

**KATEDRA FYZIKY, FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

TEORETICKÉ MODELY Z-PINČE

(HABILITAČNÍ PRÁCE)

RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Praha 1995

OBSAH

SEZNAM SYMBOLŮ	4
1. ÚVOD	9
1.1. Plazma	9
1.2. Z-pinč	12
1.3. Rovnováha z-pinče	15
1.4. Z-pinč na FEL	18
1.5. Teoretický popis plazmatu	21
2. ŠLÍROVÁ DIAGNOSTIKA	23
2.1. Úvod	23
2.2. Malé deflektce	25
2.3. Rovnice prostorové deflektce	28
3. DRIFTOVÝ MODEL Z-PINČE	31
3.1. Úvod	31
3.2. Rovnováha sil v z-pinči	33
3.3. Proudění tekoucí při rovnováze	35
3.4. Obecné řešení rovnováhy s válcovou symetrií	36
3.5. Polarizační drift a nerovnovážný problém	41
4. MECHANICKÉ MODEL Y	43
4.1. Úvod	43
4.2. Doba komprese pro gas puff	43
4.3. Variační formulace mechanických modelů	46
5. MHD MODEL Y	49
5.1. Úvod	49
5.2. Numerická schemata	52
5.3. Jednoduchý MHD model komprese z-pinče	53
5.4. Výsledky výpočtů	57
6. VLNY V PLAZMATU	67
6.1. Úvod	67
6.2. Plazmové oscilace a vlny	67
6.3. Magnetoakustické vlny	70
6.4. Elektromagnetické vlny	73
6.5. MHD nestability z pinče	76

7. STATISTICKÉ MODELÝ	80
7.1. Úvod - Boltzmannova rovnice.....	80
7.2. Srážky v plazmatu	81
7.3. Momentová rovnice (rovnice přenosu).....	84
7.4. Landauův srážkový člen	86
7.5. Únik rychlých elektronů	90
8. ZÁVĚR	94
9. LITERATURA	98

SEZNAM SYMBOLŮ

A	dynamická proměnná
B, B	indukce magnetického pole
c	rychlost světla
c_α	tepelná rychlost částic druhu α
d	tloušťka plazmového sloupce (gas puff)
D_α	koeficient difúze částic druhu α
D	indukce elektrického pole
e, e_α	náboj, náboj částic druhu α
$ e $	velikost elementárního náboje
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi$	jednotkové vektory ve směru os válcových souřadnic
\mathbf{E}, E	intenzita elektrického pole
\mathcal{E}	bezrozměrné elektrické pole
f	hustota síly
f_α	rozdělovací funkce částic druhu α
f_L	hustota Lorentzovy síly
f_R	hustota síly způsobené zakřivením silokřivek
f_B	– gradient magnetického tlaku
f_p	– gradient tlaku plazmatu
\mathbf{F}	síla
$\mathbf{F}^{(S)}$	průměrná síla způsobená srážkovými procesy
F_e	elektrostatická síla
F_g	gravitační síla
F_L	Lorentzova síla
$G(x)$	Chandrasekharova funkce
H	Hamiltonova funkce
\mathbf{H}	intenzita magnetického pole
I	proud
$\tilde{I}(r)$	celkový proud tekoucí oblastí $(0, r)$
I_0	amplituda proudu
I_{PB}	Pease-Braginského proud
\mathbf{j}, j	proudová hustota
\mathbf{j}_M	magnetizační proud (hustota)
\mathbf{j}_V	vodivostní proud (hustota)
$\mathbf{j}_{\nabla B}$	proudová hustota způsobená ∇B driftem
\mathbf{j}_R	proudová hustota způsobená driftem zakřivení
\mathbf{j}_p	proudová hustota způsobená polarizačním driftem

$\mathbf{j}\nabla_n$	diamagnetický proud (hustota)
$\mathcal{A}(r)$	proud tekoucí v oblasti $\langle 0, r \rangle$, proudová funkce
\mathbf{k}, k	vlnový vektor
$\mathbf{k}_{\alpha\beta}$	směr vzájemné rychlosti částic α a β při srážce
k_B	Boltzmannova konstanta
l	délka pinče
l_α	střední volná dráha částic druhu α
$\ln \Lambda$	Coulombův logaritmus
L	rozměry systému; Lagrangeova funkce
$\widehat{L}_{\alpha\beta}$	Landauův operátor
m	hmotnost plazmatu; mod nestability
m_e, m_i	hmotnost elektronů a iontů
m_α	hmotnost částic druhu α
\mathbf{M}	vektor magnetizace
n, n_e, n_i	koncentrace, koncentrace elektronů a iontů
n_0	koncentrace atomů (neutrální + ionty)
n_α	koncentrace částic druhu α
\mathbf{n}	vektor normály
\mathcal{N}	index lomu
N_D	počet částic v Debyeově sféře
N, N_e, N_i	počet částic na jednotku délky pinče, elektrony, ionty
N_α	počet částic na jednotku délky pinče pro částice druhu α
p, p_e, p_i	tlak, tlak elektronů a iontů
p_α	tlak částic druhu α
p_\perp, p_\parallel	kolmá a rovnoběžná složka tlaku vzhledem k \mathbf{B}
p_{out}, p_{in}	tlak vně a uvnitř pinče
p_m	magnetický tlak
p_k	zobecněné hybnosti
\mathbf{p}	hybnost
P_J	Jouleův výkon na jednotku délky pinče
P_r	radiační výkon na jednotku délky pinče
\mathbf{P}	tenzor tlaku (toky hybnosti)
q, Q	náboj
q	$q \equiv (k^2 - \omega^2/v_c^2)^{1/2} - qr$ v argumentu Besselovy funkce
q_k	zobecněné souřadnice
\mathbf{q}	tepelný tok
r	vzdálenost od centra nebo od osy
r_k	diskrétní vzdálenost od centra nebo osy (prost. síť)
r_D	Debyeův poloměr

$r_{D\alpha}$	Debyeův poloměr částic druhu α
r_L	Larmorův poloměr
r_{min}, r_{max}	minimální a maximální záměrný parametr při srážce
r_{min}, r_{max}	minimální a maximální radiální souřadnice
R	poloměr pinče nebo gas puffu; Rayleighova funkce
R_m	Reynoldsovo magnetické číslo
R_k	poloměr křivosti
S	plocha; entropie
$S_{\alpha\beta}$	Boltzmannův srážkový integrál
t	čas
t_n	diskrétní čas (časová síť)
t_{fin}	doba komprese
T, T_e, T_i	teplota, teplota elektronů a iontů
T_α	teplota částic druhu α
$\mathbb{T}(L)$	tenzor toku hybnosti částic
$\mathbb{T}(E)$	Maxwellův tenzor pnutí - elektrická část
$\mathbb{T}(M)$	Maxwellův tenzor pnutí - magnetická část
\mathbf{u}_α	rychlost částice druhu α ve fázovém prostoru (nestředovaná)
$\mathbf{u}_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}$	vzájemná rychlost dvou částic α a β
$\mathbf{u}(\alpha\beta), u(\alpha\beta)$	těžišťová rychlost dvou částic α a β
U	potenciální energie
U_i	ionizační potenciál
$\mathbf{v}, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i$	rychlost, rychlost elektronů a iontů
v, v_e, v_i	velikost rychlosti, velikost rychlosti elektronů a iontů
$\mathbf{v}_\alpha, v_\alpha$	rychlost částic druhu α , velikost rychlosti částic druhu α
v_\perp, v_\parallel	kolmá a rovnoběžná složka rychlosti vzhledem k \mathbf{B}
v_A	Alfvénova rychlost
v_c	rychlost zvuku
v_f	fázová rychlost
$\mathbf{v}_{\alpha\beta}, v_{\alpha\beta}$	průměrná vzájemná rychlost částic α a β
\mathbf{v}_D, v_D	driftová rychlost
\mathbf{v}_E	rychlost $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu
$\mathbf{v}_{\nabla B}$	rychlost ∇B driftu
\mathbf{v}_p	rychlost polarizačního driftu
\mathbf{v}_R	rychlost driftu zakřivení
\mathbf{v}_G	gyrační rychlost
\mathbf{v}_0	rychlost proudění
\mathbb{V}	tenzor viskozity
\mathbf{w}_α	chaotická (tepelná) složka rychlosti částice druhu α

W_k	kinetická energie
\mathcal{W}	bezrozměrná kinetická energie
\mathbf{x}	polohový vektor
Z	stupeň ionizace
α	index - druh částic: elektrony, ionty, neutrální částice
α	mocninný koeficient proudové funkce
α, α	úhel deflektce
β, β_e, β_i	relativistický koeficient v/c
$\gamma, \gamma_e, \gamma_i$	relativistický koeficient $(1 - \beta^2)^{-1/2}$
γ	polytropní, adiabatický koeficient
δ_{ij}	Kroneckerův symbol
δf	perturbace (lineární porucha) funkce f
$\Delta t, \Delta x$	časový a prostorový krok
ε	relativní intenzita na stínítku
ε	hustota vnitřní energie látky
ε_0	permitivita vakua
ε_k	levé strany pohybových rovnic v Lagrangeově tvaru
ζ	druhý viskózní koeficient
η	první viskózní koeficient
η	koeficient pro záření šedého tělesa ; $\eta \in (0, 1)$
ϑ	bezrozměrná rychlost
κ	směrový vektor šíření paprsku
λ	vlnová délka
λ_α	tepelná vodivost plazmatu způsobená částicemi druhu α
μ	magnetický moment
μ_0	permeabilita vakua
ν, ν_α	srážková frekvence
ξ	bezrozměrná vzdálenost od osy symetrie; r/R
ξ	bezrozměrná souřadnice
ρ	hustota hmoty; bezrozměrný poloměr gas puffu
ρ_e, ρ_Q	hustota elektrického náboje
$\sigma, \sigma_{\alpha\beta}$	účinný průřez srážky mezi částicemi α a β
σ	diferenciální elektrická vodivost plazmatu
σ_α	dif. el. vodivost plazmatu způsobená částicemi druhu α
σ_B	Stefan-Boltzmannova konstanta
σ_0	koeficient ve Spitzerově vztahu pro vodivost
τ	bezrozměrný čas
$\tau_e, \tau_i, \tau_{\alpha\beta}$	střední doba mezi srážkami (elektrony, ionty, ...)
$\tau_{\alpha\beta}$	relaxační časy

τ_T	relaxační čas teploty
τ_{fin}	bezrozměrná doba komprese
ϕ	potenciál
φ	polární úhel
φ_β	potenciál v Landauově srážkovém členu
Φ_α	libovolná funkce rychlosti částice
ψ	skalární potenciál magnetického pole
ψ_β	potenciál v Landauově srážkovém členu
Ψ_α	sumační invariant (hmotnost hybnost, energie, ...)
χ	absorpční koeficient
χ_0	konstantní část absorpčního koeficientu
ω	úhlová frekvence
$\omega_c, \omega_{ce}, \omega_{ci}$	cyklotronní frekvence (elektrony, ionty)
$\omega_p, \omega_{pe}, \omega_{pi}$	plazmová frekvence (elektrony, ionty)
ω_L, ω_R	levá a pravá mezní frekvence
ω_h	horní hybridní frekvence

1. ÚVOD

1.1. Plazma

O plazmatu nejčastěji hovoříme jako o čtvrtém skupenství hmoty. Zahříváme-li látku, skutečně může procházet skupenstvím pevným, kapalným, plynným a při dalším zvyšování teploty dochází k ionizaci plynu. V plynu se nacházejí nabitě částice, které reagují na místní i vnější elektrická a magnetická pole. Za plazma tak lze považovat směs elektronů, iontů různé násobnosti a neutrálních vybuzených i nevybuzených atomů. Zpravidla požadujeme, aby plazma splňovalo [59]:

- 1) kvazineutralitu: součet všech nábojů v každém makroskopickém objemu je nulový
- 2) kolektivní chování: lokální pohyby a uspořádání částic vytvářejí elektrická a magnetická pole, na která reagují i vzdálené oblasti plazmatu.

Do plazmatu většinou nezahrnujeme různé svazky nabitých částic (nesplňují kvazineutralitu) a velmi slabě ionizované plyny - např. plamen svíčky (nesplňují kolektivní chování) [51,53,65].

Za plazma však již někteří autoři považují některé části ionosféry, zvláště F vrstvu, která odráží radiové vlny a umožňuje radiové spojení na Zemi. [66]. Plazma se nachází ve van Allenových radiačních pásích. Sluneční vítr, nepřetržitý proud částic od našeho Slunce, ve kterém se nachází také naše Země, je opět plazmatem. V plazmovém skupenství jsou nitra i atmosféry hvězd, jádra galaxií, mlhoviny a většina objektů ve Vesmíru. Uvádí se, že až 99% Vesmíru je v plazmatickém skupenství [55,58,68].

Na Zemi se s plazmatem setkáváme v kanálech blesků, při různých výbojích a plazma je uměle vytvářeno a zkoumáno v laboratořích.

Stupeň ionizace látky závisí především na teplotě a lze ho v prvním přiblížení odhadnout ze Sahovy rovnice pro jedenkrát ionizované plazma [51,53,60]

$$\frac{n_i^2}{n_n} = C T^{3/2} e^{-U_i/k_b T} \quad ; \quad C \cong 2.4 \times 10^{21} \text{ m}^{-3} \quad , \quad (1.1.1)$$

kde n_i je koncentrace jednonásobných iontů, n_n je koncentrace neutrálních částic, U_i je ionizační potenciál a T je teplota plazmatu. Při výskytu vícenásobných iontů je třeba řešit soustavu rovnic podobných (1.1.1) pro různé druhy iontů. Sahova rovnice je použitelná pro plyny. Někdy se za jistý druh plazmatu považují i pevné látky (např. kovy), které mají volné nosiče nábojů a vykazují kolektivní chování. Zde však počet volných nosičů náboje není určen Sahovou rovnicí.

Potenciál plazmatu v okolí bodového náboje lze určit z Poissonovy rovnice:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{r}{r_D}} \quad , \quad \text{kde} \quad (1.1.2)$$

$$r_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2} \right)^{1/2} \quad . \quad (1.1.3)$$

Veličina r_D se nazývá Debyeův poloměr a má význam střední stínící vzdálenosti [60]. Ve vztahu pro r_D vystupují parametry pohyblivějších elektronů, které jsou odpovědné za stínění. Z hlediska jedné částice plazmatu jde o vzdálenost, do které sama částice "pocítuje" působení okolních částic jako od bodových zdrojů. Pro $r \gg r_D$ částice "vnímá" okolní plazma jako kontinuum. Pro plazma je důležitým parametrem počet částic v Debyeově sféře (v kouli o poloměru r_D)

$$N_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n = C T^{3/2} n^{1/2} \quad ; \quad C = 1.4 \times 10^6 \text{ K}^{-3/2} \text{ m}^{3/2} \quad . \quad (1.1.4)$$

Podmínku kolektivního chování lze formulovat tak, že rozměry systému jsou podstatně větší než Debyeův poloměr a počet částic v Debyeově sféře je mnohem větší než 1 [59]:

$$L \gg r_D \quad ; \quad N_D \gg 1 \quad . \quad (1.1.5)$$

V plazmatu dochází také ke srážkám nabitých částic. Charakter srážek i jejich mechanismus je odlišný od srážek neutrálních částic. Při srážce neutrálních částic dochází k prudkým změnám směru pohybu, v plazmatu jsou změny směru způsobeny většinou elektrickým polem ($\sim 1/r^2$) méně náhlé.



Obr. 1.1.1.: Srážky v neutrálním plynu a v plazmatu

Střední volnou dráhu můžeme definovat např. jako střední vzdálenost, při které dojde k odklonu od původního směru o 90° . S rostoucí teplotou účinný průřez srážek klesá - nabitě částice se při vysokých teplotách míjejí velkou rychlostí, tím vzájemně na sebe působí krátkou dobu a odchylky od původních drah jsou malé. Často se neberou v úvahu všechny srážky, ale jen srážky, při kterých se částice přiblíží na vzdálenost (záměrný parametr) $r \in (r_{min}, r_{max})$. Za r_{min} se bere vzdálenost, při které je úhel odklonu trajektorie 90° . Srážky s $r < r_{min}$ jsou velmi málo pravděpodobné. Za r_{max} se volí Debyeův poloměr r_D . Pro $r > r_D$ je vzájemné působení částic slabé (Debyeovo stínění) [53,61]. Ve vztazích takto odvozených potom vystupuje veličina

$$\ln \Lambda \equiv \ln \frac{r_{max}}{r_{min}} = \ln \frac{12 \pi (\epsilon_0 k_B T_e)^{3/2}}{n^{1/2} e^3} \quad (1.1.6)$$

nazývaná Coulombův logaritmus. Coulombův logaritmus je sice funkcí koncentrace a teploty plazmatu, pro širokou škálu hodnot se velikost $\ln \Lambda$ mění jen velmi málo a většinou lze položit $\ln \Lambda \cong 10$. Coulombův logaritmus se vyskytuje ve výrazech závisících na srážkách plazmatu, například ve Spitzerově formuli pro vodivost [60,61]:

$$\sigma = \frac{8 \pi \varepsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}{e^2 m_e^{1/2} Z \ln \Lambda} = \sigma_0 \frac{T_e^{3/2}}{Z \ln \Lambda} \quad ; \quad \sigma_0 = 4.1 \times 10^{-3} \text{ K}^{-3/2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \quad . \quad (1.1.7)$$

Vodivost závisí především na teplotě ($\sigma \sim T^{3/2}$) a minimálně na koncentraci plazmatu. Při nízkých koncentracích je málo nosičů náboje, při vysokých koncentracích je velký počet srážek bránících průchodu proudu.

Nabitě částice v plazmatu vykonávají Larmorovu rotaci kolem siločárek magnetického pole s cyklotronní frekvencí

$$\omega_c = \frac{e B}{m} \quad (1.1.8)$$

a Larmorovým poloměrem

$$r_L = \frac{m v_{\perp}}{|e| B} \quad , \quad (1.1.9)$$

kde v_{\perp} je kolmá složka rychlosti vzhledem k magnetickému poli. Na střední volné dráze částic (srážkové frekvenci) záleží, zda v průměru částice vykonají několik Larmorových oběhů než dojde ke srážce, či zda se jejich dráhy skládají jen z malých částí Larmorových orbit.

V přítomnosti dalších silových polí (elektrické, gravitační) dochází k driftování částic s rychlostí [59,60,61]

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{e B^2} \quad . \quad (1.1.10)$$

Jde o pohyb gyračního středu rotujících částic napříč jak poli \mathbf{B} , tak další síle \mathbf{F} . Driftové pohyby způsobuje i slabě nehomogenní magnetické pole, pomalu se měnící elektrické pole, atd.

Plazmatem se může šířit celá řada oscilací a vln na akustických, radiových a optických frekvencích [60,65]. Nízkofrekvenční jevy zpravidla souvisí s oscilacemi iontů na plazmové frekvenci

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n e^2}{m_i \varepsilon_0}} \quad . \quad (1.1.11)$$

Jde o šíření zvuku modifikované přítomností plazmatu a magnetickým polem - tzv. magnetoakustické vlny (Alfvénova vlna, rychlá a pomalá magnetoakustická vlna). Vysokofrekvenční jevy souvisí s oscilacemi elektronů na plazmové frekvenci elektronů

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n e^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (1.1.12)$$

a s šířením elektromagnetických vln plazmatem.

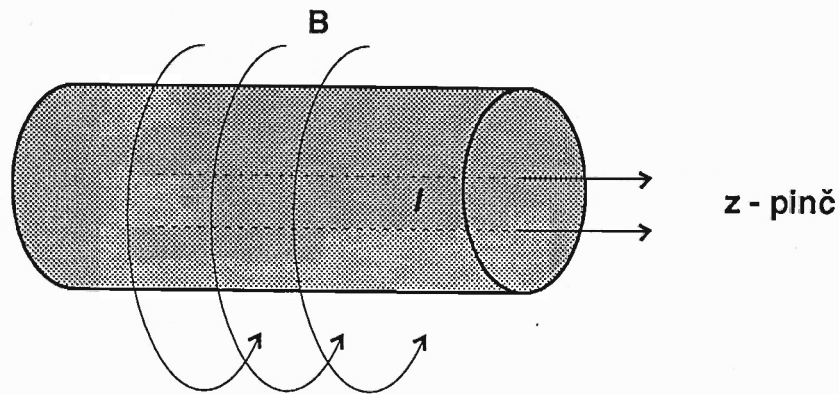
V laboratořích plazma vzniká většinou při různých druzích elektrických výbojů, při explozi drátků, při chemických reakcích, atd. Plazma je drženo magnetickým polem se speciální konfigurací (magnetické zrcadlo, stellarátory, tokamaky). Díky celé řadě nestabilit, kterým plazma podléhá, je právě udržení plazmatu základním problémem. Hybnou silou mnoha experimentů je možnost řízené termojaderné syntézy s kladným energetickým výtěžkem. Tyto výzkumy probíhají především na tokamacích, v plazmafokusech a z-pinčích [18,19,54,59].

Plazma je dnes využíváno v celé řadě technologií - plazmové hořáky, napařování a naprašování tenkých vrstev, plazmové displeje, detoxikace jedovatých látek a výfukových plynů, plazmové motory, různá plazmová vrhací zařízení, leptání a mnoho dalších [5,9,12,57]. Výzkum chování plazmatu v podmínkách různých experimentů, sledování vývoje stabilních i nestabilních struktur v plazmatu, turbulencí a proudění plazmatu je proto velmi důležitým úkolem dneška.

1.2. Z-pinč

Pro plazma jsou charakteristické relativně stabilní válcové struktury, které nazýváme pinče. Typickým útvarem je válcové vlákno plazmatu, kterým protéká elektrický proud (způsobený různým pohybem elektronů a iontů). Elektrický proud vytváří magnetické pole kolem vlákna. Toto pole působí Lorentzovou silou na částice pohybující se vláknem tak, že je vytlačuje směrem ke středu vlákna. Lorentzova síla tak vyrovnává gradient tlaku látky pinče a obě síly mohou být v rovnováze. Častěji se však místo o silách a magnetickém poli hovoří o magnetickém tlaku ($B^2/2\mu$), a tlaku látky ($nk_B T$). Již v roce 1934 ukázal W. H. Bennet [1], že gradient tlaku látky v plazmovém vlákně může být vyrovnán gradientem tlaku magnetického pole. Tato rovnováha je velmi podobná rovnováze ve hvězdě, kde je gradient tlaku látky vyrovnáván gravitací. Takovýto objekt se nazývá z-pinč - viz obr. 1.2.1 (z- podle směru elektrického proudu, pinch- znamená v angličtině stisknout). V laboratořích ještě známe θ -pinče, ve kterých je magnetické pole orientováno v ose a proud má směr úhlové proměnné..

