y\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}}$     | (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$        | (c) $\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}$ | (d) $2y\hat{\mathbf{i}}$                                |
| (e) $x^2\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}}$ | (f) $\frac{y\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | (g) $xy\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}}$                 | (h) $\cos(x)\hat{\mathbf{i}} + \sin(y)\hat{\mathbf{j}}$ |

### **P** Úloha 2: Polohový vektor ve sférických souřadnicích

Ukažte, že polohový vektor můžeme ve sférických souřadnicích (viz Obr. 1.2.3) vyjádřit ve tvaru

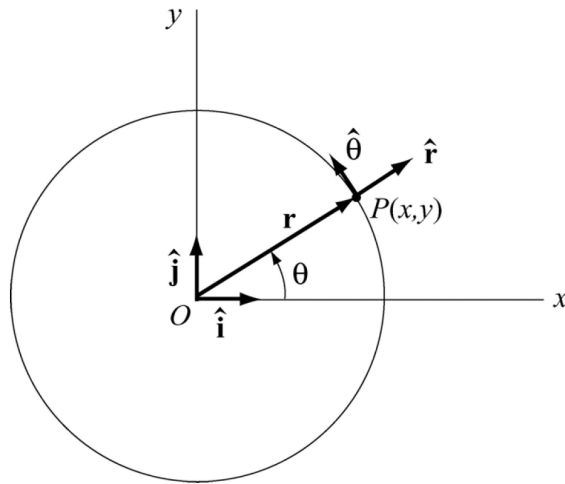
$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{k}} .$$

### **P** Úloha 3: Elektrické pole

Náboj  $+1$  je umístěn v bodě  $(-1, 0, 0)$  a náboj  $-1$  je umístěn v bodě  $(1, 0, 0)$ . Nalezněte elektrické pole těchto dvou nábojů v libovolném bodě  $(0, y, 0)$  na ose  $y$ .

### **P** Úloha 4: Objekt pohybující se po kružnici

Částice se pohybuje po kruhové dráze o poloměru  $r$  v rovině  $xy$  s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega = d\theta/dt$ . Na obrázku 1.11.1 je znázorněna částice v okamžiku  $t$  v bodě  $P$ .



Obr. 1.11.1.

- Zapište polohový vektor  $\mathbf{r}(t)$  jako funkci času.
- Spočtěte rychlost a zrychlení částice v bodě  $P$ .
- Vyjádřete jednotkové vektory  $\hat{\mathbf{r}}$  a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  v polárních souřadnicích pomocí jednotkových vektorů  $\hat{\mathbf{i}}$  a  $\hat{\mathbf{j}}$  v kartézských souřadnicích.

**P Úloha 5: Vektorová pole**

- Nalezněte vektorové pole ve dvou dimenzích, které míří v záporném radiálním směru (tedy do středu) a má velikost 1.
- Nalezněte rovinné vektorové pole, které svírá s osou  $x$  úhel  $45^\circ$  a jehož velikost v každém bodě  $(x, y)$  je  $(x+y)^2$ .
- Nalezněte rovinné vektorové pole jehož směr je tangenciální (tečný) k polohovému vektoru a jehož velikost v bodě  $(x, y)$  je stejná jako vzdálenost tohoto bodu od počátku.
- Nalezněte prostorové vektorové pole, které míří v kladném radiálním směru a jehož velikost je 1.

**P Úloha 6: Objekt pohybující se v rovině**

Objekt pohybující se ve dvou rozměrech má polohový vektor

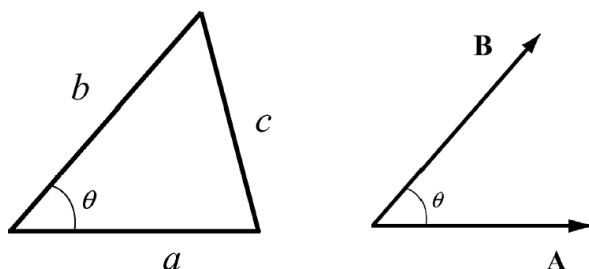
$$\mathbf{r}(t) = a \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + b \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}},$$

kde  $a$ ,  $b$  a  $\omega$  jsou konstanty.

- Jako daleko od počátku je objekt v čase  $t$ ?
- Najděte rychlost a zrychlení objektu jako funkce času.
- Ukažte, že trajektorie objektu je elipsa.

### P Úloha 7: Kosinová věta

Dvě strany trojúhelníku na obrázku 1.11.2 (nalevo) vytvářejí úhel  $\theta$ . Strany mají délku  $a$  a  $b$ .



Obr. 1.11.2: Kosinová věta.

Délka strany protilehlé k úhlu  $\theta$  je dána vztahem

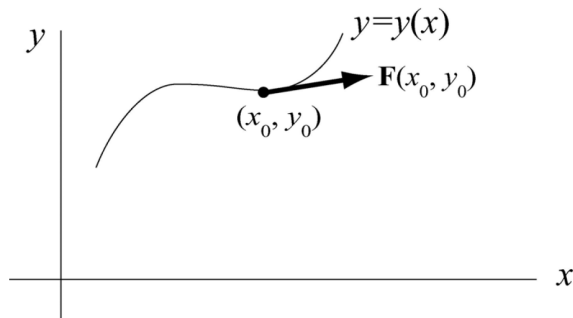
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta .$$

Předpokládejme, že dvě strany trojúhelníka jsou dány vektory  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , s délkami  $|\mathbf{A}| = a$ ,  $|\mathbf{B}| = b$  tak, jak je znázorněno na obrázku 1.11.2 napravo.

- Jaký geometrický význam má vektor  $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ ?
- Ukažte, že velikost vektoru  $\mathbf{C}$  je rovna délce protilehlé strany trojúhelníka znázorněného na obrázku 1.11.2 nalevo, tj. že  $|\mathbf{C}| = c$ .

### P Úloha 8: Silokřivky

Křivka  $y = y(x)$  se nazývá silokřivkou vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y)$ , jestliže vektorové pole je v každém bodě  $(x_0, y_0)$  tečné ke křivce, tj. jestliže vektor  $\mathbf{F}(x_0, y_0)$  je v daném bodě tečný k této křivce (viz obrázek 1.11.3).



Obr. 1.11.3.

Ukažte, že silokřivky  $y = y(x)$  vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y) = F_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + F_y(x, y)\hat{\mathbf{j}}$  jsou řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} .$$