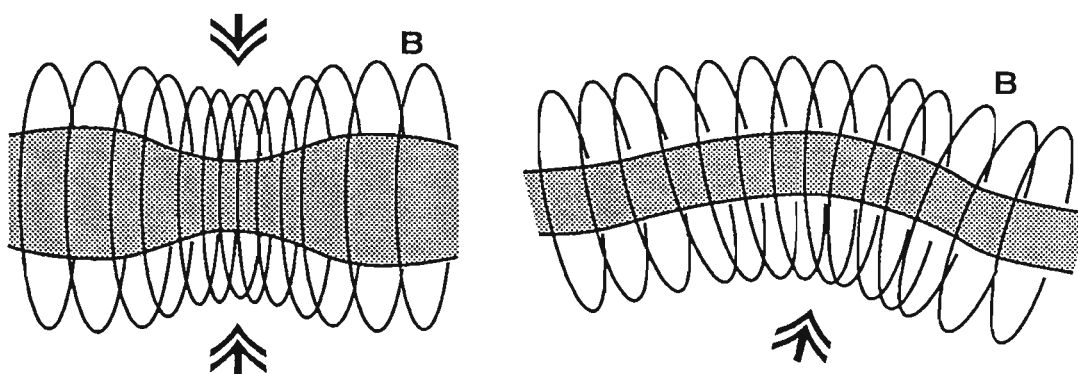
S pinči se setkáváme v přírodě velmi často [55,58,68]. Pozorujeme je jako vláčkénka v plazmatu, nacházíme je v kanálech blesků, ve slunečních protuberancích a erupcích. Vlákniatá struktura mlhovin má s největší pravděpodobností také povahu z-pinče, stejně tak jako výtrysky (jety) kvasarů.



Obr. 1.2.1.: z-pinč

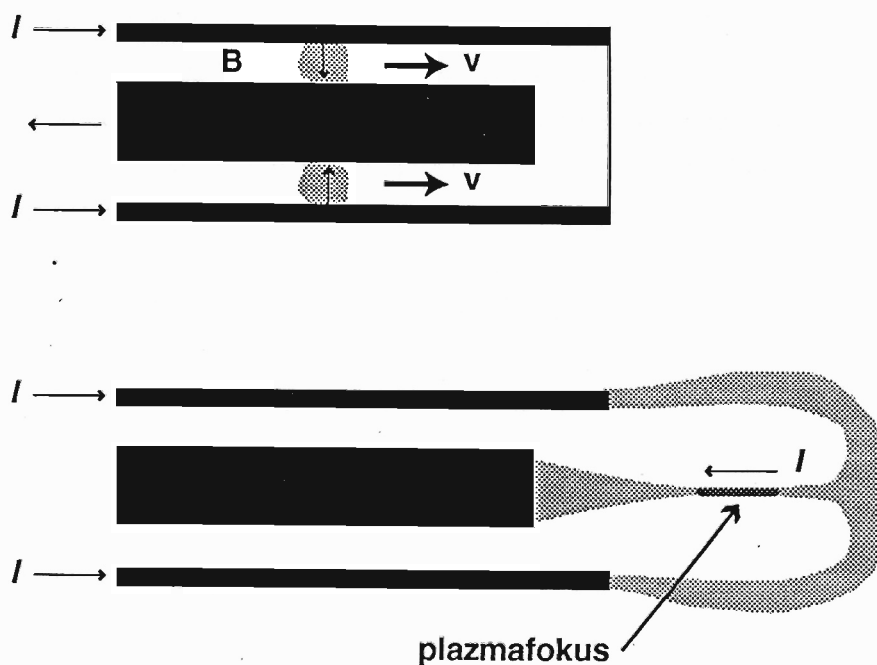
Pokusme se nyní formulovat základní rozdíly rovnovážné konfigurace hvězdy v gravitační a z-pinče v elektromagnetické interakci.

- gravitačně vázané objekty mají sférickou symetrii; elektromagneticky vázané objekty mají válcovou symetrii.
- gravitačně vázaný objekt nepotřebuje interakci s okolním světem; pinčem musí protékat proud, který je v laboratoři vytvářen vnějším obvodem a ve Vesmíru vnějšími poli.
- obě konfigurace mohou mít značně rozdílné rozměry. To je dáno rozdílnou velikostí elektromagnetické a gravitační interakce. Například poměr elektrostatické a gravitační síly pro dva protony je $F_e/F_g \sim 10^{36}$. Díky tomuto faktu můžeme v laboratorních podmínkách vytvářet pinče malých rozměrů (milimetry, centimetry), ve kterých sledujeme látku s parametry odpovídajícími nitru hvězd!
- rovnovážná konfigurace hvězdy je stabilní; rovnovážná konfigurace pinče vykazuje celou řadu nestabilit [54,60,65]: například v místě náhodného zúžení pinče se vytvoří silnější magnetické pole (menší poloměr) a vyšší magnetický tlak pinč dále zaškrcuje až dojde k jeho přetržení, případně rozpadu na několik částí - koráleků (korálová nestabilita). V místě náhodného ohybu pinče vzniká silnější pole a tlak na vnitřní straně, proto se počáteční prohnutí bude zvětšovat. Přestože jsou pinče svou podstatou nestabilní struktury, často přetrvávají značnou dobu, zejména kombinace z a θ pinče se střížným magnetickým polem.



Obr.1.2.2.: Základní nestability pinče ($m=0$, $m=1$)

Pinče v laboratořích jsou vytvářeny nejrůznějšími způsoby. Jedním z běžných postupů je vytvoření tzv. plazmového ohniska (plazmafokusu) [26,49]. Jde o zařízení se dvěma koncentrickými válcovými elektrodami. Proudový obvod je uzavřen prstencem plazmatu. Vzniklé magnetické pole vytlačuje prstenec ven ze zařízení. Po opuštění elektrod zůstává vyfouknuté plazma stále spojeno s elektrodami. Vzniká struktura podobná deštníku. Střední část, komprimovanou vlastním polem, nazýváme plazmafokus. Nejde o nic jiného než laboratorně vytvořený z-pinč. V plazmafokusu lze dosáhnout značně vysokých teplot a koncentrací plazmatu - vedle tokamaků jde o jednoho z předních kandidátů pro uskutečnění řízené termojaderné syntézy. Kurčatov již v roce 1956 pozoroval neutrony termojaderného původu unikající ze z-pinče [42].



Obr. 1.2.3.: Plazmafokus

R. S. Pease a S. Braginskij odvodili nezávisle na sobě v roce 1957 teoretickou možnost elektromagnetického kolapsu z-pinče [2,3]. Průchodem proudem z-pinčem je

ohmicky uvolňována tepelná energie zahřívající pinč. Tato energie je odnášena ven zářením. Zářivý výkon s teplotou roste. Při vysokých hodnotách proudu a tím vysokých teplotách je odnášeno zářením takové množství energie, že dojde k porušení rovnováhy z-pinče, vnější magnetický tlak převáží tlak látky a plazmové vlákno začíná kolabovat k centru. Přitom se jeho teplota nezvyšuje, naopak může i poklesnout díky prudkému odvodu energie zářením. Tento kolaps může zastavit až tlak degenerovaného plynu elektronů nebo neutronů (kvantové jevy v superhusté látce). Scénář elektromagnetického kolapsu velmi připomíná závěrečná stadia vývoje hvězd - gravitační kolaps na bílého trpaslíka či neutronovou hvězdu (včetně závěrečného ochlazení). K elektromagnetickému kolapsu by mělo dojít pro proudy větší než je hodnota $I_{PB} \sim 1 \text{ MA}$ odvozená Peasem a Braginskim. Tato hodnota nezávisí na tvaru a velikosti z-pinče. Jde o universální konstantu složenou z jiných základních konstant (permeability vakua, Boltzmannovy konstanty, Stefan-Boltzmannovy konstanty, ...). Základním problémem je, že před dosažením Pease-Braginského proudu se pinč zpravidla rozštěpí na několik pinčů. Těmi ovšem již teče podkritický proud. Možnost elektromagnetického kolapsu tak i dnes zůstává otevřená.

Dnes je studiu pinčů věnována maximální pozornost. Není obtížné dosáhnout koncentrací částic 10^{30} m^{-3} i vysokých teplot řádově v $\text{MeV} \sim 10^7 \text{ K}$. Pro uskutečnění řízené termojaderné syntézy je základním problémem zatím krátká doba existence pinčů v laboratorních podmínkách (několik mikrosekund). V pinčích jsou pozorovány další struktury (tzv. mikropinče) a horké tečky (hot spots) vysílající RTG záření netepelné povahy. Možná právě tyto horké tečky jsou oblastí elektromagneticky zkolabovaného plazmatu. V posledních letech se objevila další zajímavá myšlenka. Došlo -li by při elektromagnetickém kolapsu k ochlazení plazmatu pod 100 K vytvoří se Cooperovy páry a plazma bude mít supravodivé vlastnosti [8]. Z-pinč se tak stává vynikajícím laboratorním nástrojem k poznání vlastností hmoty ve velmi hustém stavu. V současné době se největší evropské aparatury nacházejí v Anglii (Cambridge), Polsku (Swierk) a Itálii (Ferrara).

1.3. Rovnováha z-pinče

Z-pinč konfigurace plazmatu je v rovnováze, je-li Lorentzova síla vyrovnávána gradientem tlaku látky, tj.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad . \quad (1.3.1)$$

Tato podmínka platí pro rovnovážné konfigurace zcela obecně, tedy nejen pro z-pinče. Z definice vektorového součinu je potom zřejmé, že při rovnováze se proudočáry a magnetické siločivky nacházejí v plochách s konstantním tlakem.

Pro válcovou symetrii odvodil poprvé podmínku rovnováhy W. H. Bennet v práci [1] za předpokladu konstantní proudové hustoty v pinči. Pro průměrné hodnoty veličin z (1.3.1) lze přibližně psát:

$$\bar{j} = \frac{I}{\pi R^2} \quad ; \quad \bar{B} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} \quad ; \quad \bar{\nabla p} = \frac{1}{R} (1+Z) n_0 k_B T \quad , \quad (1.3.2)$$

kde R je poloměr pinče a Z stupeň ionizace ($n_i = n_0$, $n_e = Z n_0$), n_0 koncentrace atomů. Po dosažení do rovnice rovnováhy dostáváme

$$T = \frac{\mu_0}{4 \pi k_B} \frac{I^2}{(1+Z) N} \quad (1.3.3)$$

- Bennetovu podmínku rovnováhy, která udává vztah mezi teplotou T , proudem I a počtem částic na jednotku délky pinče N . V obecnějším případě (relativistické rychlosti, různé teploty elektronů a iontů) má tato podmínka tvar [8]

$$\frac{\mu_0 c^2}{4 \pi} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \beta_{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2 \epsilon_0} \left(\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \right)^2 + \sum_{\alpha} N_{\alpha} \gamma_{\alpha} k_B T_{\alpha} \quad . \quad (1.3.4)$$

Jednotlivé členy mají postupně význam energie magnetického stlačování na jednotku délky, energie objemového náboje na jednotku délky a energie tepelného rozpínání na jednotku délky. Index α probíhá přes elektrony a ionty. Veličiny β , γ jsou standardní relativistické koeficienty:

$$\beta_{\alpha} \equiv \frac{v_{\alpha}}{c} \quad ; \quad \gamma_{\alpha} \equiv (1 - \beta_{\alpha}^2)^{-1/2} \quad . \quad (1.3.5)$$

Poznamenejme, že vztah (1.3.4) přejde v (1.3.3), zanedbáme-li druhý člen a uvědomíme-li si, že proud I je dán vztahem

$$I = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} v_{\alpha} \quad . \quad (1.3.6)$$

V z-pinči dochází k silnému Jouleovu ohřevu procházejícím proudem. Takto vzniklé teplo by zvyšovalo tlak v pinči a zabránilo vzniku rovnováhy. Vzhledem k tomu, že pinče jsou pozorovány jako relativně stabilní útvary, musí být teplo pinče odváděno. R. S. Pease a S. Braginskij [2,3] navrhli, že v rovnováze je vznik Jouleova tepla plně kompenzován radiačními ztrátami. Záření pinče je pravděpodobně nejpodstatnějším mechanismem odvodu energie z pinče, který zabrání ohřevu pinče.

Jouleův výkon na jednotku délky pinče lze psát ve tvaru

$$P_J = \frac{I^2}{\sigma \pi R^2} \quad [\text{W/m}] \quad , \quad (1.3.7)$$

kde σ je diferenciální vodivost plazmatu. Pro radiační výkon na jednotku délky pinče můžeme psát

$$P_r = \eta \sigma_B T^4 2\pi R \quad [\text{W/m}] \quad , \quad (1.3.8)$$

kde σ_B je Stefan-Boltzmannova konstanta. Pro absolutně černé těleso by pro koeficient η platilo $\eta = 1$, jinak je η udáváno ve tvaru [13]

$$\eta = (1 - e^{-2\chi R}) \cdot \left(1 + e^{-2\chi R} - \frac{1 - e^{-2\chi R}}{2\chi R} \right) \quad , \quad (1.3.9)$$

kde absorpční koeficient

$$\chi = \chi_0 \frac{Z(1+Z)^2 N^2}{R^4 T^{7/2}} \quad ; \quad \chi_0 = 2.4 \times 10^{-34} \text{ m}^5 \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{7/2} \quad . \quad (1.3.10)$$

Pease a Braginski ve svém odvození uvažovali opticky řídké plazma ($\chi R \ll 1$), pro které platí $\eta \approx 2 \chi R$. Podmínka pro dostatečný odvod Jouleova tepla $P_r \geq P_J$ potom dává

$$I^2 \leq 4\pi^2 \sigma_B \sigma \chi T^4 R^4 \quad . \quad (1.3.11)$$

Použijeme -li Spitzerovy vztahy pro vodivost (1.1.7) a pro absorpční koeficient (1.3.10) dostáváme podmínku

$$I^2 \leq 4\pi^2 \sigma_B \sigma_0 \chi_0 \frac{(1+Z)^2 N^2}{\ln \Lambda} T^2 \quad . \quad (1.3.12)$$

Po dosazení za teplotu z Bennetovy podmínky rovnováhy (1.3.3) získáváme výsledný vztah

$$I^2 \geq I_{PB}^2 \quad ; \quad I_{PB}^2 \equiv \frac{16 k_B^2 \ln \Lambda}{\mu_0^2 \sigma_B \sigma_0 \chi_0} \quad . \quad (1.3.13)$$

Tento vztah je vyjádřením podmínky $P_r \geq P_J$ (radiační odvod energie je roven nebo převyšuje Jouleův ohřev). S rostoucí teplotou pinče klesá Jouleův ohřev (roste vodivost) a zvyšuje se radiační odvod energie. Proto pro proudy $I > I_{PB}$ radiační odvod energie převyší ohřev. Hodnota I_{PB} se nazývá Pease-Braginského proud. Vzhledem k tomu, že Coulombův logaritmus je na parametrech plazmatu závislý jen málo, je Pease-Braginského proud určen jen základními konstantami a jeho hodnota nezávisí ani na poloměru, ani na ostatních parametrech pinče (stupeň ionizace, teplota).

Tento fakt platí jen pro opticky řídké plazma. Dosadíme -li do (1.3.8) pro radiační výkon vztah $\eta \approx 2 \chi R$ pro opticky řídké plazma a absorpční koeficient z (1.3.10), vidíme, že opticky řídké plazma nezáří jako absolutně černé těleso, intenzita záření je úměrná $T^{1/2} R^{-2}$. Dominantní je brzdné záření, které vzniká při srážkách elektronů s ionty.

Při proudech vyšších než I_{PB} může dojít k nekontrolovatelnému kolapsu pinče a radiace bude vždy schopná odvést generované Jouleovo teplo. Toto samozřejmě platí

pro Boltzmannovu statistiku, u které byla použita stavová rovnice ve tvaru $p = nk_B T$. Kolaps by případně zastavil kvantový tlak degenerovaného elektronového plynu [8].

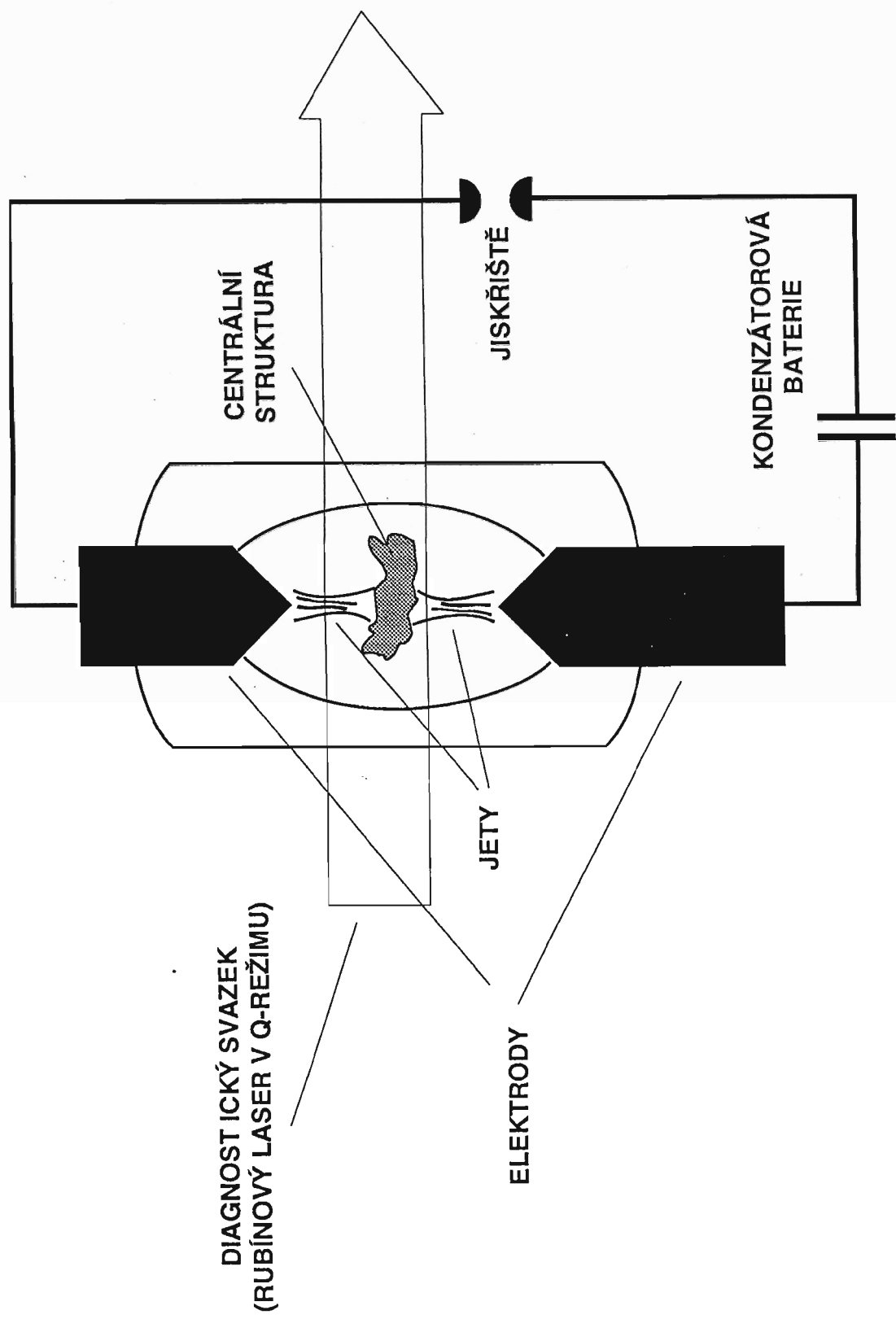
Hodnota Pease-Braginského proudu vychází přibližně 10^6 A. Prochází-li plazmatem proud vyšší než tato hodnota, mělo by dojít k samovolnému elektromagnetickému kolapsu. Tato teoretická předpověď je značně problematická, protože předpoklady Pease-Braginského odvození nejsou nikdy přesně splněny:

- Plazma v reálném případě může být opticky husté a zářit jako absolutně černé těleso ($\eta = 1$), nebo je koeficient η dán obecnou formulí (1.3.9). Hodnota kritického proudu je pak závislá na parametrech plazmatu a není konstantou.
- Vodivost plazmatu může být anomální a klasický Spitzerův vztah nemusí platit [15,17].
- Energie může být odváděna i jinými mechanismy (např. ztráta energetických částic z chvostu Maxwellova rozdělení).
- V ranných fázích výboje dochází k rozdělení pinče do několika plazmových vláken.

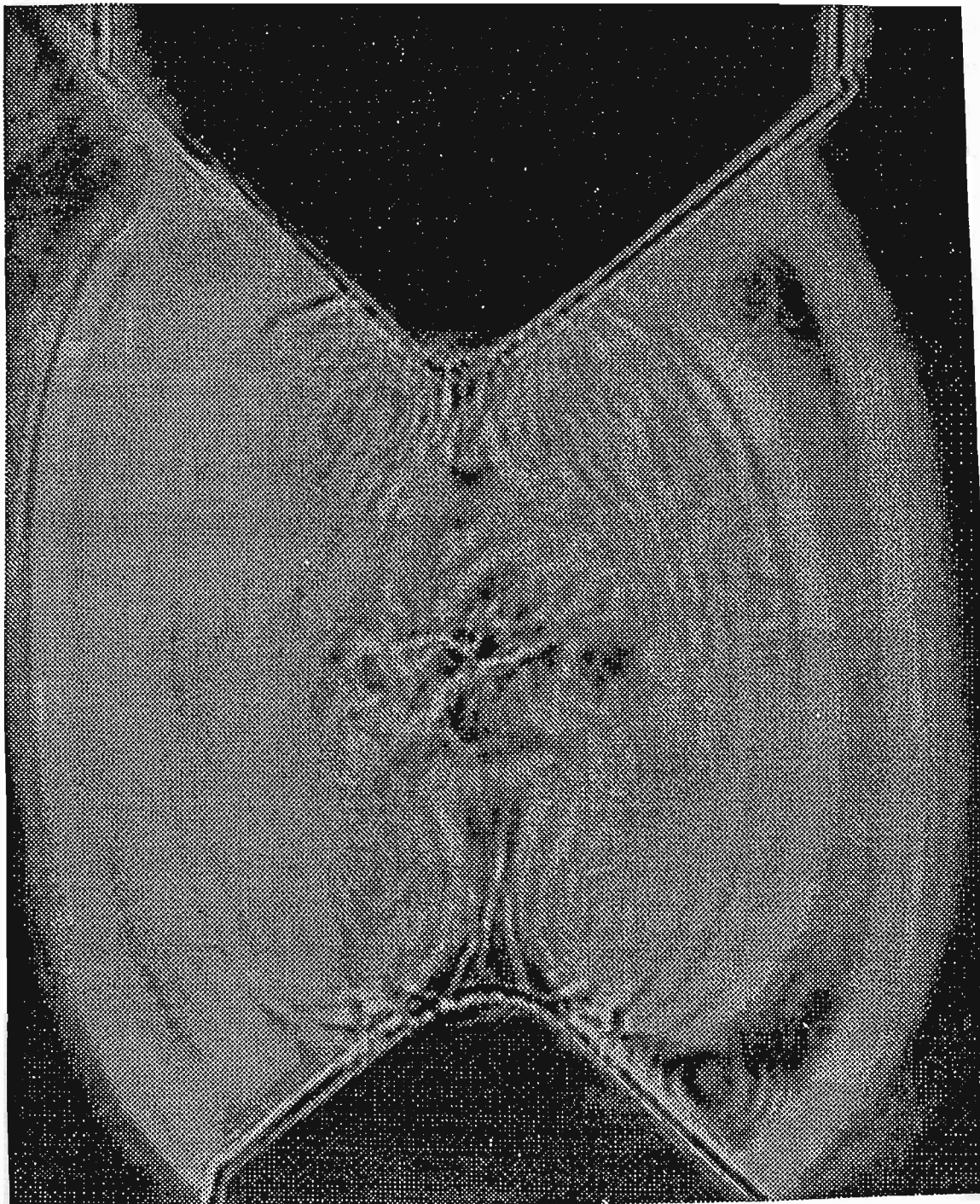
V některých experimentech se objevují husté kompaktní oblasti plazmatu, které by mohly být zkolabovaným plazmatem i při proudech nižších než je konstanta I_{PB} . Naopak proud I_{PB} je obtížné v jednom pinči dosáhnout, neboť se pinč dříve rozdělí na několik proudových vláken. Otázka elektromagnetického kolapsu tak i dnes zůstává otevřená. V diplomové práci [49] byly numericky hledány hodnoty kritického proudu i pro jiné předpoklady než z Pease-Braginského odvození.

1.4. Z-pinč na FEL

Pracovníci katedry fyziky FEL mají dlouholeté zkušenosti s výzkumem plazmatu. Bylo zde zkoumáno plazma v mnoha konfiguracích - T trubice, kolejnicové urychlovače plazmatu s drátovými elektrodami, se dvěma a třemi rovinnými elektrodami, plazmová vrhací zařízení, koaxiální urychlovače plazmatu, plazmafokus. V posledních letech je zkoumána konfigurace s kónickými elektrodami, která je z hlediska vlastností z-pinče mimořádně zajímavá - obr. 1.4.1.



Obr. 1.4.1.: Schema aparatury



Obr. 1.4.2.: Šlířová fotografie pinče v kónické konfiguraci elektrod

Mezi elektrodami dojde k výboji a vytvoření vodivého kanálu, který má charakter z-pinče. Díky tvaru elektrod je magnetické pole mezi elektrodami nejslabší. V tomto místě se z-pinč přeruší a vzniknou dva kratší z-pinče v blízkosti elektrod. Tyto z-pinče jsou komprimovány vlastním magnetickým polem. Radiální kinetická energie iontů je nějakým mechanismem přeměněna na axiální. Vznikají jety vyvrhující částice do centrální oblasti, kde vzniká velmi zajímavá struktura - viz fotografie na obr 1.4.2. Pro některé hodnoty tlaku a některé plynné náplně (10^3 Pa, dusík) je centrální struktura bohatá na různé filameny a drobné vírové struktury. Za jiných podmínek (10^4 Pa, argon) v centrální oblasti vzniká kompaktní útvar (plazmoid) bez výrazné struktury, jakási víceméně homogenní plazmová kulička [41,45]. V laboratoři FEL byly pořízeny šlírové fotografie plazmatu, interferogramy, spektra, ke zkoumání byla použita roentgenovská diagnostika i další metody. Byly učiněny i pokusy s nanášením tenkých vrstev látek obsažených v plazmatu na různé substráty za pomoci této konfigurace elektrod [23,24,31,32,34,36-41,43-45].

Základní parametry zařízení jsou :

kapacita kondenzátorové baterie	3 μ F
napětí	18 kV
energie	500 J
maximální proud	50 kA
perioda	4 μ s
vzdálenost elektrod	1 cm
vrcholový úhel elektrod	90 °
tlak	$10^3 \div 10^5$ Pa
koncentrace plazmatu	$10^{23} \div 10^{25}$ m ⁻³
teplota	2 \div 3 eV .

1.5. Teoretický popis plazmatu

Při studiu plazmatu se můžeme spokojit s různými úrovněmi popisu plazmatu. Pravděpodobně nejkompexnější přístup je *statistický* [51,53]. Statistické modely jsou založeny na řešení Boltzmannovy rovnice pro rozdělovací funkci poloh a rychlostí různých komponent plazmatu. Jednotlivé statistické modely se liší pravými stranami Boltzmannovy rovnice (tzv. srážkový integrál). V podstatě jde o to, které jevy zahrnout do procesu interakce různých komponent plazmatu. Nejčastěji se používá

- nulová pravá strana (bezsrážkové plazma)

- Coulombické srážky (Focker-Planckova rovnice)
- Coulombické srážky se záměrným parametrem z intervalu (r_{\min}, r_{\max}) , kde r_{\min} je vzdálenost, při které dojde k rozptylu o 90° ; r_{\max} je Debyeův poloměr (Landauova rovnice). Rozptyly s $r < r_{\min}$ a $r > r_{\max}$ se považují za zanedbatelné. Logaritmus podílu r_{\max}/r_{\min} se nazývá Coulombův logaritmus a vyskytuje se ve většině vztahů odvozených z Landauovy rovnice.

V případech, kdy není třeba znát rychlostní rozdělení je možné provést středování Boltzmannovy rovnice přes různé momenty rychlosti. Výsledkem je soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují plazma jako *kontinuum* [51,53,55,60,65]. Dynamické proměnné jsou funkcí času a prostorových souřadnic. Středování přes

- v^0 dá rovnici kontinuity pro jednotlivé koncentrace komponent,
- v^1 dá rovnici pro rychlost (rozšíření Naviere-Stokesovy rovnice o členy s magnetickým polem),
- v^2 dá rovnici pro tlak (resp. energii nebo teplotu),
- v^3 dá rovnici pro tepelný tok.

Toto středování je nutné pro některý krok ukončit a vzniklou soustavu parciálních diferenciálních rovnic uzavřít - zpravidla algebraickým vztahem pro veličinu, kterou by popisovala následující rovnice (stavová rovnice pro tlak, rovnice pro tepelný tok). Takto odvozenými soustavami jsou např. *MHD rovnice* [60,65].

V některých případech (symetrie úlohy, stacionární řešení) lze soustavu parciálních diferenciálních rovnic převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto modely můžeme nazvat *mechanické modely* (podle analogie s pohybem těles v mechanice) [26].

Někdy je možné získat důležité informace sledováním pohybu částice v předem zadaných vnějších polích. Částice nemá možnost tato pole ovlivnit. Vystředujeme gyrační pohyb (Larmorova rotace kolem magnetických silokřivek) a zajímáme se jen o globální pohyb gyračních středů - tzv. driftů - *driftový model* [50,59,60].

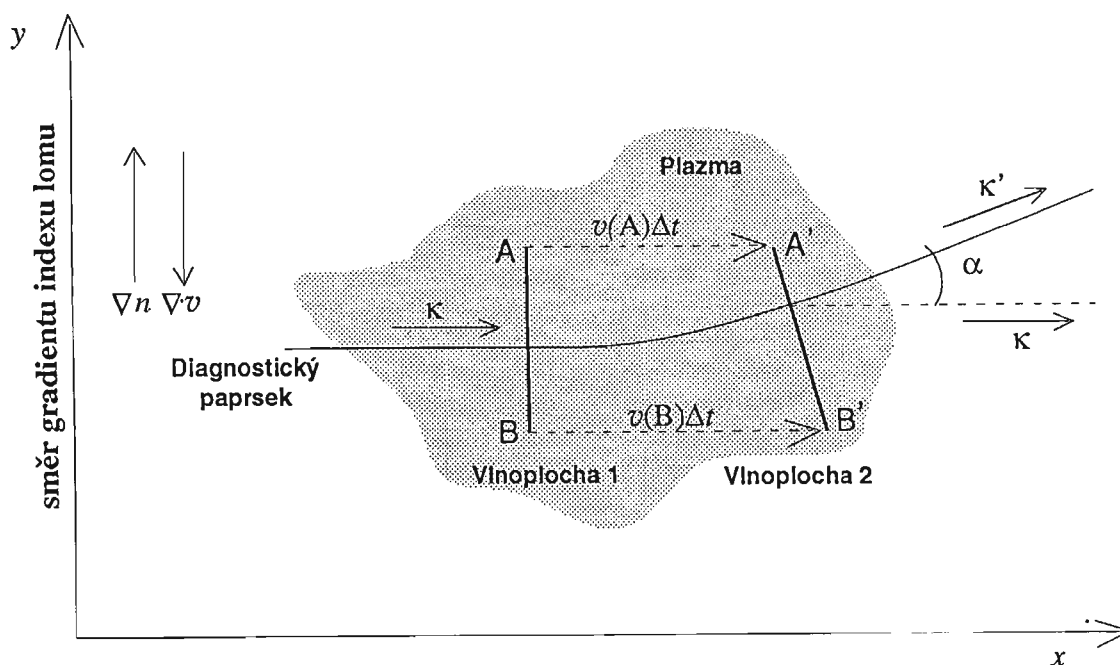
Nejčastější modely jsou *smíšené (hybridní)*, které využívají výhod více druhů popisu plazmatu. Jde např. o *PIC modely* (Particles in Cells), *CIC modely* (Clouds in Cell) a další [14,68].

2. ŠLÍROVÁ DIAGNOSTIKA

Pro komplexní diagnostiku z-pinče na katedře fyziky byla použita celá řada metod. Hlavním cílem bylo sledování nehomogenit v pinči. Tyto struktury byly zobrazovány především metodou šlírové fotografie - viz např. obr. 1.4.2 ke kapitole 1.4. Důležité bylo také získání interferogramů plazmatu. Z posunu interferenčních proužků je možné odhadnout koncentraci plazmatu. Sledována byla spektra z různých oblastí plazmatu. Ze spekter je možné odhadnout teplotu plazmatu. Vyzkoušena byla také RTG diagnostika pro zjištění přítomnosti měkkého RTG záření v zkomprimované oblasti plazmatu, jetech a centrální struktuře. Sledován byl průběh proudu i další parametry plazmatu. Výsledky experimentálních prací kolektivu katedry fyziky lze nalézt v publikacích [23,24,31,32,34, 36-41,43-45]. V této práci se budu zabývat šlírovou metodou a teoretickým odvozením vztahů pro prostorovou defleksi.

2.1. Úvod

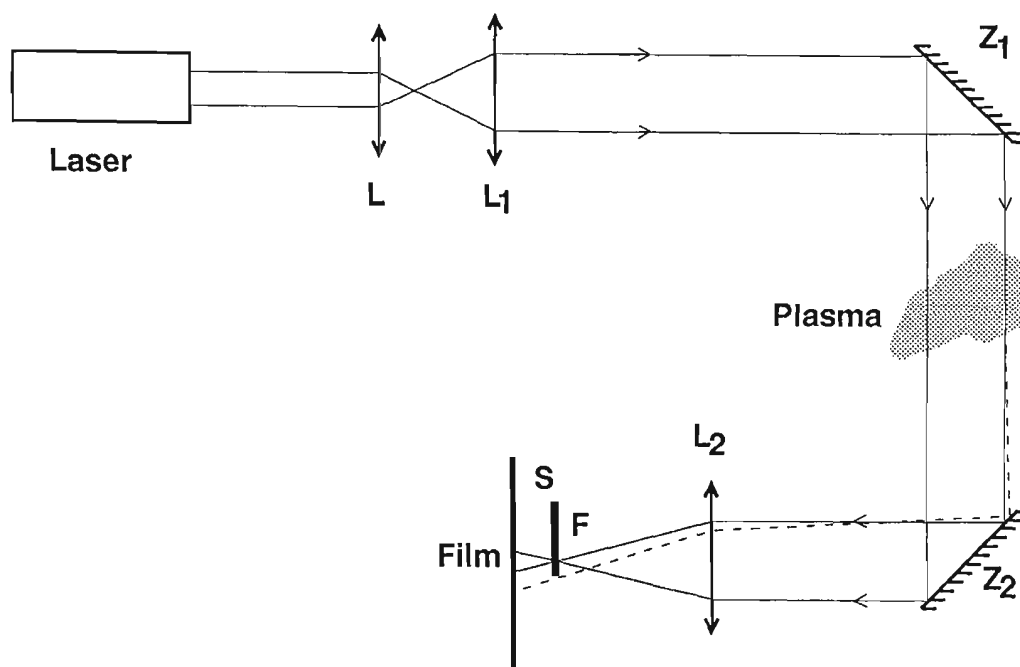
Diagnostika plazmatu šlírovou metodou využívá defleksi laserového paprsku na příčných gradientech koncentrace plazmatu [6,10,11,23,24]. Na obr. 2.1.1. se dva blízké body A, B rovinné vlnoplochy přesunou za čas Δt



Obr. 2.1.1.: Defleksi paprsku na nehomogenitě

do bodů A', B'. Je-li rychlost šíření světla v bodech A, B různá (a tedy i index lomu a koncentrace), dojde k stočení roviny vlnoplochy a tím k defleksi paprsku ze směru \vec{k} do směru \vec{k}' .

Tento jev je využíván při zobrazování nehomogenit v plazmatu - viz obr. 2.1.2.:



Obr. 2.1.2.: Základní princip šířové metody

Pulsní laserový paprsek je kolimován soustavou čoček L_1 , L , a po odrazu na zrcadle Z_1 prochází nehomogenním plazmatem. Zde dochází k deflekcí paprsku. Neodkloněné paprsky jsou po odrazu na zrcadle Z_2 a průchodu čočkou L_2 soustředěny do ohniska F . V ohnisku je nastaveno ostří S (břit nože, malá kruhová clonka), které tyto nedeflekované paprsky odstraní. Na stínítku (filmu) jsou pak zobrazeny jen paprsky deflekované na nehomogenitách plazmatu.

Označme v velikost fázové rychlosti elektromagnetické vlny s frekvencí ω a vlnovým vektorem \mathbf{k} :

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (2.1.1)$$

Jednotkový vektor ve směru postupu vlny je

$$\vec{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2.1.2)$$

Disperzní relace řádné elektromagnetické vlny v plazmatu se dá zapsat ve tvaru [61], viz rovnici (6.4.12),

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad , \quad \text{kde} \quad (2.1.3)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (2.1.4)$$

je plazmová frekvence. S pomocí vztahu (2.1.3) můžeme pro index lomu $\mathcal{N} = ck/\omega$ získat rovnici

$$\mathcal{N} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad . \quad (2.1.5)$$

Pro obvyklou situaci, kdy $\omega_p \ll \omega$ lze psát

$$\mathcal{N} \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \quad . \quad (2.1.6)$$

Celkový úhel deflektce paprsku α se zpravidla určuje z relace

$$\alpha = \int \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} dl \quad ; \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad , \quad (2.1.7)$$

která platí za předpokladů [52]:

- 1) deflektční úhly jsou malé
- 2) paprsek se pohybuje ve směru osy x
- 3) gradient koncentrace (index lomu) je kolmý ke směru pohybu (v ose y).

Proto lze také přibližně psát

$$\alpha = \int \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} dx \quad . \quad (2.1.8)$$

Případem malých deflekcí v příčném gradientu koncentrace plazmatu, odvozením vztahu (2.1.8) a jeho dalším rozbořem se budeme zabývat v následujícím odstavci 2.2. této kapitoly.

Tento vztah však nepostihuje obecný gradient indexu lomu a tudíž deflektci paprsku ve všech třech dimenzích. Rovnice (2.1.7) a (2.1.8) jsou platné pouze pro malé deflektce a integrální meze jsou v některých případech těžko určitelné. Poněkud jinou a dostatečně obecnou metodu popisu deflektce paprsku při pohybu nehomogenním plazmatem navrhneme v odstavci 2.3. této kapitoly. Metoda vychází z popisu trajektorie paprsku za pomoci soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

2.2. Malé deflektce

Při odvozování rovnice deflektce využijeme jako parametr popisující trajektorii paprsku čas. V jednoduchém případě na obr. 2.1.1. (malé deflektce, orientace souřadnicové soustavy podle výše uvedených předpokladů) je vidět, že pro dva dostatečně blízké body A, B a dostatečně krátký časový interval δt bude platit pro úhel deflektce paprsku vztah

$$\delta\alpha = -\frac{\|B' - B\| - \|A' - A\|}{\|B - A\|} = \frac{[v(B) - v(A)] \delta t}{\|B - A\|} = -\frac{\Delta v}{\Delta y} \delta t \quad . \quad (2.2.1)$$

Po provedení limit $\Delta y \rightarrow 0$, $\delta t \rightarrow 0$ dostaneme

$$d\alpha = -\frac{\partial v}{\partial y} dt \quad . \quad (2.2.2)$$

Z tohoto vztahu s využitím rovnosti $v=c/\mathcal{N}$ vidíme, že

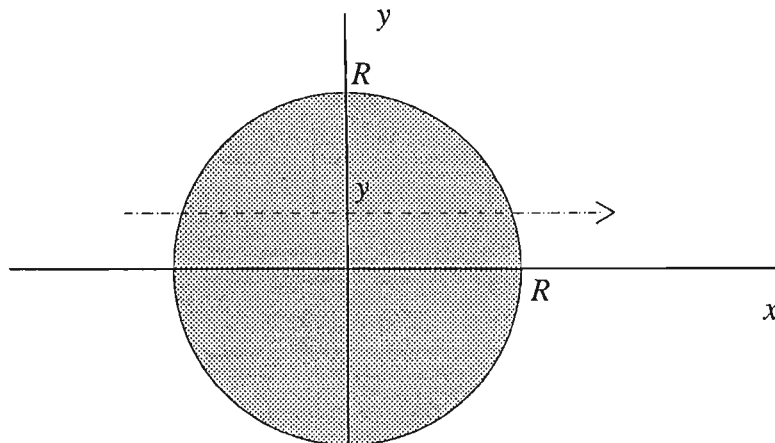
$$d\alpha = \frac{c}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} dt \quad . \quad (2.2.3)$$

Jestliže jako parametr popisující trajektorii paprsku použijeme vlastní délku trajektorie $l(t)$, rovnice (2.2.3) přejde ve tvar

$$d\alpha = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} dl \quad , \quad (2.2.4)$$

což je diferenciální podoba rovnice (2.1.7) resp. (2.1.8).

Aplikujme nyní vztah (2.1.8) na válcově symetrickou nehomogenitu - viz obr. 2.2.1., s osou symetrie v ose z. Koncentrace a index lomu je funkcí vzdálenosti od středu



Obr. 2.2.1.: Válcově symetrická nehomogenita

nehomogenity:

$$n=n(r) \quad ; \quad \mathcal{N}=\mathcal{N}(r) \quad . \quad (2.2.5)$$

Celková odchylka α paprsku nalétávajícího na nehomogenitu ve vzdálenosti y od centra vychází z (2.1.8)

$$\alpha(y) = 2 \int_0^{(R^2-y^2)^{1/2}} \frac{1}{\mathcal{N}(r)} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} dx \quad , \quad (2.2.6)$$

kde jsme využili symetrii nehomogenity. Uvážíme-li, že

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} = \mathcal{N}'(r) \frac{y}{r} \quad , \quad (2.2.7)$$

a provedeme substituci k proměnné r ($x dx = r dr$; $x = (r^2 - y^2)^{1/2}$), získáme pro $\alpha(y)$ vztah

$$\alpha(y) = 2y \int_y^R \frac{\mathcal{N}'(r)}{\mathcal{N}(r)} \frac{dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} \quad , \quad (2.2.8)$$

čárkou značíme derivaci podle r , R je poloměr nehomogenity. Deflekce $\alpha(y)$ je zřejmě lichou funkcí proměnné y , tj. $\alpha(-y) = -\alpha(y)$ a je nulová mimo interval $\langle -R, R \rangle$, protože pro $r > R$ je $n(r) = 0$, $\mathcal{N}(r) = 1$, $\mathcal{N}'(r) = 0$. Za pomoci Abelovy integrální transformace [67]

$$f_a(x) \equiv \mathcal{A}[f(t); x] \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{f(t) dt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} \quad ; \quad (2.2.9)$$

$$f(t) = \mathcal{A}^{-1}[f_a(x); t] = \frac{d}{dt} \mathcal{A}[x; f_a(x); t]$$

lze výraz (2.2.8) přepsat do konečného tvaru

$$\alpha(y) = \sqrt{2\pi} y \cdot \mathcal{A}[\mathcal{N}'(r)/\mathcal{N}(r); y] \quad . \quad (2.2.10)$$

Podle [7] je rozložení relativní intenzity na stínítku při šlírové metodě s ostřím v ose z dáno vztahem

$$\varepsilon(y') = -\frac{2}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(y) dy}{y - y'/M} \quad , \quad (2.2.11)$$

kde M je příčné zvětšení, které lze bez újmy na obecnosti položit $M=1$ (přeškálování velikosti stínítka). Relativní intenzita $\varepsilon(y')$ je sudou funkcí proměnné y' , tj. $\varepsilon(-y') = \varepsilon(y')$. Vztah (2.2.11) lze za pomoci integrální Hilbertovy transformace [67]

$$f_h(x) \equiv \mathcal{H}[f(t); x] \equiv \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t) dt}{t - x} \quad ; \quad (2.2.12)$$

$$f(t) = \mathcal{H}^{-1}[f_h(x); t] = -\mathcal{H}[f_h(x); t]$$

přepsat do tvaru

$$\varepsilon(y') = -2 \mathcal{H}[\alpha(y); y'] \quad . \quad (2.2.13)$$

Provedeme -li ke vztahům (2.2.10) a (2.2.13) inverzní transformace, máme

$$\frac{\mathcal{N}'(r)}{\mathcal{N}(r)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 - r^2}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(y')}{y' - y} dy' \right) \right) dy \quad . \quad (2.2.14)$$

Ve vnitřním integrálu v (2.2.14) pro $y' < 0$ provedeme substituci $y' \rightarrow -y'$ a využijeme symetrie $\varepsilon(-y') = \varepsilon(y')$:

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(y')}{y'-y} dy' &= \text{v.p.} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{\varepsilon(y')}{y'-y} dy' = \\ \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \varepsilon(y') \left(\frac{1}{y'-y} - \frac{1}{y'+y} \right) dy' &= \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \varepsilon(y') \left(\frac{2y}{y'^2 - y^2} \right) dy' \end{aligned}$$

Nyní v integrálu (2.2.14) zaměníme pořadí integrace a provedeme substituci $\xi^2 = y'^2 - r^2$ a dostaneme

$$\frac{\mathcal{N}'(r)}{\mathcal{N}(r)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{dr} \int_0^{+\infty} \varepsilon(y') \left(\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + r^2 - y'^2} \right) dy'$$

Vzhledem k tomu, že pro vnitřní integrál platí

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + r^2 - y'^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{r^2 - y'^2}} & \text{pro } y' < r \\ 0 & \text{pro } y' > r \end{cases}$$

pro integrál (2.2.14) dostaneme výraz

$$\frac{\mathcal{N}'(r)}{\mathcal{N}(r)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\varepsilon(y')}{\sqrt{r^2 - y'^2}} dy' \quad , \quad (2.2.15)$$

ze kterého již lze snadno zjistit celý průběh indexu lomu přímou integrací:

$$\mathcal{N}(r) = \mathcal{N}(0) \exp \left[\int_0^r \frac{\varepsilon(y)}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy \right] \quad . \quad (2.2.16)$$

Pro cylindricky symetrickou nehomogenitu plazmatu je tedy možná relativně snadná rekonstrukce průběhu indexu lomu a koncentrace v nehomogenitě.

2.3. Rovnice prostorové deflektce

V třírozměrném případě je okamžitá osa stáčení paprsku kolmá jednak ke gradientu fázové rychlosti, jednak ke směru šíření paprsku, platí tedy

$$d\alpha = [\vec{\nabla}v \times \kappa] dt \quad , \quad \text{nebo} \quad (2.3.1)$$

$$d\alpha = -\frac{c}{\mathcal{N}^2} [\vec{\nabla}\mathcal{N} \times \kappa] dt \quad . \quad (2.3.2)$$

Vektor α má směr společný s osou stáčení paprsku a jeho velikost se rovná úhlu deflektce. Při nekonečně malém stočení o úhel $d\alpha$ se jednotkový vektor κ ve směru šíření paprsku transformuje podle vztahu pro infinitesimální rotaci

$$\kappa(t+dt) = \kappa(t) + d\alpha \times \kappa(t) \quad . \quad (2.3.3)$$

Kombinací s výše odvozenou rovnicí (2.3.2) vidíme, že platí

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\frac{c}{\mathcal{N}^2} [\vec{\nabla}\mathcal{N} \times \kappa] \times \kappa \quad , \quad \text{neboli} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{c}{\mathcal{N}^2} [\vec{\nabla}\mathcal{N} - (\kappa \cdot \vec{\nabla}\mathcal{N}) \kappa] \quad . \quad (2.3.5)$$

Body na trajektorii paprsku splňují rovnici $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$ (parametr popisující trajektorii je čas), tj.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{c}{\mathcal{N}} \kappa \quad . \quad (2.3.6)$$

Jestliže budeme předpokládat, že $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ je známá funkce daná prostorovým rozložením koncentrace plazmatu v oblasti nehomogenity a vztahy (2.1.5) a (2.1.6) pro index lomu, pak je soustava rovnic (2.3.5), (2.3.6) systémem obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro funkce $\kappa(t)$, $\mathbf{x}(t)$.

Z počáteční konfigurace paprsku $\kappa(t_0)$, $\mathbf{x}(t_0)$ můžeme s pomocí rovnic (2.3.5), (2.3.6) určit vektory $\kappa(t)$, $\mathbf{x}(t)$ pro libovolný čas t . Celkový úhel deflektce v čase t lze potom získat ze vztahu

$$\cos \alpha(t) = \kappa(t) \cdot \kappa(t_0) \quad , \quad \text{tj.} \quad (2.3.7)$$

$$\alpha(t) = \arccos(\kappa(t) \cdot \kappa(t_0)) \quad . \quad (2.3.8)$$

Ukažme nyní, že pro situaci z obr. 2.1.1 ($\partial\mathcal{N}/\partial x = \partial\mathcal{N}/\partial z = \kappa_z = 0$; $\alpha < \pi/2$) přejdou rovnice (2.3.5), (2.3.6) v rovnici (2.2.3) pro dvourozměrný případ. Z rovnice (2.3.5) dostaneme

$$\frac{d\kappa_x}{dt} = -\frac{c}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y} \kappa_x \kappa_y \quad , \quad (2.3.9)$$

$$\frac{d\kappa_y}{dt} = \frac{c}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y} (1 - \kappa_y^2) \quad . \quad (2.3.10)$$

Podle výše uvedených předpokladů je

$$\kappa = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \quad (2.3.11)$$

a obě rovnice (2.3.9), (2.3.10) dávají relaci

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} \cos \alpha \quad , \quad (2.3.12)$$

která pro malé úhly α ($\cos \alpha \cong 1$) přejde v rovnici (2.2.3). Poznamenejme ještě, že namísto šesti rovnic (2.3.5), (2.3.6) prvního řádu bychom mohli použít systém třech rovnic druhého řádu. Po substituci za κ do (2.3.5) ze vztahu (2.3.6) dostaneme po jednoduché úpravě

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{\mathcal{N}^3} (\vec{\nabla} \mathcal{N}) - \frac{2}{\mathcal{N}} \left(\vec{\nabla} \mathcal{N} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad . \quad (2.3.13)$$

Pro numerické zpracování je však systém (2.3.5), (2.3.6) výhodnější. Navíc se celkový úhel deflektce určuje v tomto případě snadněji.

Odvozená soustava diferenciálních rovnic může být snadno převedena na bezrozměrné proměnné a následně numericky integrována. Jestliže je známé prostorové rozložení koncentrace plazmatu $n(\mathbf{x})$ v oblasti nehomogenity (tedy i závislost indexu lomu $\mathcal{N}(\mathbf{x})$), můžeme z rovnic (2.3.5), (2.3.6) určit trajektorii světelného paprsku. Uvedená soustava rovnic platí pro deflektce libovolné velikosti a pro gradient koncentrace zcela obecného směru.

3. DRIFTOVÝ MODEL z-PINČE

3.1. Úvod

Driftové modely zkoumají pohyb částic v předem zadaných elektrických a magnetických polích. Jednotlivé částice mezi sebou neinteragují ani neovlivňují přítomná pole. Částice konají Larmorovu rotaci kolem silokřivek magnetického pole (gyrační pohyb). Přes gyrační pohyb vystředujeme. Gyrační středy konají posuvný pohyb napříč přítomným silám, který nazýváme *drift* nebo *driftování* [59,60,61].

Základní rovnicí pro pohyb nabitě částice ve vnějších polích je Lorentzova pohybová rovnice

$$\frac{d}{dt}(mv) = \mathbf{F} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad . \quad (3.1.1)$$

V případě $\mathbf{F}=0$ dostáváme Larmorovu rotaci s poloměrem

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \quad (3.1.2)$$

a cyklotronní frekvencí

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad . \quad (3.1.2)$$

v_{\perp} je rychlost pohybu v rovině kolmé na \mathbf{B} . V případě $\mathbf{F} \neq 0$ (předpokládáme, že $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ se v průběhu cyklotronní rotace a na vzdálenosti Larmorova poloměru mění málo) se bude původní gyrační rychlost \mathbf{v}_G skládat s konstantní driftovou rychlostí \mathbf{v}_D , představující rychlost přesunu gyračního středu: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_D$. Z Lorentzovy pohybové rovnice (3.1.1) potom plyne [60]

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad . \quad (3.1.3)$$

Uvedme nyní základní drifty, kterým podléhá nabitá částice v přítomnosti magnetických a elektrických polí [59,60].

E×B drift

V přítomnosti homogenního statického elektrického pole (postačí i pole "málo" se měnící v prostoru a čase vzhledem ke gyraci) působí na částici síla $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a odpovídající driftová rychlost je

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.1.4)$$

Je zřejmé, že \mathbf{v}_E nezávisí na hmotnosti a náboji částice a je tedy stejná pro elektrony i ionty. Tento drift nebude původcem elektrického proudu. V případě zkřížených polí ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$) je driftová rychlost podílem E/B hodnot obou polí.

Grad-B drift

V nehomogenním magnetické poli působí na gyrační střed částice fiktivní síla $\mathbf{F} = -\mu \vec{\nabla} B$, kde μ je magnetický moment proudové smyčky vytvořené Larmorovou rotací částice $\mu = mv_{\perp}^2/2B$. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\mathbf{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3} \quad (3.1.5)$$

Tento drift závisí na hmotnosti a náboji částic, povede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu.

Drift zakřivení

Při pohybu kolem zakřivené silokřivky magnetického pole bude na částici působit odstředivá síla

$$\mathbf{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k},$$

kde \mathbf{R}_k je poloměr křivosti silokřivky. Rychlost driftu zakřivení je

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2} \quad (3.1.6)$$

Drift zakřivení opět povede ke vzniku proudu v plazmatu.

Polarizační drift

Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit \mathbf{v}_E . To odpovídá působení setrvačné síly

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} = m \frac{d\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{dt B^2}$$

a polarizačnímu driftu

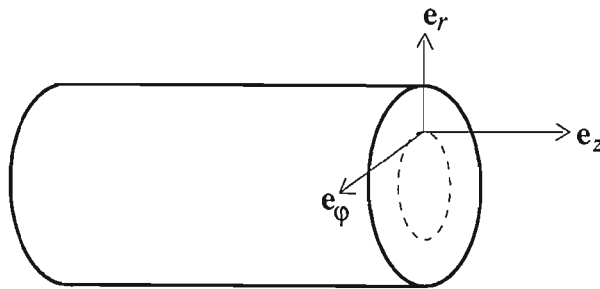
$$\mathbf{v}_p = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{B} \times \left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} \times \mathbf{B} \right)}{B^4}, \quad (3.1.7)$$

který je opět původcem proudu v plazmatu.

V této kapitole se budu zabývat odvozením jednoduchého modelu rovnováhy z-pinče, založeného na vyjádření proudů protékajících plazmatem za pomoci driftů. V odstavci 3.5. této kapitoly ukáží, že tento model je vhodný i pro popis dynamiky vývoje z pinče, resp. odvození časového průběhu elektrického pole v pinči.

3.2. Rovnováha sil v z-pinči

Řešme rovnováhu sloupce plazmatu s válcovou symetrií ve válcových souřadnicích dle obr. 3.2.1. Pripustme obecnou závislost proudové hustoty, magnetického pole a tlaku na radiální souřadnici r : $\rho=\rho(r)$, $B=B(r)$, $p=p(r)$.



Obr. 3.2.1.: Válcové souřadnice

V rovnováze ($v=0$, časové derivace nulové) musí být hustota Lorentzovy síly vyrovnána gradientem tlaku

$$0 = -\vec{\nabla}p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.2.1)$$

a proudová hustota bude dána Ampérovým zákonem

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_V, \quad (3.2.2)$$

kde na pravé straně stojí vodivostní proudy. Maxwellův posuvný proud je v rovnováze nulový. Zavedeme -li

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad ; \quad \text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_M, \quad (3.2.3)$$

můžeme (3.2.2) přepsat do tvaru

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_V + \mathbf{j}_M) = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.2.2')$$

kde \mathbf{j} je celková proudová hustota, \mathbf{j}_V je vodivostní proud, \mathbf{j}_M magnetizační proud a \mathbf{M} vektor magnetizace. Dosadíme -li za proudovou hustotu z (3.2.2') do podmínky rovnováhy (3.2.1) ve válcových souřadnicích, dostaneme

$$\frac{B^2}{\mu_0 R} + \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

Toto je obecná podmínka rovnováhy v geometrii s válcovou symetrií. Funkce $B(r)$ a $p(r)$ musí tuto podmínku vždy splňovat, uvnitř i vně plazmatu. Z této podmínky je zřejmé, že jde o rovnováhu tří sil:

$$\begin{aligned}
 f_R &\equiv -\frac{B^2}{\mu_0 R} && + \text{ hustota síly způsobené zakřivením silokřivek} \\
 f_B &\equiv -\frac{d}{dr}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) && - \text{ gradient magnetického tlaku} \\
 f_P &\equiv -\frac{dp}{dr} && - \text{ gradient tlaku plazmatu}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

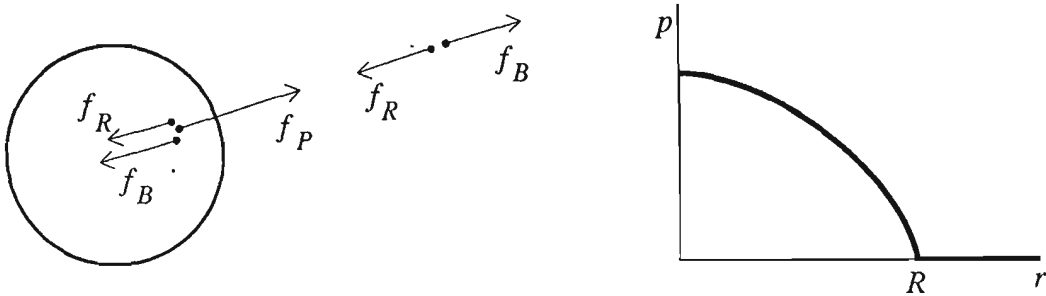
Hustotě síly f_R by v Maxwellově tenzoru pnutí odpovídal člen $B_i B_j / \mu_0$. Uvnitř plazmatu, kde je tlak plazmatu nenulový jsou v rovnováze všechny tři silové hustoty - gradient tlaku plazmatu, gradient magnetického tlaku a hustota síly křivosti. Vně plazmatu je

$$\begin{aligned}
 p(r) &= 0, \\
 B(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.6}$$

a proto

$$f_R = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3}; \quad f_B = +\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3}; \quad f_P = 0.
 \tag{3.2.7}$$

Je zřejmé, že právě hustota síly křivosti f_R vyvažuje gradient magnetického tlaku v prázdném prostoru a výsledná síla je nulová - viz obr. 3.2.2.



Obr. 3.2.2.: Rovnováha sil a průběh tlaku plazmatu.

Na povrchu plazmatu předpokládáme $p(R)=0$, podobně jako v gravitační interakci je definován povrch hvězdy nulovým tlakem.

3.3. Proudové tekoucí při rovnováze

Z konfigurace plazmatu je zřejmé, že v pinči poteče proud způsobený ∇B driftem, driftem zakřivení a magnetizační proud. Všechny tři proudové hustoty mají pro výše uvedenou geometrii směr osy z , odvodíme pro ně základní vztahy a ukážeme, že jejich součet je celkový proud tekoucí pinčem v rovnováze.

● proud způsobený grad B driftem

Pro proudovou hustotu můžeme za pomoci koncentrace a rychlosti nosičů náboje psát

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad ,$$

kde sumace probíhá přes elektrony a ionty. Za rychlost dosadíme driftovou rychlost (3.1.5) a využijeme cylindrické symetrie pinče:

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} \left(n_e \frac{m_e v_{e\perp}^2}{2} + n_i \frac{m_i v_{i\perp}^2}{2} \right) \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z \quad .$$

Předpokládáme, že v plazmatu jsou dominantní srážky, proto budeme uvažovat kolmou složku kinetické energie vystředovanou. V kolmém směru má částice 2 stupně volnosti, proto

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

a tedy

$$j_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \frac{\partial B}{\partial r} = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} \quad . \quad (3.3.1)$$

● proud způsobený driftem zakřivení

Analogickým postupem jako při ∇B driftu určíme z driftu zakřivení (3.1.6) proudovou hustotu

$$j_R = \frac{1}{rB} (n_e m_e v_{e\parallel}^2 + n_i m_i v_{i\parallel}^2) \quad .$$

Vypočteme střední hodnotu podélné složky kinetické energie (1 stupeň volnosti podél magnetického pole)

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right\rangle = 1 \cdot \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow \langle m v_{\parallel}^2 \rangle = k_B T$$

a pro proudovou hustotu způsobenou driftem zakřivení máme výsledný vztah

$$j_R = \frac{1}{rB} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) = \frac{p}{rB} \quad . \quad (3.3.2)$$

● magnetizační proud

V případě homogenního plazmatu a konstantního magnetického pole je proudový příspěvek od soustavy shodně Larmorovsky rotujících částic nulový. Je-li pole

nehomogenní, jsou Larmorovy poloměry v různých místech různé a průměrný příspěvek k tekoucímu proudu může být nenulový. Podobně v nehomogenním plazmatu v některém směru narůstá koncentrace nosičů náboje a při průměrování příspěvku k celkovému proudu dostaneme nenulový výsledek. Magnetický moment jedné částice je

$$\vec{\mu} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} \quad .$$

Nyní určíme celkovou magnetizaci a opět vystředujeme přes kvadráty rychlostí:

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \vec{\mu}_{\alpha} \rangle = -\frac{\langle n_e m_e v_{e\perp}^2 + n_i m_i v_{i\perp}^2 \rangle}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} = -\frac{n_e k_B T_e + n_i k_B T_i}{B} \mathbf{e}_{\varphi} = -\frac{p}{B} \mathbf{e}_{\varphi} \quad .$$

Magnetizační proud $\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M}$ a pro jeho velikost v zadané geometrii snadno nalezneme

$$j_M = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) \quad . \quad (3.3.3)$$

Na závěr ukažme, že součet všech tří výše uvedených proudových hustot dá celkový proud tekoucí pinčem:

$$j_{\nabla B} + j_R + j_M = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{p}{rB} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \quad .$$

Zřejmě tedy platí

$$(j_{\nabla B} + j_R + j_M)B = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad ,$$

což je podmínka rovnováhy (3.2.1), ve které vystupuje celkový proud j . Celkový proud tekoucí pinčem v rovnováze je tedy součtem proudu způsobeného ∇B driftem, driftem zakřivení a magnetizačního proudu.

3.4 Obecné řešení rovnováhy s válcovou symetrií

Známe-li jednu z funkcí $j(r)$, $B(r)$, $p(r)$, potom je již možné z podmínek rovnováhy ostatní funkce dopočítat. Za předpokladu $j(r)=\text{const}$ bychom například dostali Bennetovu podmínku rovnováhy. Zaveďme funkci

$$\mathcal{J}(r) \equiv \int_0^r 2\pi r j(r) dr \quad , \quad (3.4.1)$$

která má význam celkového proudu tekoucího v oblasti $\langle 0, r \rangle$. Speciálně pro $j=\text{const}=I/\pi R^2$ je

$$J(r) = \begin{cases} I \left(\frac{r}{R}\right)^2 & r < R \\ I & r \geq R \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Zavedme bezrozměrnou vzdálenost od osy symetrie $\xi \equiv r/R$, tj. $\xi=1$ je povrch pinče, $\xi < 1$ vnitřek pinče a $\xi > 1$ vnějšek pinče. Předpokládejme mocninný průběh funkce $J(\xi)$:

$$J(\xi) = \begin{cases} I \xi^\alpha & \xi < 1 \\ I & \xi \geq 1 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Případ konstantní proudové hustoty odpovídá $\alpha=2$. Z předpokládaného průběhu (3.4.3) lze ostatní rovnovážné funkce dopočítat. Z definičního vztahu (3.4.1) určíme proudovou hustotu $j(\xi)$, z Ampérova zákona magnetické pole $B(\xi)$ a z podmínky rovnováhy (3.2.4) průběh tlaku $p(\xi)$. Požadavek nulového tlaku na okraji pinče ($p(1)=0$) je okrajovou podmínkou rovnice rovnováhy. Ze vztahu (3.2.5) určíme hustoty jednotlivých sil a ze vztahů (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) proudové hustoty. Výsledek je [35]:

1) uvnitř ($\xi \leq 1$):

proudová funkce:

$$J(\xi) \equiv I \xi^\alpha \quad (3.4.4a)$$

rovnovážné funkce:

$$j(\xi) = \frac{I}{\pi R^2} \frac{\alpha}{2} \xi^{\alpha-2}$$

$$B(\xi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \xi^{\alpha-1} \quad (3.4.4b)$$

$$p(\xi) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2} \begin{cases} \frac{\alpha/2}{\alpha-1} (1-\xi^{2\alpha-2}) & \alpha \neq 1 \\ -\ln \xi & \alpha = 1 \end{cases}$$

hustoty sil:

$$f_R(\xi) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} \xi^{2\alpha-3}$$

$$f_B(\xi) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} (\alpha-1) \xi^{2\alpha-3} \quad (3.4.4c)$$

$$f_P(\xi) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} \alpha \xi^{2\alpha-3}$$

proudové hustoty:

$$j_{\nabla B}(\xi) = -\frac{I}{\pi R^2} \frac{\alpha}{4} (\xi^{-\alpha} - \xi^{\alpha-2})$$

$$j_R(\xi) = \frac{I}{\pi R^2} \begin{cases} \frac{\alpha}{4(\alpha-1)} (\xi^{-\alpha} - \xi^{\alpha-2}) & \alpha \neq 1 \\ -\frac{\ln \xi}{2\xi} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.4.4d)$$

$$j_M(\xi) = \frac{I}{\pi R^2} \begin{cases} -\frac{\alpha}{4(\alpha-1)} ((2-\alpha)\xi^{-\alpha} - \alpha\xi^{\alpha-2}) & \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2\xi} & \alpha = 1 \end{cases}$$

2) vně ($\xi \geq 1$):

proudová funkce:

$$J(\xi) \equiv I \quad (3.4.5a)$$

rovnovážné funkce:

$$j(\xi) = 0$$

$$B(\xi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \xi^{-1} \quad (3.4.5b)$$

$$p(\xi) = 0$$

hustoty sil:

$$f_R(\xi) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} \xi^{-3}$$

$$f_B(\xi) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} \xi^{-3} \quad (3.4.5c)$$

$$f_P(\xi) = 0$$

proudové hustoty:

$$j_{\nabla B}(\xi) = 0$$

$$j_R(\xi) = 0 \quad (3.4.5d)$$

$$j_M(\xi) = 0$$

Některé výsledky jsou zobrazeny na obr. 3.4.1. Z uvedených vztahů je zřejmé, že $f_R + f_B + f_P = 0$ všude. Divergující členy v proudech ve výrazu (3.4.4d) vznikly rozdělením proudu na tři komponenty $j_{\nabla B} + j_R + j_M$. V součtu divergence vymizí a nemá reálné důsledky. Výrazy pro případ $\alpha=1$ lze získat buď přímým výpočtem nebo z výrazů pro $\alpha \neq 1$ výpočtem limity $\alpha \rightarrow 1$. Z grafů na obrázku 3.4.1 je zřejmé, že malá změna mocninného parametru α znamená velké změny v průběhu proudové hustoty.

Charakterizujme nyní řešení pro různá α z grafů 3.4.1:

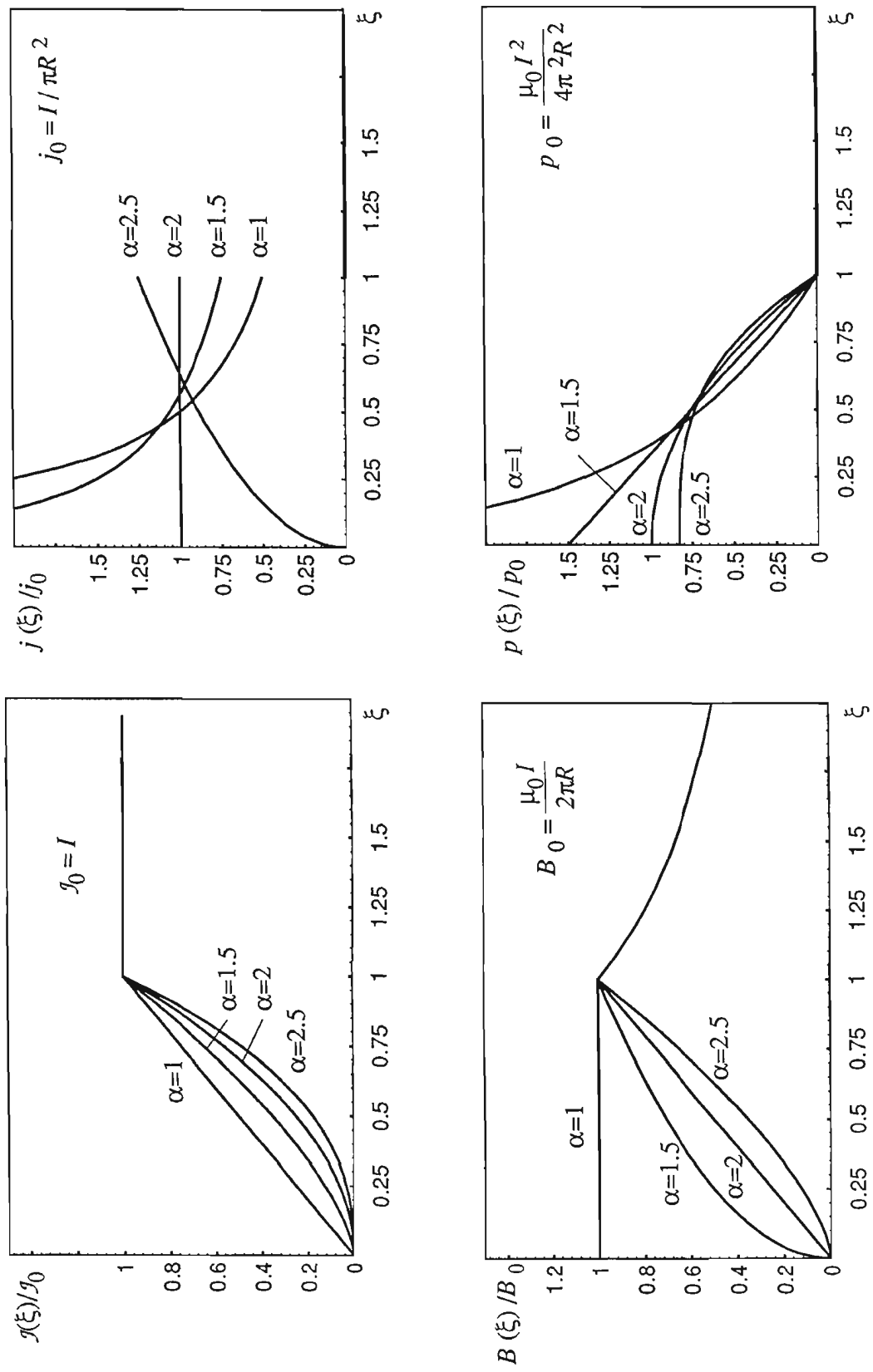
$\alpha=1.0$: Proudová hustota teče především v centru pinče, směrem do centra prudce narůstá a diverguje jako $1/\xi$. Na povrchu pinče teče minimální proud. Magnetické pole vytvořené tímto průběhem proudové hustoty je konstantní v celém objemu pinče. Tlak směrem do centra diverguje logaritmicky. To znamená výrazně husté jádro pinče a řídké okrajové vrstvy pinče. Závislost tlaku na vzdálenosti od centra je konvexní. Příklad $\alpha=1$ se svými divergencemi je limitním případem vztahů pro $\alpha \neq 1$, ve kterých se divergence nevyskytují.

$\alpha=1.5$: Proudová hustota má podobný průběh jako v předchozím případě. Proud teče především centrem pinče, kde výraz diverguje jako $\xi^{-1/2}$. Magnetické pole roste s poloměrem jako konvexní funkce. Tlak od centra k okrajům lineárně klesá.

$\alpha=2.0$: Tento případ je velmi důležitý neboť vede na konstantní průběh proudové hustoty v pinči. Tato rovnováha je známa jako Bennetova rovnováha. Magnetické pole narůstá v pinči přesně lineárně a tlak klesá parabolicky od centra k povrchu (Bennetův průběh tlaku a koncentrace). V tomto případě je součet proudových hustot od ∇B driftu a od driftu křivosti nulový. To znamená, že pro $\alpha=2$ je veškerý proud magnetizační.

$\alpha=2.5$: Pro $\alpha > 2$ má proudová hustota obrácený průběh - roste od centra směrem k povrchu. Proud tedy teče převážně po povrchu pinče (skin efekt). Odpovídající průběh magnetického pole se příliš neliší od mezního případu $\alpha=2$. Pole roste od centra k okraji pinče, růst však již není lineární. Tomu odpovídá i průběh tlaku velice podobný Bennetovu průběhu.

Poznamenejme na závěr, že tyto výsledky byly publikovány v [35].



Obr. 3.4.1.: Rovnováha z-pinče - driftový model

3.5. Polarizační drift a nerovnovážený problém

Elektrický proud v pinči zpravidla není konstantní, ale má sinusový průběh v čase. Elektrické pole se proto mění s časem. Pinč není v rovnováze. V celkovém proudu musíme započíst Maxwellův posuvný proud, který souvisí s časovou změnou elektrického pole a z mikroskopického hlediska je způsoben polarizačním driftem částic. Ampérův zákon je tedy třeba psát ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_V + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \text{ resp.} \quad (3.5.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\nabla B} + \mathbf{j}_R + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P) = \mu_0 \mathbf{j} \quad ,$$

kde jsme označili \mathbf{j}_P hustotu polarizačního proudu. Polarizační proud můžeme určit standardním výpočtem z polarizačního driftu (3.1.7) za pomoci výrazu

$$\mathbf{j}_P = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad .$$

Po úpravě dvojných vektorových součinů a s využitím cylindrické geometrie dostaneme

$$j_P = \frac{n(m_e + m_i)}{B^2} \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \frac{nm_i}{B^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad . \quad (3.5.2)$$

Z vyjádření (3.3.1), (3.3.2) a (3.3.3) proudových hustot $j_{\nabla B}$, j_R , j_M je zřejmé, že první tři proudové členy v (3.5.1) dají výraz

$$j_{\nabla n} \equiv j_{\nabla B} + j_R + j_M = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2k_B T}{B} \frac{\partial n}{\partial r} \quad , \quad (3.5.3)$$

který se nazývá diamagnetický proud. Rozdělení proudové hustoty na komponenty $j_{\nabla B}$, j_R , j_M je jen formální. To také potvrzují divergence jednotlivých členů, které se v součtu již nevyskytují. Existence diamagnetického proudu nevyplývá přímo z částicového (driftového) modelu. Diamagnetický proud je vyvoláván gradientem koncentrace plazmatu, který je v našem případě nepopiratelný. Celkovou proudovou hustotu tekoucí plazmatem lze tedy jednoduše zapsat jako

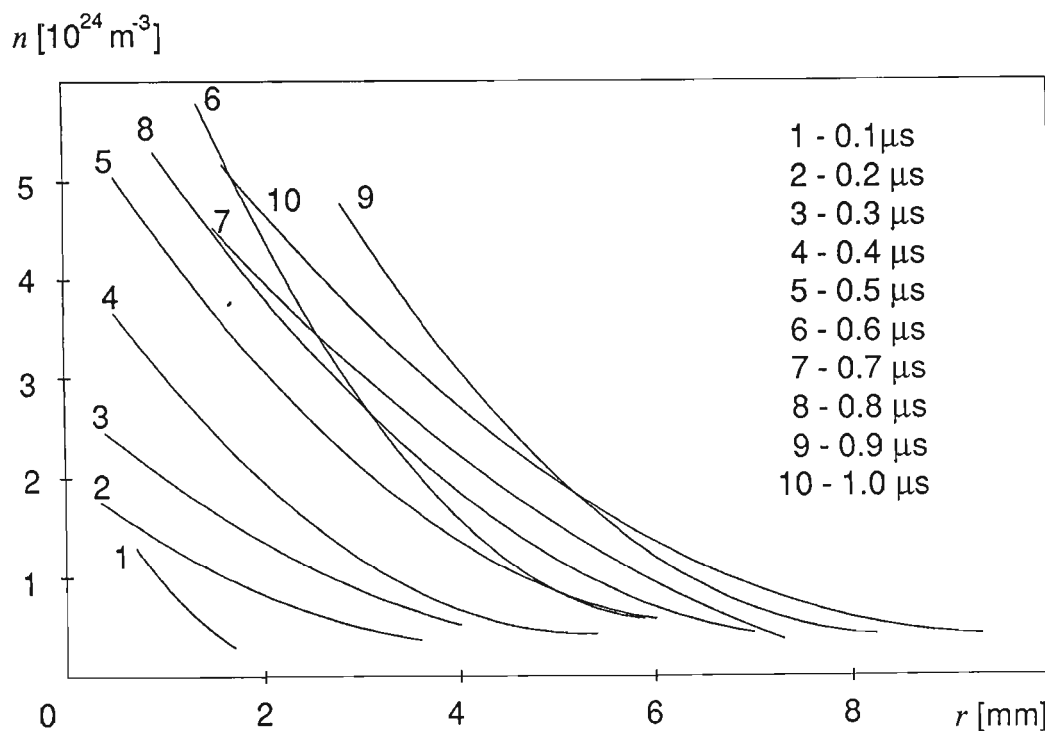
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\nabla n} + \mathbf{j}_P \quad , \quad (3.5.4)$$

kde hustota diamagnetického proudu $j_{\nabla n}$ v sobě zahrnuje hustotu proudu od ∇B driftu, od driftu křivosti a magnetizační proud.

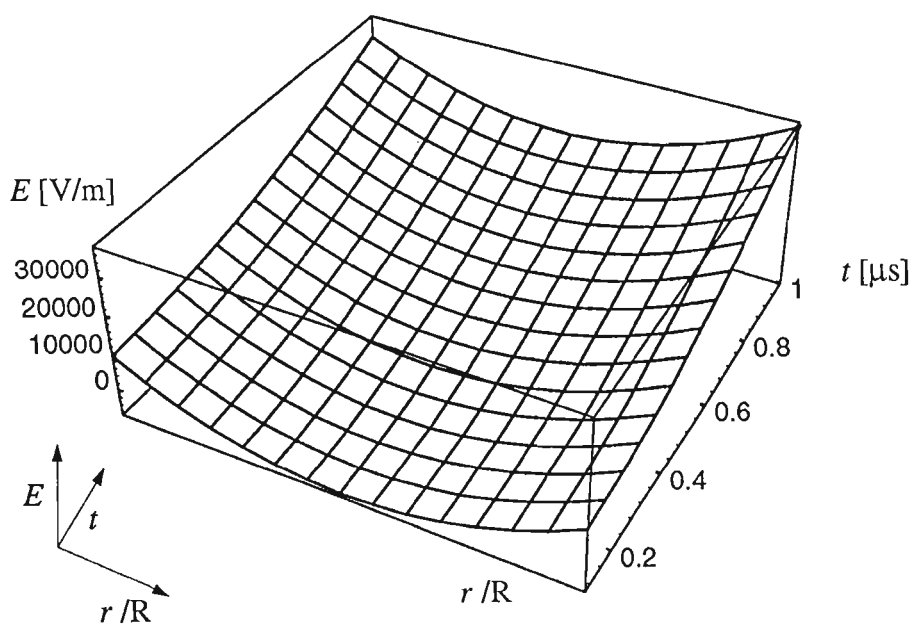
Známe -li z experimentu radiální závislost koncentrace plazmatu v nějaké sadě časových okamžiků (časový vývoj $n(r, t_k)$), a průběh celkové proudové hustoty $j(r, t)$, můžeme dopočítat magnetické pole a tím diamagnetický proud. Vztah (3.5.4) potom může sloužit k výpočtu elektrického pole z polarizačního proudu:

$$E(r, t) = \int_0^t \frac{j(r, t) B(r, t)^2 + 2k_B T B(r, t) \frac{\partial n(r, t)}{\partial t}}{n(r, t) m_i} dt \quad . \quad (3.5.5)$$

Výpočet musí probíhat numericky neboť hodnoty koncentrací známe z experimentu jen v některých časových okamžicích. Tento postup výpočtu elektrického pole byl pro z-pinč na našem pracovišti s úspěchem použit a vyzkoušen v diplomové práci [50]. Výsledek je uveden na obr 3.5.1 a 3.5.2.



Obr. 3.5.1.: Experimentálně zjištěný průběh koncentrací $n(t,r)$ pro z-pinč na FEL [46]



Obr. 3.5.2.: Výsledek numerického výpočtu elektrického pole ze vztahu (3.5.4) [50]

4. MECHANICKÉ MODELY

4.1. Úvod

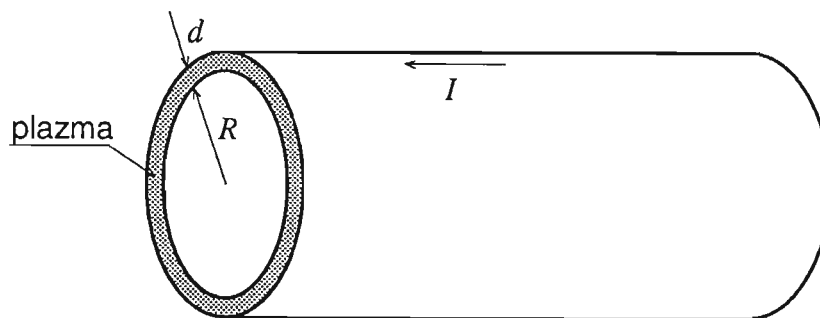
Existuje celá řada relativně jednoduchých modelů z-pinče a podobných zařízení, které jsou, na rozdíl od MHD popisu za pomoci soustavy parciálních diferenciálních rovnic, popisovány obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Tyto modely zpravidla nazýváme mechanické modely.

Řešíme-li například rovnováhu plazmatu, pak v rovnicích nevystupuje časová proměnná. Prostorové proměnné je třeba redukovat na jednu za pomoci předpokladu existence nějakých symetrií řešení - například válcové. Jedinou nezávislou proměnnou je potom radiální vzdálenost od osy symetrie. Cílem modelu je odvodit soustavu diferenciálních rovnic pro funkce $n(r)$, $v(r)$, $p(r)$, $T(r)$ atd. Mezi tyto modely patří například driftový model rovnováhy popsáný v kapitole 3.

Jiným typem úlohy je dynamický model časového vývoje plazmatu. Jedinou závislou proměnnou je čas. Prostorové proměnné jsou eliminovány např. předpokladem, že plazma tvoří kopmaktní útvar (zhustek, cluster), se kterým zacházíme jako s hmotným bodem. Tento postup je výhodný pro řešení urychlování plazmatu v různých zařízeních (kolejnicové a koaxiální urychlovače, plasma launchers, atd.). Stejný postup lze aplikovat i pro gas-puff - tenkou válcovou slupku plazmatu urychlovanou vlastním polem k ose symetrie.

4.2. Doba komprese pro gas puff

Gas puff je název pro z-pinč, který je tvořen dutým válcovým sloupcem plazmatu - viz obr. 4.2.1. Tohoto tvaru lze dosáhnout například napouštěním plynu do aparatury tryskou ve tvaru mezikružít. Tato geometrická konfigurace je relativně snadno teoreticky popsitelná (zejména pro malé tloušťky válcové slupky gas puffu). Korespondence mezi experimentem a teorií může být velmi dobrá. Tak jako v klasickém pinči, prochází válcovým sloupcem proud, který vytváří magnetické pole působící Lorentzovou silou na plazma, které je následně komprimováno k ose. V této práci odvodím jednoduchý model, ze kterého lze snadno odhadnout dobu komprese a vztah mezi některými parametry gas puffu. Základní myšlenky tohoto modelu byly publikovány na 4. *Workshopu 95* pořádaném ČVUT Praha a VUT Brno [48].



Obr. 4.2.1.: Gas puff

Označme: $R(t)$ -poloměr plazmového sloupce; l -délka plazmového sloupce; d -tloušťka plazmového sloupce; m -hmotnost komprimovaného plazmatu. Předpokládáme $d \ll R$. Magnetické pole na povrchu sloupce určíme z Ampérova zákona

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} \quad , \quad (4.2.1)$$

kde $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ je celkový proud procházející plazmatem. Pro hustotu Lorentzovy síly potom platí:

$$f_L = -jB = -\frac{\mu_0}{4 \pi^2} \frac{I^2}{R^2 d} \quad (4.2.2)$$

a celková Lorentzova síla působící na vrstvu je

$$F_L = -\frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{l}{R} I^2 \quad . \quad (4.2.3)$$

Pohybová rovnice $m d^2 R / dt^2 = F_L$ po dosazení za Lorentzovu sílu dá

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{\mu_0 l}{2 \pi m} I_0^2 \sin^2(\omega t) \quad . \quad (4.2.4)$$

Po substituci do bezrozměrných proměnných

$$\tau \equiv \omega t \quad , \quad \rho = \left(\frac{2 \pi m \omega^2}{\mu_0 l I_0^2} \right)^{1/2} R \quad (4.2.5)$$

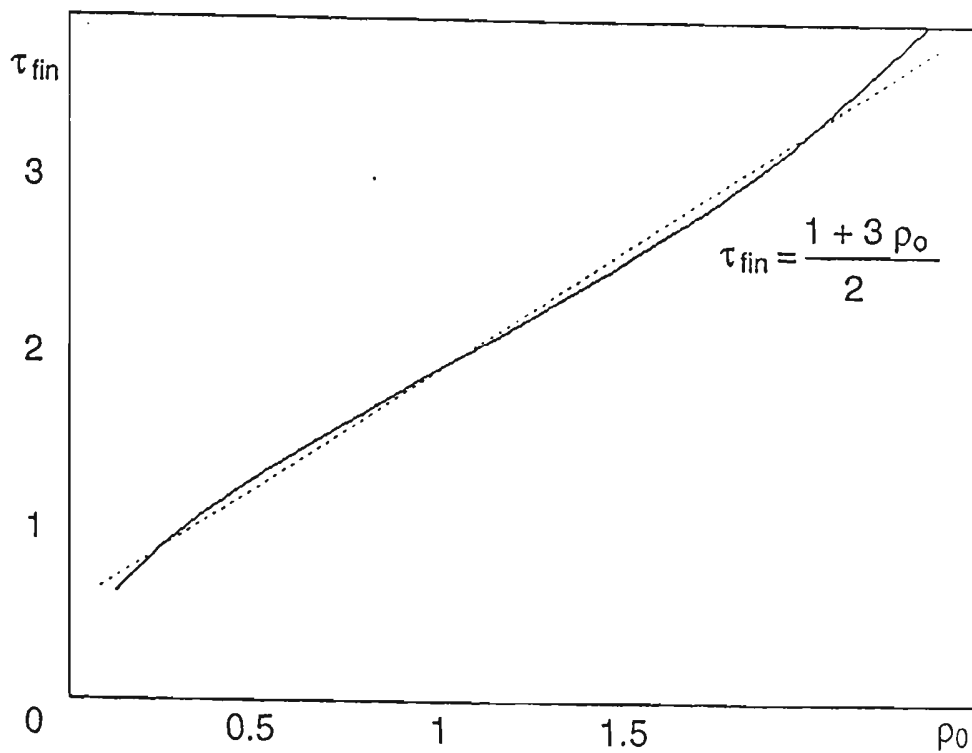
získá pohybová rovnice jednoduchý tvar

$$\rho \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = -\sin^2(\tau) \quad . \quad (4.2.6)$$

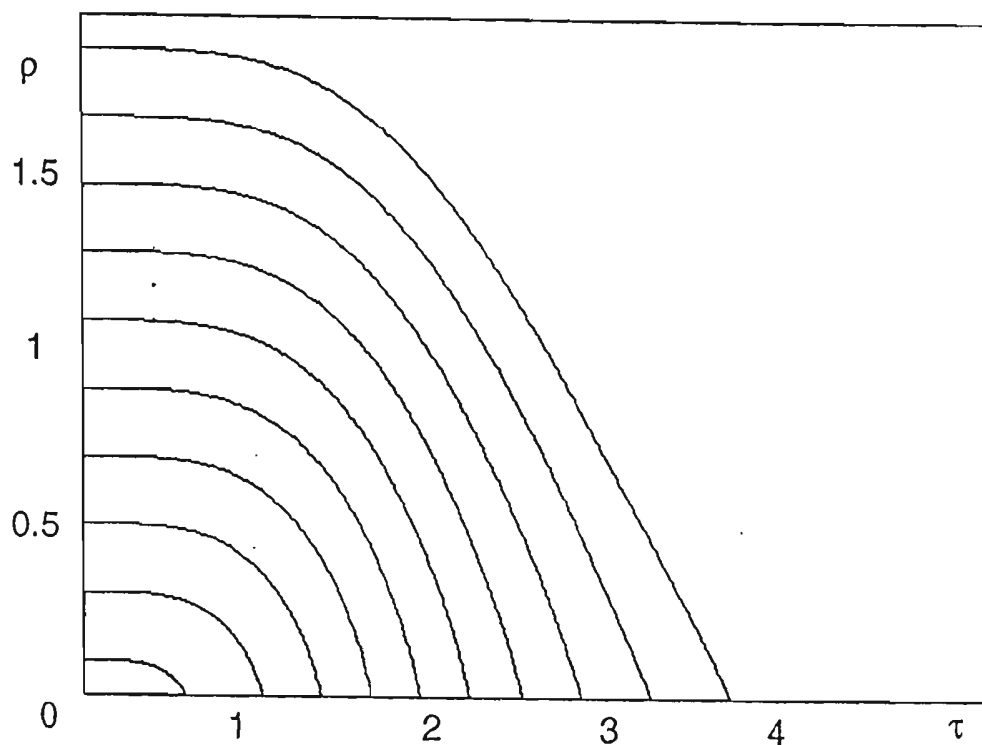
Tuto rovnici s počátečními podmínkami $\rho(0) = \rho_0$ a $d\rho/dt(0) = 0$ jsme řešili numericky metodou Runge Kutta 4. řádu s automaticky proměnným časovým krokem. Na obr. 4.2.2. jsou numericky zjištěné závislosti $\rho(\tau)$ pro různé počáteční poloměry plazmové vrstvy $\rho_0 \in \langle 0.1, 2 \rangle$. Z tohoto grafu zjištěné doby komprese jsou vyneseny na obr 4.2.3. Vidíme, že závislost doby komprese na počátečním poloměru plazmové slupky je v uvedeném intervalu téměř lineární a lze ji s dostatečnou přesností nahradit lineárním vztahem

$$\tau_{fin} \equiv \frac{1 + 3 \rho_0}{2} \quad . \quad (4.2.7)$$

Tato lineární závislost je na obr. 4.2.3. vynesena tečkovaně.



Obr. 4.2.2.: Závislost poloměru plazmové vrstvy na čase.



Obr. 4.2.3. Závislost kompresní doby na počátečním poloměru vrstvy.

Vztah (4.2.7) převedený do rozměrových proměnných

$$2 \omega t_{fin} \equiv 1 + 3 \left(\frac{2\pi m}{\mu_0 l} \right)^{1/2} \frac{\omega R_0}{I_0} \quad (4.2.8)$$

je výsledná relace pro dobu komprese gas puffu. Doba komprese závisí na frekvenci a amplitudě proudu, na lineární hustotě pinče m/l a na počátečním poloměru vrstvy R_0 . Většina pinčových aparatur je konstruována tak, aby k maximu komprese docházelo ve čtvrtině periody proudu, tj. v prvním maximu proudu ($\omega t_{fin} = \pi/2$). Vztah (4.2.8) pro dobu komprese gas puffu potom přejde v relaci

$$I_0^2 = \frac{18 \pi m}{4 \mu_0 l} \omega^2 R_0^2 \quad , \quad (4.2.9)$$

kteřá může být velmi užitečná při návrhu gas puff zařízení, neboť dává do souvislosti základní parametry těchto aparatur: amplitudu a frekvenci proudu, poloměr napouštěcí trysky, rozměry aparatury a hmotnost napouštěného plynu. Odvozené vztahy byly s úspěchem využity pro gas puff zařízení Ústavu fyziky plazmatu ČAV.

4.3. Variační formulace mechanických modelů

Často jsme v situaci, že známe pohybové rovnice ϵ_k problému v nějakých zobecněných souřadnicích q_k a chceme určit Lagrangeovu funkci L tak, aby platilo

$$\epsilon_k \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad . \quad (4.3.1)$$

Tento tzv inverzní variační problém nemusí být vždy řešitelný. E. Tonti ukázal [4], že splňují -li levé strany rovnic ϵ_k podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k} &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k} &= 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} \\ \frac{\partial \epsilon_k}{\partial q_l} - \frac{\partial \epsilon_l}{\partial q_k} &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial \epsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} \right] \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

pro každé k, l , potom jsou rovnice $\epsilon_k = 0$ variační, tj. existuje L a platí

$$L = - \int_0^1 \epsilon_k(t, \tau q_l, \tau \dot{q}_l, \tau \ddot{q}_l) d\tau \quad . \quad (4.3.3)$$

Znaménko minus je zde jen proto, aby pohybové rovnice vyšly ve tvaru (4.3.1). Při opačném znaménku bychom získali rovnice $-\varepsilon_k = 0$. Není-li uvedeno jinak, platí ve všech výrazech Einsteinova sumační konvence.

Nejsou-li splněny postačující Tontiho podmínky variačnosti (4.3.2), je možné hledat funkce f_k tak, aby rovnice $\tilde{\varepsilon}_k \equiv f_k \varepsilon_k = 0$ (přes k se nesčítá) byly variační. V případě, že nevariačnost rovnic způsobují členy lineární v \dot{q}_k

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^* + \alpha_{kl} \dot{q}_l \quad ; \quad \alpha_{kl} = \alpha_{lk} \quad , \quad (4.3.4)$$

probíhají v systému disipační procesy, které lze zahrnout do Rayleighovy disipační funkce

$$R = \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad . \quad (4.3.5)$$

Inversní variační problém lze řešit tak, že najdeme L k rovnicím $\varepsilon_k^* = 0$ a pro systém pak platí následující relace:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{zobecněná hybnost}$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad \text{zobecněná energie}$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad \text{Rayleighova funkce}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^* + \alpha_{kl} \dot{q}_l \quad \text{Lagrangeovy rovnice}$$

$$\varepsilon_k^* = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \quad (4.3.6)$$

$$\frac{dH}{dt} - 2R = 0 \quad \text{disipace energie}$$

$$H + \int_0^t 2R dt = \text{const}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{Hamiltonovy rovnice}$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$$

Tento postup byl s úspěchem vyzkoušen při variační formulaci elektrodynamického modelu kolejnicového urychlovače plazmatu [25,26,27]. Lze ho samozřejmě použít i pro jednoduchý model komprese gas puffu z kapitoly 4.2. Lagrangeova funkce zde vyjde

$$L = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + \ln \rho \sin^2 \tau \quad . \quad (4.3.7)$$

5. MHD MODELY

5.1. Úvod

Relativně dosti přesného popisu plazmatu lze dosáhnout v rámci magnetohydrodynamických rovnic (MHD). Pro účely z-pinče většinou postačí jednotekutinová nerelativistická magnetohydrodynamika založená na těchto předpokladech:

- Plazma se chová jako srážkově dominantní kontinuum, tj. charakteristické rozměry útvarů jsou mnohem větší než střední volná dráha a charakteristické časy sledovaných dějů jsou podstatně delší než střední doba mezi srážkami:

$$\begin{aligned} L &\gg \lambda_{e,i} \\ t &\gg \tau_{e,i} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

- Plazma je kvazineutrální. Prostorová hustota elektrického náboje ρ_e je nulová. Místo rychlostí $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i$ elektronů a iontů je vhodné využít těžišтовую rychlost

$$\mathbf{v} \equiv \frac{m_e \mathbf{v}_e + m_i \mathbf{v}_i}{m_e + m_i} \approx \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_e \quad (5.1.2)$$

a proudovou hustotu

$$\mathbf{j} \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = |e| n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (5.1.3)$$

- Maxwellův posuvný proud je zanedbatelný, tj.

$$\|\mathbf{j}\| \gg \left\| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\| \Rightarrow \sigma E \gg \omega \frac{E}{\epsilon_0} \quad , \text{ tj.} \quad (5.1.4)$$

$$\sigma \epsilon_0 \gg \omega \quad (5.1.5)$$

Tento předpoklad je splněn pro plazma s vysokou vodivostí nebo pro děje s nízkou frekvencí.

- Plazma je nerelativistické, rychlost proudění

$$v \ll c \quad (5.1.6)$$

Ohmův zákon v pohybujícím se prostředí má za tohoto předpokladu tvar

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1.7)$$

Rovnice pro magnetické pole

Ze soustavy Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{5.1.8}$$

doplňených o Ohmův zákon (5.1.7) za předpokladu konstantní vodivosti plyne rovnice pro časový vývoj magnetického pole:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad , \text{ resp.} \tag{5.1.10 a}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad . \tag{5.1.10 b}$$

První člen v (5.1.10 a) je zodpovědný za difúzi magnetického pole plazmatu (difúzní člen), druhý člen souvisí se změnou magnetického pole tím, že magnetické siločivky sledují proudění magnetohydrodynamické tekutiny (člen zamrznání). Podíl členu zamrznání a členu difúze se nazývá Reynoldsovo magnetické číslo

$$R_m \approx \sigma \mu_0 L v \quad . \tag{5.1.11}$$

Vidíme, že pro velkou vodivost plazmatu a velké rychlosti dominuje člen zamrznání; naopak pro málo vodivé plazma a pomalé rychlosti proudění, je jediným zdrojem změny magnetického pole difúze.

Rovnice pro hustotu

Časový vývoj hustoty nebo koncentrace plazmatu je dán rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad , \text{ resp.} \tag{5.1.12 a}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \quad . \tag{5.1.12 b}$$

Rovnice pro rychlost

Rovnici pro časový vývoj rychlosti (resp. hybnosti) snadno získáme zobecněním Navière-Stokesovy rovnice pro přítomnost elektromagnetického pole. V konzervativním tvaru k tenzoru tlaku a k viskoznímu tenzoru přibude Maxwellův tenzor pnutí pro magnetické pole. Elektrická část Maxwellova tenzoru se vzhledem k předpokladům magnetohydrodynamiky zanedbává:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbb{P}} + \vec{\mathbb{T}}^{(M)} + \vec{\mathbb{V}}) = 0 \quad , \quad \text{kde}$$

$$P_{jk} \equiv p \delta_{jk} + \rho v_j v_k \quad ,$$

$$\mathbb{T}_{jk}^{(M)} \equiv p_m \delta_{jk} - \frac{1}{\mu_0} B_j B_k \quad ; \quad p_m \equiv \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ,$$

$$V_{jk} \equiv -\eta \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{jk} \right] - \zeta (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{jk} \quad .$$

Tenzor tlaku (tok hybnosti) obsahuje hydrostatický i dynamický tlak způsobený prouděním. Maxwellův tenzor pnutí je složen z magnetického tlaku a členů souvisejících se zakřivením magnetických siločar. Viskózní tenzor souvisí s přenosem hybnosti viskózními procesy. První část s koeficientem η má nulovou stopu. η , ζ jsou první a druhý viskózní koeficient. Viskózní člen má u obou svých částí záporné znaménko, neboť jde o členy způsobující disipaci energie v systému.

Rozepíšeme-li rovnici (5.1.13 a) do nekonzervativního tvaru, máme

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\text{div } \mathbf{v}) . \quad (5.1.13 \text{ b})$$

Silové členy na pravé straně postupně jsou: minus gradient tlaku, hustota Lorentzovy síly, 1. člen difúze, 2. člen difúze (je nenulový jen pro stlačitelnou tekutinu).

Soustavu MHD rovnic je možné uzavřít v tomto místě vhodnou stavovou rovnicí, např.

$$\bullet \rho = \text{const} \quad (\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0)$$

(nestlačitelné uzavření)

$$\bullet p \rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \gamma p \text{div } \mathbf{v} = 0)$$

(adiabatické, polytropní uzavření)

$$\bullet p \delta_{jk} \rightarrow p_{jk} = p_{\perp} \delta_{jk} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_j B_k}{B^2}$$

(CGL - Chew, Goldberg, Low - uzavření zohledňující anisotropii plazmatu).

V soustavě MHD rovnic je také možné pokračovat další rovnicí pro časový vývoj teploty (tlaku nebo vnitřní energie - tyto veličiny jsou vzájemně převeditelné) a tuto rovnici uzavřít vztahem pro tepelný tok. Obecně při odvozování rovnic kontinua z Boltzmannovy statistické rovnice postupujeme středováním přes momenty rychlosti. Každé středování dá vzniknout jedné parciální diferenciální rovnici a jedné nové veličině,

pro kterou je buď třeba odvodit další rovnici středováním přes vyšší moment nebo soustavu uzavřít nějakou algebraickou relací:

moment	rovnice pro	nová veličina	uzavření
v^0	hustotu	rychlost	—
v^1	rychlost (hybnost)	tlak	stavová rovnice
v^2	tlak (teplotu, vnitřní energii)	tepelný tok	vztah pro tepelný tok
v^3	tepelný tok (entropii)	tok entropie	vztah pro tok entropie

5.2. Numerická schemata

Každý MHD model je nutné doplnit počátečními a okrajovými podmínkami. Pro z-pinč můžeme předpokládat, že v počátečním čase je již vytvořen sloupec plazmatu s danou koncentrací iontů a elektronů. V případě sinusového průběhu proudu je magnetické pole i proudová hustota na počátku nulová. Takto formulované počáteční podmínky jsou zjevně nekonzistentní - předpokládáme, že plazma je již vytvořeno v okamžiku, kdy ještě neteče proud. Samotné formování výbojového kanálu je však natolik složitá záležitost, že tuto nekonzistenci počátečních podmínek ponecháváme. Okrajové podmínky jsou dány tvarem elektrod, vnějším tlakem, uvážením ionizující rázové vlny, atd.

Do výchozí sady MHD rovnic je možné zahrnout různé další jevy, jako je ionizace, vyzářování, Ohmický ohřev plazmatu. Rovnice řešíme numericky metodou sítí nebo konečných prvků. Autor vyzkoušel různé síťové metody [29,30,33,46,47]. Soustava parciálních rovnic se převede na diferenční rovnice na časoprostorové síti. Soustava diferenčních rovnic je algebraická a lze ji řešit standardními metodami. Síť je možné volit v Eulerových souřadnicích (pevných v prostoru) nebo v Lagrangeových souřadnicích (pohybujících se s plazmatem). Příslušná diferenční schemata mohou být explicitní nebo implicitní [18,21,22]. V explicitním schematu počítáme neznámé hodnoty v novém

časovém okamžiku t_{n+1} rekurentně ze známých hodnot v čase t_n . Jmenujme například Lax-Wendrofovo schema pro rovnice v konzervativním tvaru, které je dvoukrokové a co do přesnosti jde o metodu druhého řádu [56,62,63]. Výhodou explicitních schemat je relativně rychlý výpočet, malá potřeba řešit velké soustavy algebraických rovnic. Zásadní nevýhodou jsou však problémy stability těchto schemat. Přibližně lze říci, že explicitní schema má “značnou naději” být stabilní, je-li rychlost šíření informace diferenčním řešením $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2} / \Delta t$ větší než kterákoliv rychlost vyskytující se v popisovaném ději (Courant-Fridrichs-Lewy podmínka [62,69]). V plazmatu jde především o rychlost prostředí v , rychlost zvuku v_c a Alfvénovu rychlost v_A . Tato podmínka je obtížně splnitelná v oblastech blízkých k hranici, kde hustota plazmatu klesá k nule a Alfvénova rychlost diverguje. Oblasti s hustotou menší než určitá mez je potom nutno považovat za vakuum. Stabilitu diferenčního schematu lze vylepšit dodáním umělých viskózních členů do rovnic nebo jinými umělými obraty [56]. Stabilitu lze však zaručit jen v nejjednodušších případech. V reálně používaných rovnicích s celou řadou komplikovaných členů stabilitu schematu zaručit nemůžeme. Často se tak stane, že pro některé parametry schema dává “rozumné” výsledky a pro jinou oblast parametrů schema nekonverguje a je nestabilní. Vlastnosti diferenčních schemat jsou také velmi silně závislé na okrajových podmínkách.

Implicitní schemata používají k výpočtu hodnot veličin v čase t_{n+1} jak hodnot z předchozího časového kroku t_n , tak hodnot v čase t_{n+1} . To vede k rozsáhlým soustavám algebraických rovnic, jejichž řešení je časově i paměťově náročné. Implicitní schemata bývají stabilní pro mnohem větší okruh parametrů než explicitní. Pro některé vyjimečné typy rovnic jsou dokonce bezpodmínečně stabilní, tj. nezávisí na volbě kroků sítě Δt a Δx .

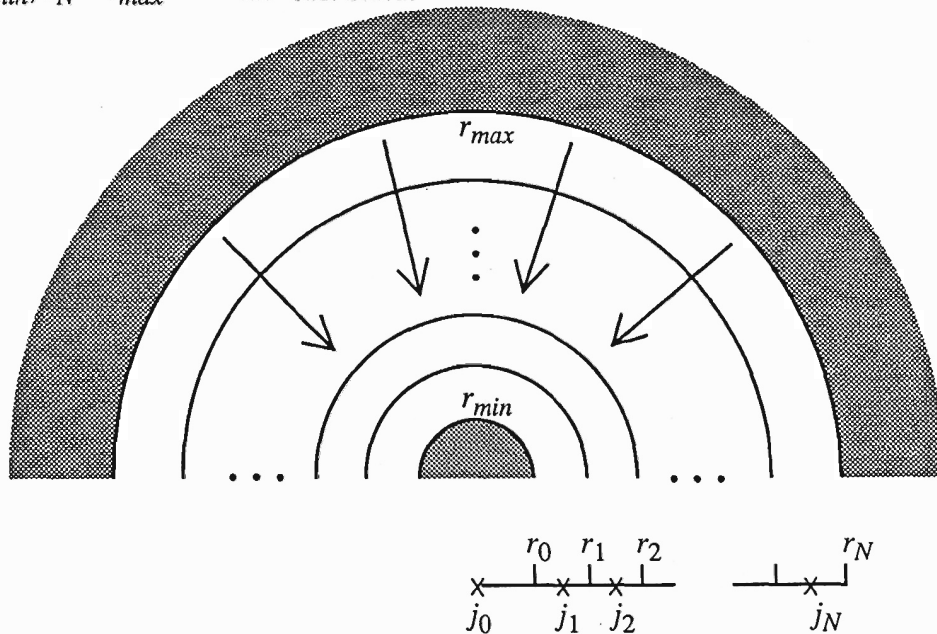
Při práci na katedře fyziky jsme odzkoušeli několik diferenčních schemat pro popis urychlování plazmatu v kolejnicovém urychlovači a pro z-pinč. Pro všechny výpočty jsou charakteristické značné nároky na paměť a rychlost počítače. V následující kapitole popíši jednoduché diferenční schema pro řešení komprese z-pinče, které přes svou jednoduchost má mimořádně stabilní chování, je pseudoexplicitní a využívá Lagrangeovy souřadnice.

5.3. Jednoduchý MHD model komprese z-pinče

V tomto odstavci popíši jednoduchý MHD model radiálního přenosu hmoty v z-pinči z oblasti vnější hranice pinče na hranici centrální oblasti, tedy pro $r \in (r_{max}, r_{min})$. V oblasti $r \in (0, r_{min})$ je centrální vláknitá struktura, ve které dochází

k transformaci radiální kinetické energie v axiální a k tvorbě jetů [41]. Mechanismus transformace není přesně znám, podstatnou roli pravděpodobně bude mít α efekt [45].

Sledovanou oblast nahradíme prostorovou sítí $\{r_k\} = \{r_0, r_1, \dots, r_N\}$, kde $r_0 = r_{min}, r_N = r_{max}$ - viz obr. 5.3.1.



Obr. 5.3.1.: Lagrangeova síť souřadnic (pásy)

Na počátku výpočtu může být tato síť pravidelná. V uzlových bodech sítě budou lokalizovány proměnné r_k, v_k, B_k - radiální souřadnice, rychlost, magnetické pole. Ve středech jednotlivých mezikruží budou lokalizovány proměnné j_k, n_k, T_k - proudová hustota, koncentrace, teplota.

Prostorovou diskretizaci označujeme indexem vpravo dole, časovou diskretizaci vpravo nahoře:

$$a_k^n = a(t_n, r_k) \quad (5.3.1)$$

Popišme nyní výpočet proměnných $r_k^{n+1}, v_k^{n+1}, B_k^{n+1}, j_k^{n+1}, n_k^{n+1}, T_k^{n+1}$ ze známých hodnot v předchozím čase $r_k^n, v_k^n, B_k^n, j_k^n, n_k^n, T_k^n$.

A : rychlost

Při výpočtu rychlosti vyjdeme z rovnice

$$\rho \frac{dv}{dt} = -jB - \frac{\partial p}{\partial r} \quad ; \quad \begin{aligned} p &= nk_B T \quad , \\ \rho &\equiv nm_i = nm \quad , \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

kteřá má dva silové členy - hustotu Lorentzovy síly a gradient tlaku. Hmotnost iontů označíme m , aby nedošlo k záměně s indexem sítě. Příslušný explicitní diferenční analog bude

$$m \frac{n_{k+1}^n + n_k^n}{2} \cdot \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} = - \frac{j_{k+1}^n + j_k^n}{2} B_k^n - k_B \frac{n_{k+1}^n T_{k+1}^n - n_k^n T_k^n}{(r_{k+1}^n - r_{k-1}^n)/2} \quad (5.3.3)$$

Při návrhu jsme využili lokalizaci jednotlivých proměnných (buď r , v , B na hranicích pásů nebo j , n , T v centru pásů). Z (5.3.3) snadno dopočteme hledanou rychlost v novém čase:

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \frac{2\Delta t}{m(n_{k+1}^n + n_k^n)} \cdot \left[- \frac{j_{k+1}^n + j_k^n}{2} B_k^n - 2k_B \frac{n_{k+1}^n T_{k+1}^n - n_k^n T_k^n}{(r_{k+1}^n - r_{k-1}^n)} \right] \quad (5.3.4)$$

Na vnější hranici oblasti určíme rychlost z předpisu

$$v_N^{n+1} = v_N^n + \frac{\Delta t}{m(n_N)} \cdot \left[- j_N^n B_N^n - \frac{2(p_{out} - n_N^n k_B T_N^n)}{(r_N^n - r_{N-1}^n)} \right] \quad , \quad (5.3.5)$$

kde p_{out} je tlak vně plazmového sloupce.

B : radiální souřadnice

Časový vývoj uzlů Lagrangeovy sítě určíme z rovnice $dr/dt = v$. Diferenčním analogem je

$$\frac{r_k^{n+1} - r_k^n}{\Delta t} = v_k^{n+1} \quad , \quad (5.3.6)$$

ze kterého určíme

$$r_k^{n+1} = r_k^n + v_k^{n+1} \Delta t \quad . \quad (5.3.7)$$

Toto schema je zdánlivě implicitní, neboť využívá hodnot rychlostí v časovém kroku t_{n+1} . Tyto rychlosti jsou však již určeny z kroku A. Při použití hodnoty v_k^n na pravé straně celé diferenční schema pro značné oblasti parametrů osciluje a je nestabilní.

C : koncentrace

Počet částic v jednom určitém pásu Lagrangeovy sítě je konstantní. Lagrangeova síť se deformuje (bod B) transportem plazmatu směrem k ose a tím dochází ke změně koncentrace. Rovnici kontinuity lze vyjádřit tak, že součin koncentrace a plochy daného pásu je konstantní. Diferenční analog je

$$n_k^{n+1} \pi [(r_k^{n+1})^2 - (r_{k-1}^{n+1})^2] = n_k^n \pi [(r_k^n)^2 - (r_{k-1}^n)^2] \quad , \quad (5.3.8)$$

odkud máme

$$n_k^{n+1} = n_k^n \frac{(r_k^n)^2 - (r_{k-1}^n)^2}{(r_k^{n+1})^2 - (r_{k-1}^{n+1})^2} . \quad (5.3.9)$$

D : teplota

V daném stavu modelu považujeme teplotu v celé oblasti za konstantní.

E : proudová hustota

Předpokládáme, že z experimentu je znám průběh celkového proudu $I(t)$ procházejícího pinčem - například sinusový či konstantní. Proudová hustota je rozdělena v jednotlivých pásech Lagrangeových souřadnic úměrně Spitzerově vodivosti plazmatu, tj. $T_k^{3/2}$, tak aby celkový proud tekoucí pinčem dal hodnotu $I(t)$. V současném stavu modelu, kdy je teplota konstantní to znamená, že proudová hustota je v celé prostorové oblasti pinče stejná (Spitzerovská závislost vodivosti na koncentraci plazmatu je minimální):

$$j_k^n = \frac{I(t_n)}{\pi r_{max}^2} , \quad k = 0, \dots, N . \quad (5.3.9)$$

Připomeňme, že ze zavedené lokalizace proměnných plyne, že j_0 je proudová hustota tekoucí centrální oblastí.

F : magnetické pole

Magnetické pole snadno určíme z Ampérova zákona

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (5.3.10)$$

jako

$$B(r) = \frac{\mu_0 \tilde{I}(r)}{2\pi r} , \quad (5.3.11)$$

kde $\tilde{I}(r)$ je celkový proud tekoucí oblastí $(0, r)$. Příslušný diferenční vztah potom je

$$B_k^{n+1} = \frac{\mu_0}{2r_k^{n+1}} \cdot \left[j_0^{n+1} (r_0^{n+1})^2 + \sum_{l=1}^k j_l^{n+1} \left((r_l^{n+1})^2 - (r_{l-1}^{n+1})^2 \right) \right] . \quad (5.3.12)$$

5.4. Výsledky výpočtů

MHD model komprese z-pinče z kapitoly 5.3. byl pro různé situace testován za pomoci programu v jazyku TurboPascal 6. V programu je možné volit následující alternativy:

počáteční průběh koncentrace:

- a) bennetovský - koncentraci zadáváme na vnitřní hranici r_{min} a vnější hranici r_{max} . V počátečním čase je mezi hodnotami $n(t_0, r_{min})$ a $n(t_0, r_{max})$ volen bennetovský průběh koncentrace.
- b) lineární - koncentraci zadáváme na vnitřní hranici r_{min} a vnější hranici r_{max} . V počátečním čase je mezi hodnotami $n(t_0, r_{min})$ a $n(t_0, r_{max})$ volen lineární průběh koncentrace.

průběh proudu:

- a) sinusový - celkový proud procházející plazmatem má sinusový průběh.
- b) konstantní - celkový proud procházející plazmatem je konstantní.

magnetické pole:

- a) z Ampérova zákona - magnetické pole je počítáno v souladu s Ampérovým zákonem
- b) konstantní - magnetické pole je v daném časovém okamžiku v celém objemu pinče prostorově konstantní.

proudová hustota:

- a) spitzerovská - proudová hustota je určována ze Spitzerova vztahu pro vodivost.
- b) konstantní - proudová hustota je v daném časovém okamžiku v celém objemu pinče prostorově konstantní.

vnitřní hranice:

- a) fixní - hmota, která se dostane do oblasti $r < r_{min}$ je přidána do této oblasti, počet pásů Lagrangeových souřadnic se radiální kompresí postupně zmenšuje.
- b) pohyblivá - sledujeme i hodnoty $r_k < r_{min}$ Lagrangeových souřadnic.

vnější hranice:

Na vnější hranici je možné zadat podíl tlaku vně a uvnitř pinče.

V konkrétním výpočtu pak ještě zadáme časový a prostorový krok sítě, požadovanou přesnost výpočtu, amplitudu a frekvenci proudu, teplotu plazmatu, hmotnost iontů, rozsahy os pro vykreslování, atd.

Na obr. 5.4.1, 5.4.2, a 5.4.3 jsou ukázány výsledky některých testů a výpočtů:

Bennetova rovnováha (obr. 5.4.1). Na obr 5.4.1. je zobrazen pinč v blízkosti rovnováhy s parametry: $r_{min} = 4$ mm, $r_{max} = 1$ cm; $I_{max} = 41$ kA, $T = 30000$ K, $p_{out} / p_{in} = 1$. Počáteční průběh koncentrace je bennetovský, koncentrace na vnitřní hranici 8×10^{23} m⁻³, na vnější hranici 3×10^{23} m⁻³. Celkový proud je v čase konstantní. Časový krok byl volen 5×10^{-9} s, prostorová síť měla 25 kroků. Na obrázku je znázorněn průběh radiální rychlosti, koncentrace a magnetického pole pro časové okamžiky 0.005 μs, 0.5 μs, 1 μs, 2 μs. Svislé čárky na spodní hraně obrázku znázorňují prostorovou síť, tedy radiální souřadnici.

Z grafů je zřejmé, že po celou dobu výpočtu je radiální rychlost přibližně nulová, průběh koncentrace zůstává bennetovský a magnetické pole lineárně roste se vzdáleností od centra pinče. Lorentzova síla je v rovnováze s gradientem tlaku plazmatu a pinč se výrazně nevyvíjí.

Oscilace pinče (obr. 5.4.2). Na obr. 5.4.2. je zobrazen pinč v s parametry: $r_{min} = 4$ mm, $r_{max} = 1$ cm; $I_{max} = 20$ kA, $T = 30000$ K, $p_{out} / p_{in} = 1$. Počáteční průběh koncentrace je lineární, koncentrace na vnitřní hranici 7×10^{23} m⁻³, na vnější hranici 3×10^{23} m⁻³. Celkový proud je v čase konstantní. Časový krok byl volen 5×10^{-9} s, prostorová síť měla 25 kroků. Na obrázku je znázorněn průběh radiální rychlosti, koncentrace a magnetického pole pro časové okamžiky 0.005 μs, 1.7 μs, 2.65 μs, 5.3 μs.

Proud tekoucí pinčem nepostačuje k úplné kompresi pinče. Počáteční průběh koncentrace vytváří tlakovou sílu směrem vně pinče, pinč zvětšuje své rozměry. V čase 1.7 μs je radiální rychlost všech vrstev pinče kladná, koncentrace plazmatu je však již konstantní, tj. $\text{grad } p = 0$ a jedinou silou je Lorentzova síla. Expanze pinče začíná být v tomto okamžiku brzděna. V čase 2.65 μs je rychlost pinče nulová, gradient koncentrace má opačný směr - koncentrace vnějších vrstev je vyšší než vnitřních. Nastává komprese pinče. V čase 5.3 μs má pinč přibližně stejné parametry jako na počátku - nulovou rychlost, lineární pokles koncentrace od středu směrem ven a lineární závislost magnetického pole.

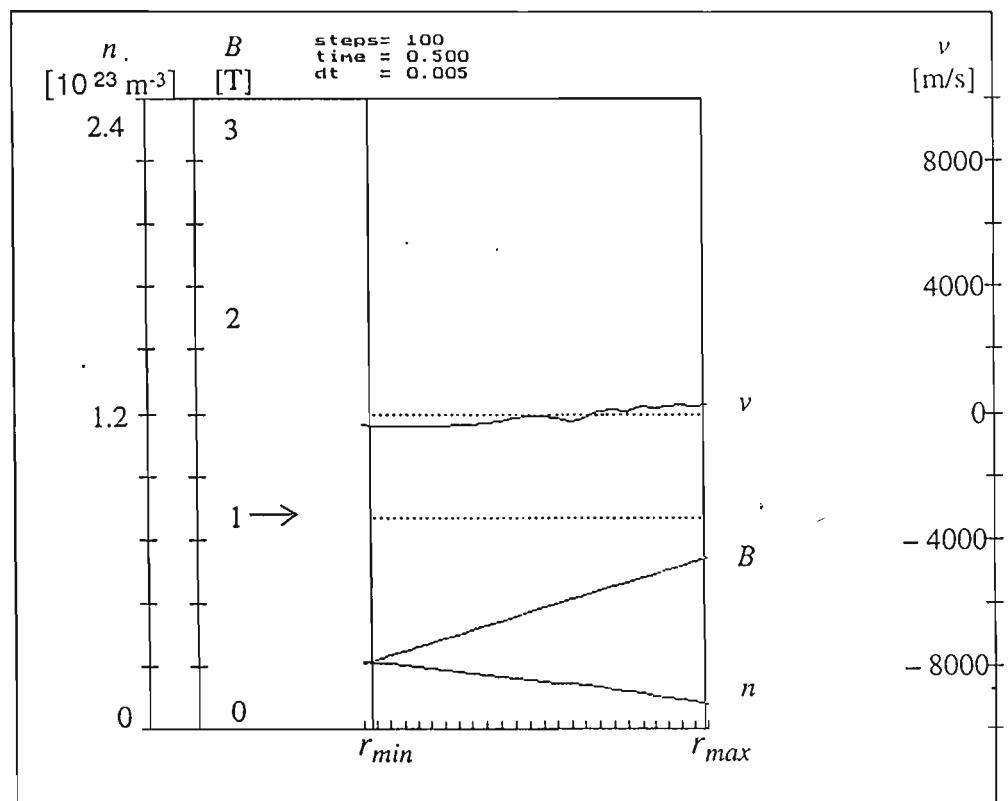
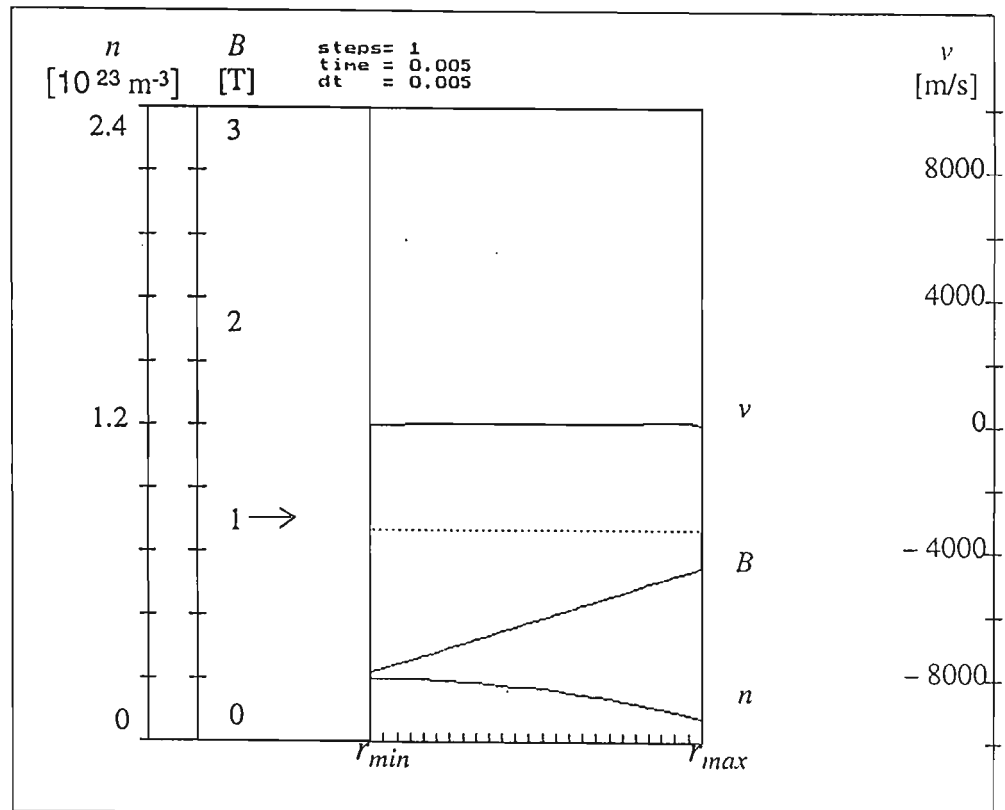
Komprese pinče (obr. 5.4.3). Na obr. 5.4.3. je zobrazen pinč s parametry pinče v laboratoři FEL ČVUT: $r_{min} = 4$ mm, $r_{max} = 1$ cm; $I_{max} = 50$ kA, $T = 30000$ K, $p_{out} / p_{in} = 0.9$. Počáteční průběh koncentrace je lineární, koncentrace na vnitřní hranici 5×10^{23} m⁻³, na vnější hranici 5×10^{23} m⁻³. Celkový proud má sinusový průběh v čase s periodou 4 μs. Časový krok byl volen 5×10^{-9} s, prostorová síť měla 25 kroků. Na obrázku je znázorněn průběh radiální rychlosti, koncentrace a

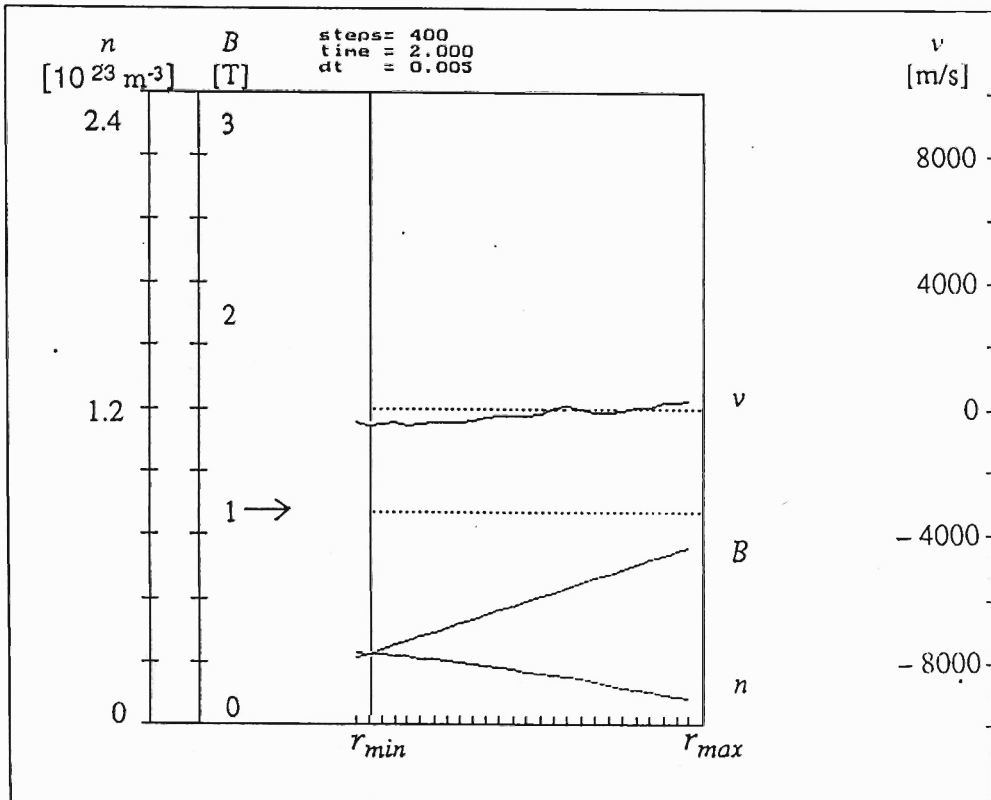
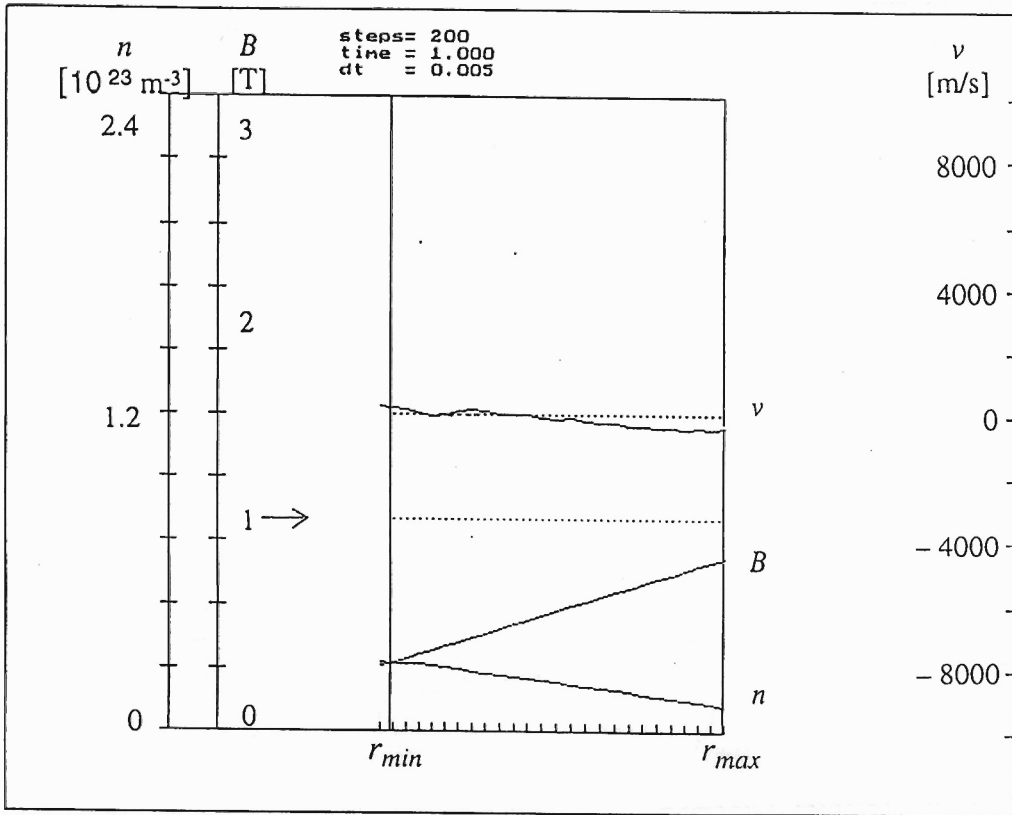
magnetického pole pro časové okamžiky $0.005 \mu\text{s}$, $0.25 \mu\text{s}$, $0.50 \mu\text{s}$, $0.75 \mu\text{s}$, $1 \mu\text{s}$, $1.5 \mu\text{s}$.

Na šestici obrázků je znázorněn postupný kolaps pinče k centrální oblasti. Díky poměru tlaků p_{out} / p_{in} na vnější hranici (0.9) dochází k částečné expanzi vnější hranice pinče (viz graf v čase $0.25 \mu\text{s}$) - v blízkosti vnější hranice je radiální rychlost kladná, dochází k slabému poklesu koncentrace.

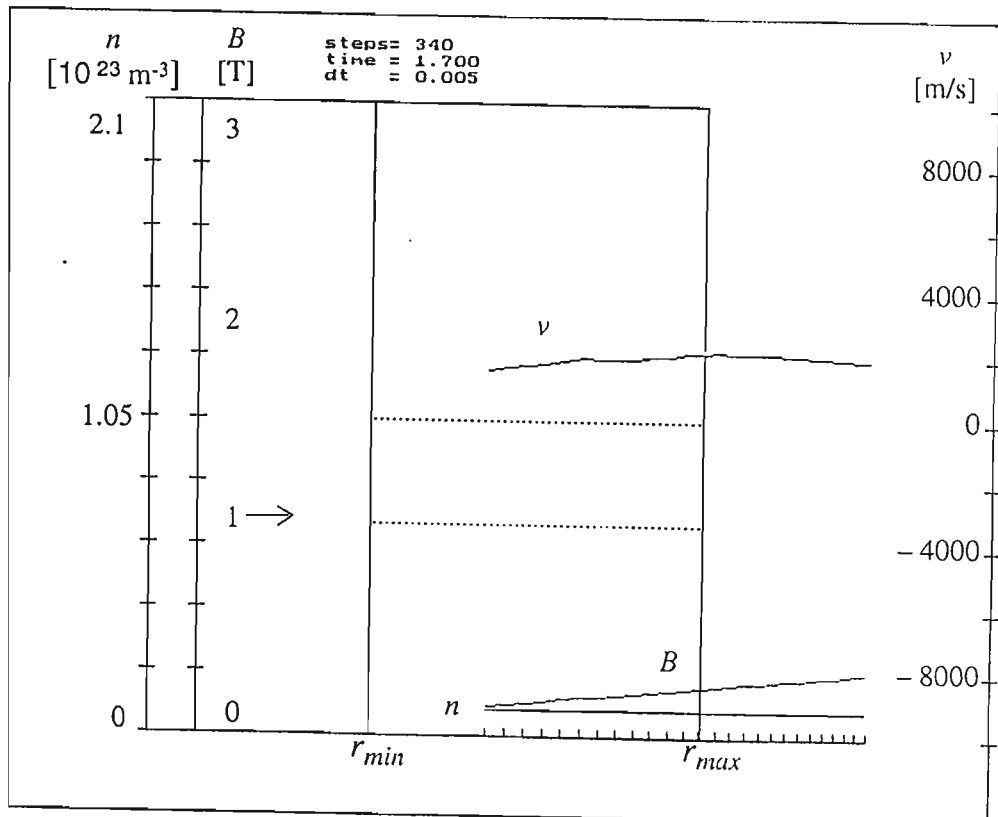
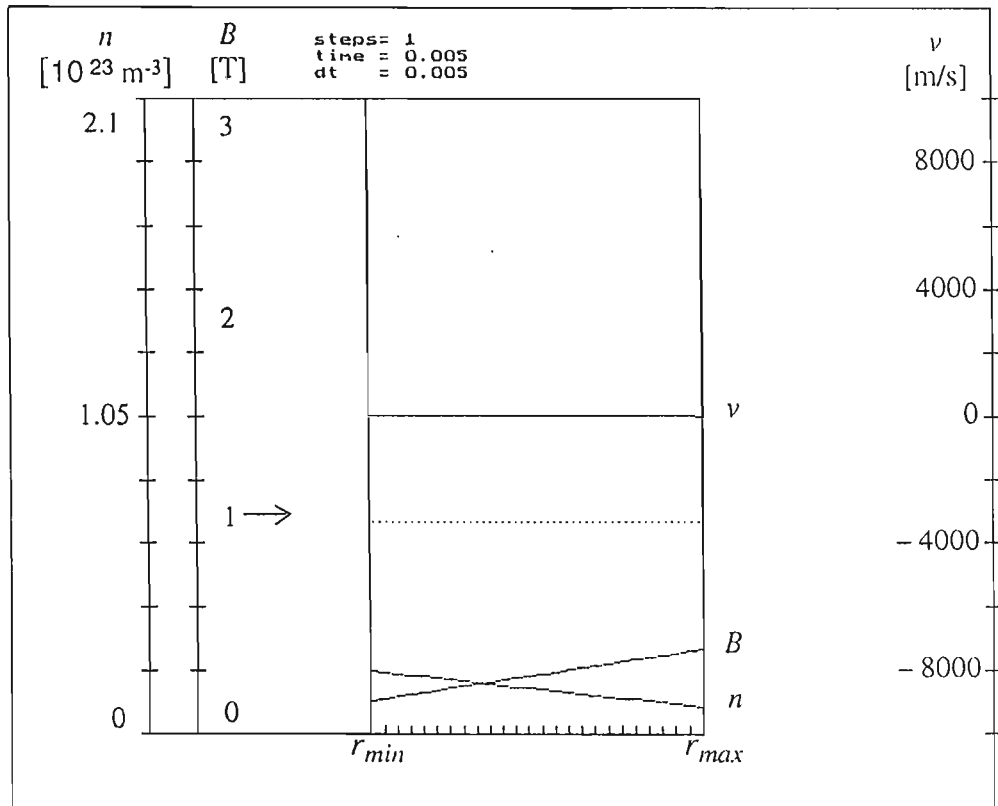
V časech pozdějších již převládá Lorentzova síla - proud postupně sinusově narůstá. V čase $0.5 \mu\text{s}$ je radiální rychlost všech vrstev záporná, začíná komprese plazmatu k ose, která kulminuje v časech mezi $1 \div 1.5 \mu\text{s}$. Hodnoty rychlostí na grafech pro $r < r_{min}$ jsou víceméně fiktivní, neboť jde již o plazma v centrální oblasti, kde dochází k transformaci radiální kinetické energie v axiální. Radiální rychlost transportované hmoty na hranici centrální oblasti r_{min} činí v čase $1.5 \mu\text{s}$ asi $-0.8 \times 10^3 \text{ m/s}$.

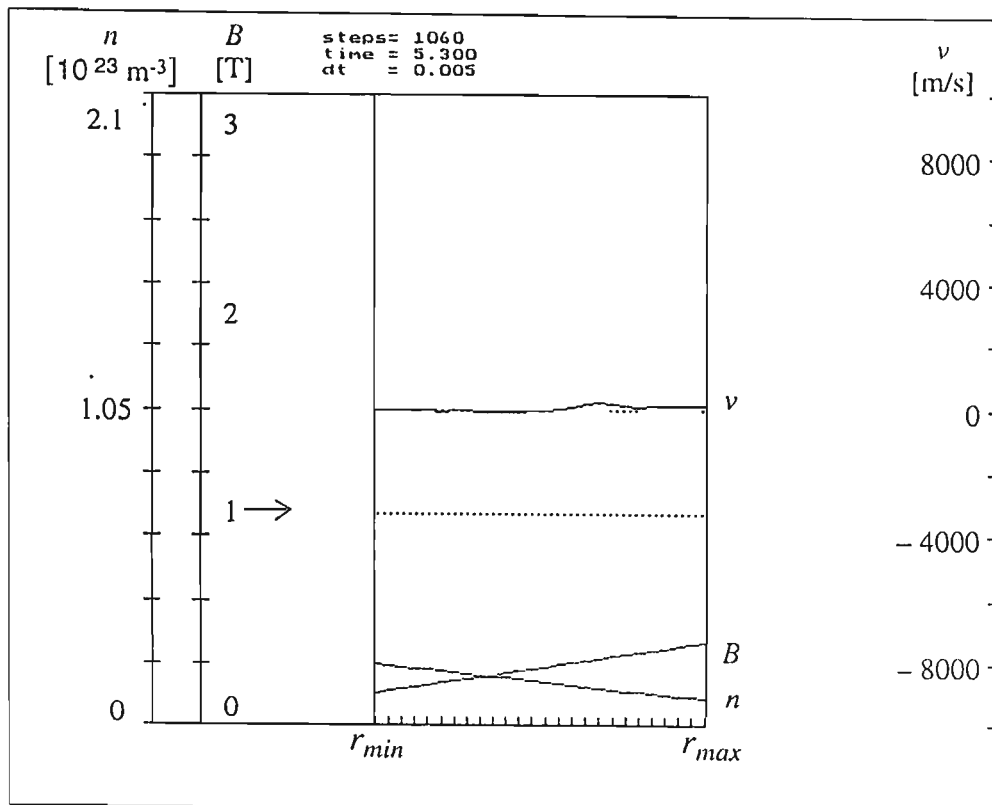
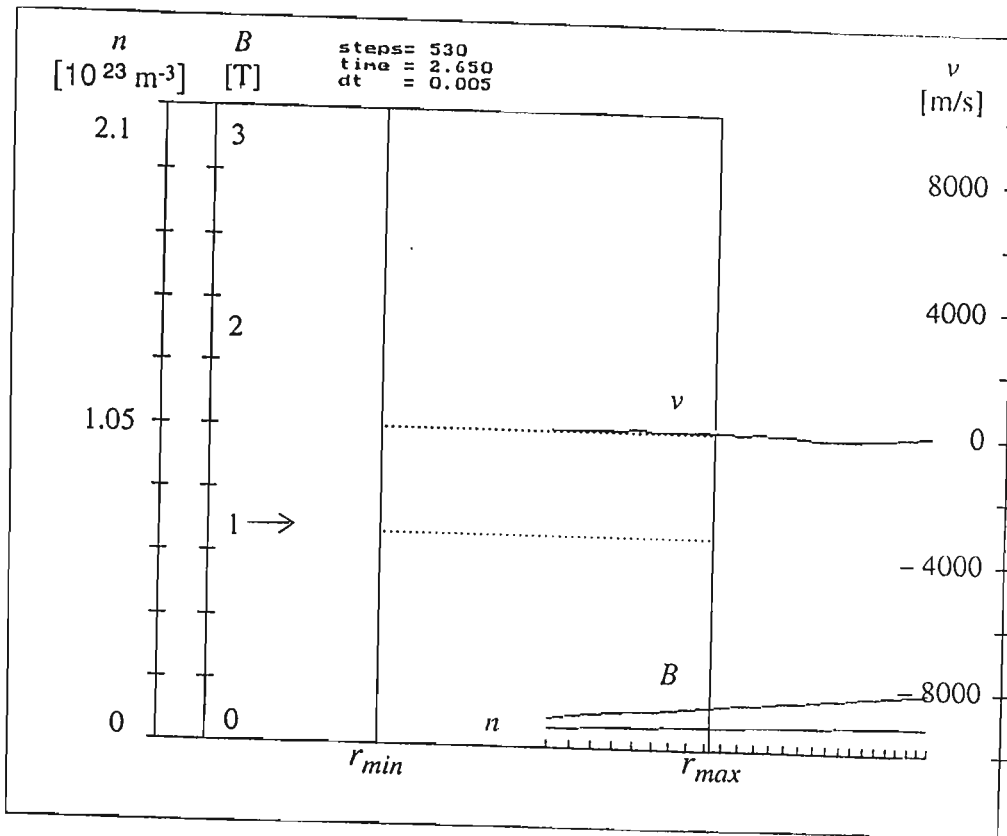
Model byl dále testován pro parametry aparatury v polském Swierku. V průběhu všech testů a výpočtů byly zaznamenány oscilace diferenčního schematu jen ve dvou případech - při použití explicitního tvaru schematu (5.3.7), tj. rychlost v_k^n místo v_k^{n+1} a při výrazném skoku tlaků na hranici pinče a okolí.



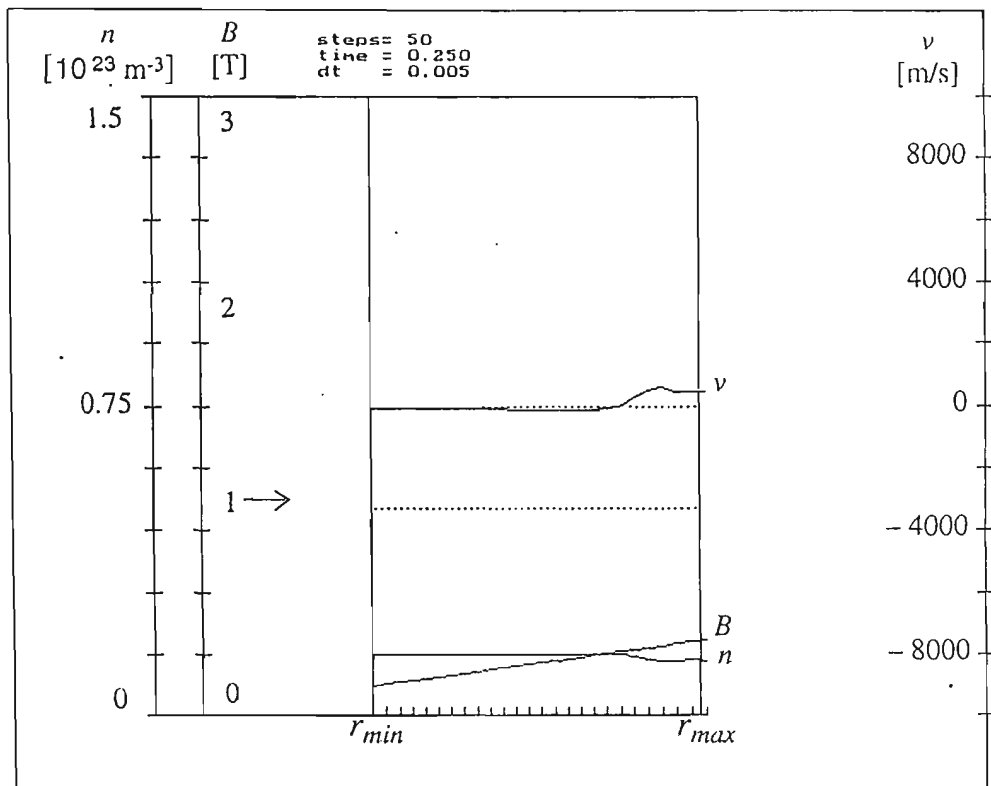
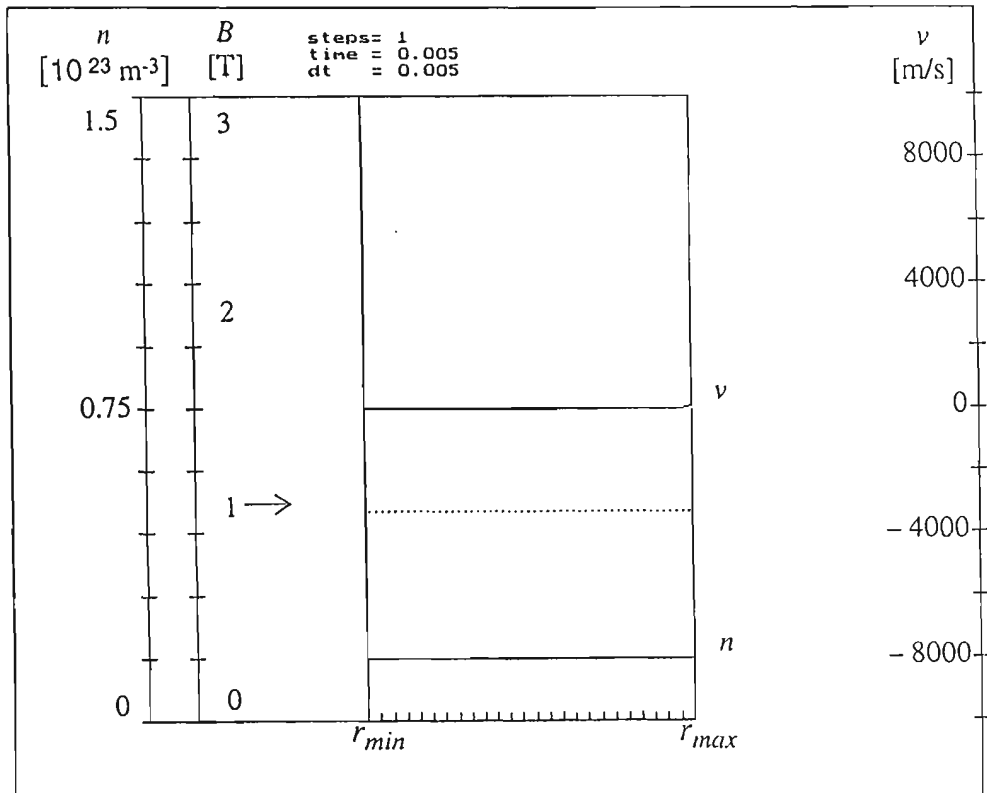


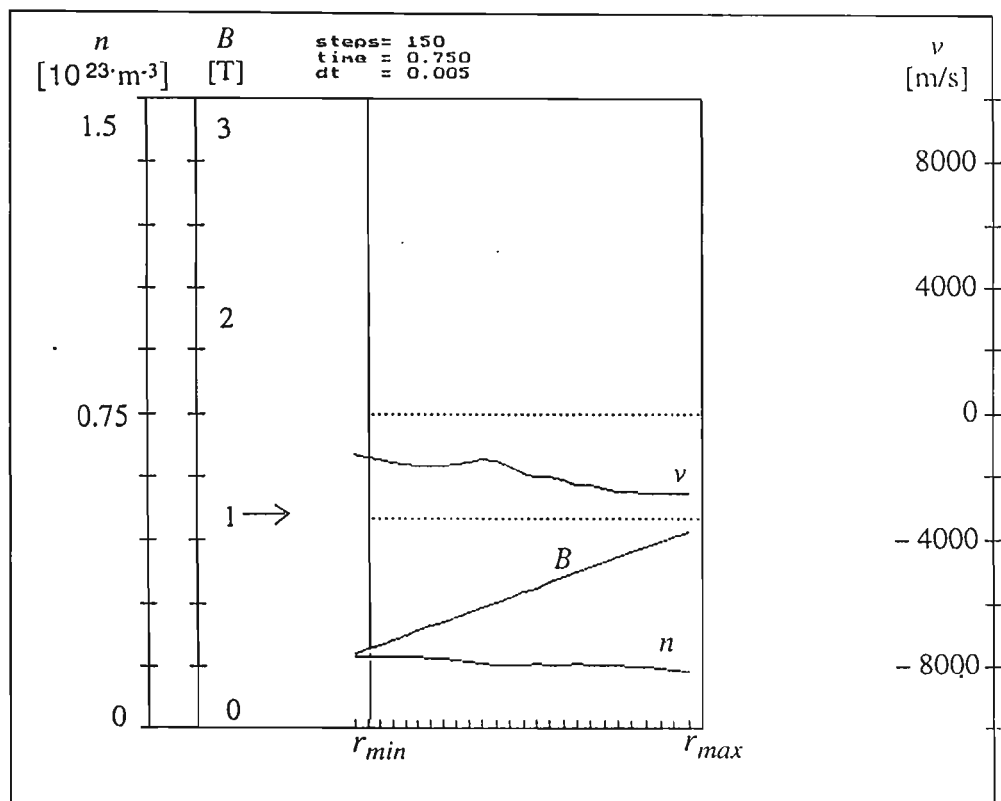
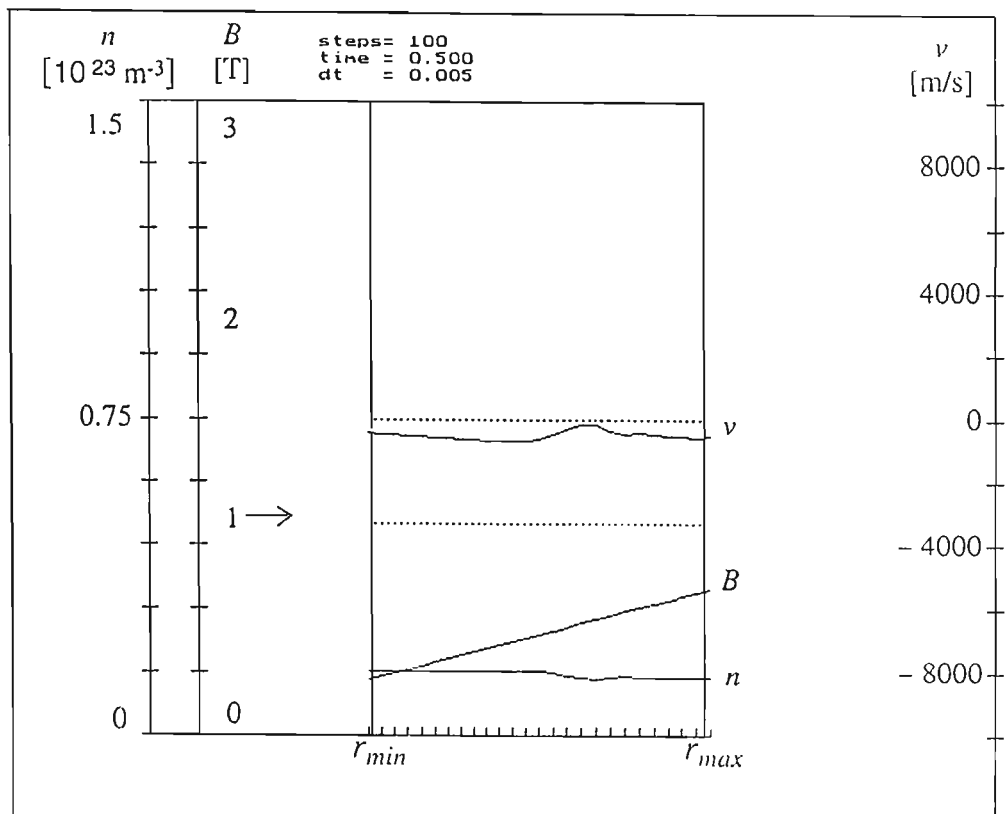
Obr. 5.4.1.: Bennetova rovnováha

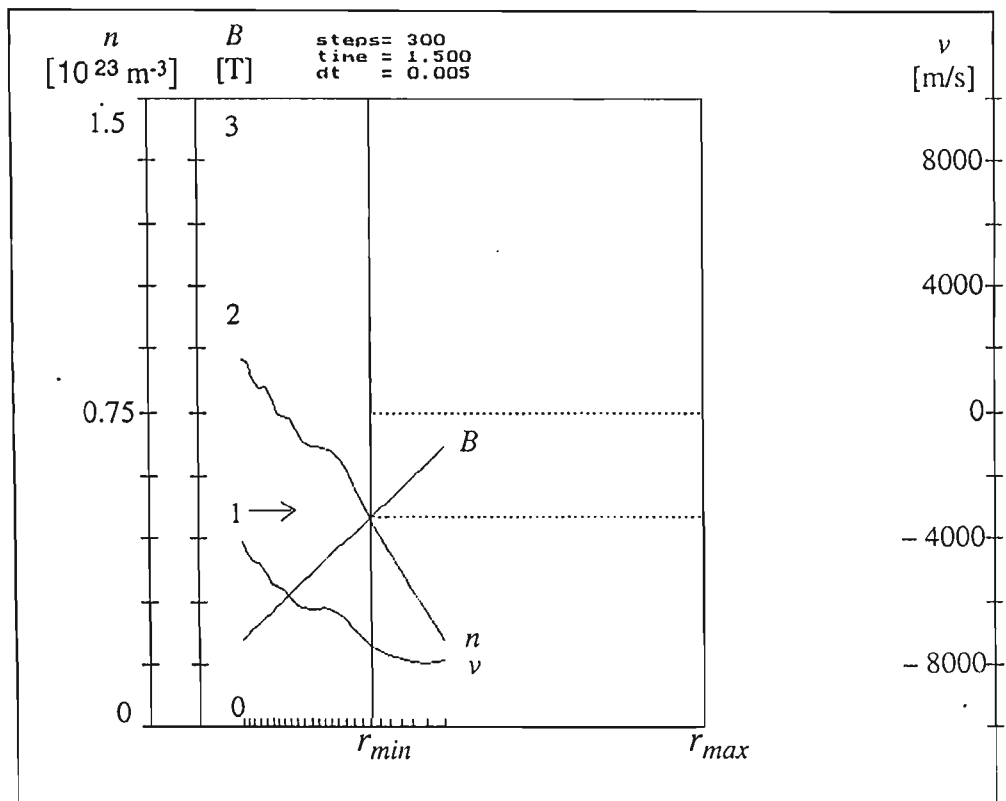
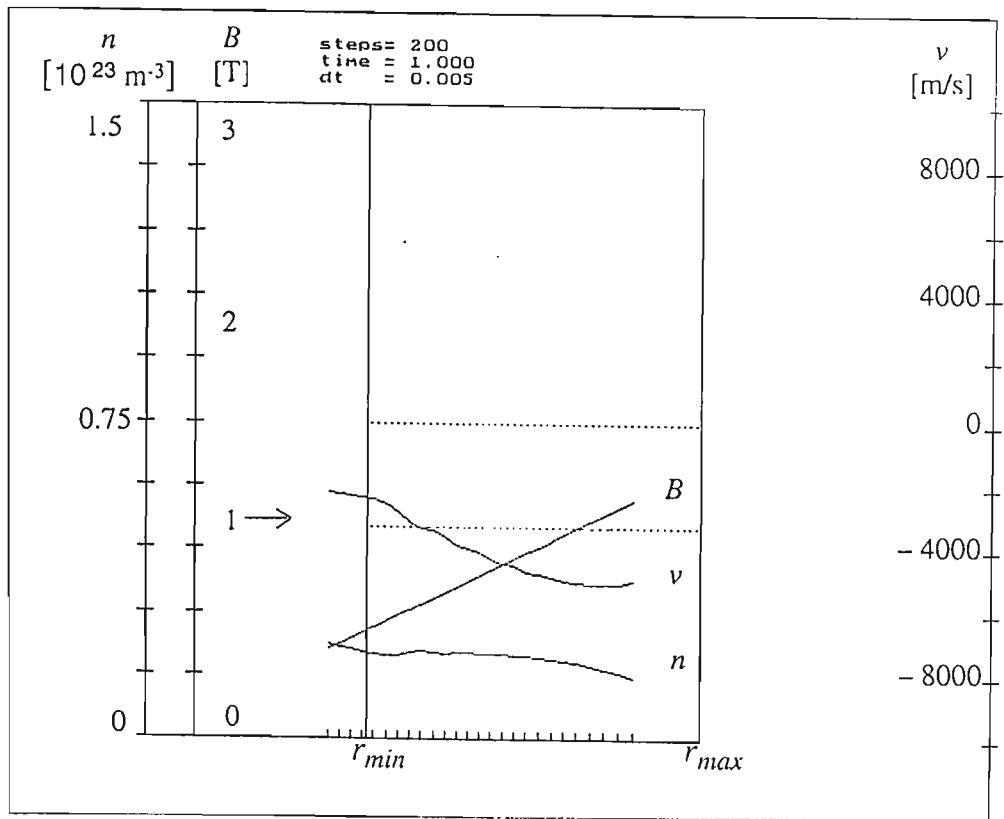




Obr. 5.4.2.: Oscilace pinče kolem rovnováhy







Obr. 5.4.3.: Kompresie pinče

6. VLNY V PLAZMATU

6.1. Úvod

Oblast vyplněná plazmatem je schopna na základě různých vnějších podnětů přenášet mnoho druhů vlnění. Popíšme stručně plazmové oscilace, magnetoakustické vlny a elektromagnetické vlny [59,60,61,65].

6.2. Plazmové oscilace a vlny

Do této skupiny oscilací a vln řadíme ty vlnové jevy v plazmatu, které probíhají i bez přítomnosti magnetického pole. Vyjděme z výchozí soustavy MHD rovnic s $\mathbf{B}=0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \mathbf{v}_e) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{v}_i) &= 0 \quad , \\ n_e m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e &= -\nabla p_e - e n_e \mathbf{E} \quad , \\ n_i m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + n_i m_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i &= -\nabla p_i + e n_i \mathbf{E} \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} (e n_i \mathbf{v}_i - e n_e \mathbf{v}_e) \quad , \\ p_\alpha &= n_\alpha k_B T_\alpha = C_\alpha n_\alpha^\gamma \quad .\end{aligned}\tag{6.2.1}$$

Jde o rovnici kontinuity pro elektrony a ionty, pohybové rovnice pro elektrony a ionty s tlakovým a elektrickým členem, rovnici pro elektrické pole a adiabatické uzavření soustavy. Rovnice pro elektrické pole je odvozena z Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, ve které je magnetické pole nulové a proudová hustota je vyjádřena ze vztahu $\mathbf{j} = \sum e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Uvedené rovnice budeme linearizovat, tj. provedeme perturbaci od klidového řešení:

$$\begin{aligned}n_e &= n_0 + \delta n_e \quad , \\ n_i &= n_0 + \delta n_i \quad , \\ \mathbf{v}_e &= 0 + \delta \mathbf{v}_e \quad , \\ \mathbf{v}_i &= 0 + \delta \mathbf{v}_i \quad , \\ \mathbf{E} &= 0 + \delta \mathbf{E} \quad .\end{aligned}\tag{6.2.2}$$

Poruchové členy předpokládáme prvního řádu, tj. zanedbáváme kvadráty a vyšší členy perturbací. Takto vzniklou lineární soustavu rovnic podrobíme Fourierově transformaci, resp. dosadíme řešení ve tvaru rovinné vlny $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)$. Výsledkem je sada algebraických rovnic pro linearizované veličiny:

$$\begin{aligned}
\omega \delta n_e - n_0 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_e) &= 0 \quad , \\
\omega \delta n_i - n_0 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_i) &= 0 \quad , \\
-m_e n_0 \omega \delta \mathbf{v}_e + \gamma_e k_B T_e \mathbf{k} \delta n_e + e n_0 \delta \mathbf{E} &= 0 \quad , \\
-m_i n_0 \omega \delta \mathbf{v}_i + \gamma_i k_B T_i \mathbf{k} \delta n_i - e n_0 \delta \mathbf{E} &= 0 \quad , \\
-\omega \delta \mathbf{E} + \frac{e n_0}{\epsilon_0} \delta \mathbf{v}_i - \frac{e n_0}{\epsilon_0} \delta \mathbf{v}_e &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Soustava bude mít netriviální řešení jen je-li determinant soustavy roven nule. Z této podmínky plyne disperzní relace

$$(\omega_{pe}^2 + \gamma_e c_e^2 k^2 - \omega^2) \cdot (\omega_{pi}^2 + \gamma_i c_i^2 k^2 - \omega^2) - \omega_{pe} \omega_{pi} = 0 \tag{6.2.4}$$

pro plazmové oscilace a vlny. V této disperzní relaci jsme označili

$$\omega_{p\alpha} \equiv \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_\alpha \epsilon_0}} \quad ; \quad c_\alpha \equiv \sqrt{\frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha}} \tag{6.2.5}$$

plazmovou frekvenci a tepelnou rychlost elektronů a iontů. S pomocí definice Debyeova poloměru lze mezi plazmovou frekvencí a střední tepelnou rychlostí pohybu psát

$$c_\alpha = \omega_{p\alpha} r_{D\alpha} \quad . \tag{6.2.6}$$

Disperzní relaci (6.2.4) za pomoci Debyeova poloměru můžeme psát v přehlednějším tvaru

$$[\omega_{pe}^2 (1 + \gamma_e r_{De}^2 k^2) - \omega^2] \cdot [\omega_{pi}^2 (1 + \gamma_i r_{Di}^2 k^2) - \omega^2] - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0 \quad . \tag{6.2.7}$$

Tato disperzní relace v sobě obsahuje několik jevů:

Elektronové oscilace a vlny

provedeme-li limitu $m_i \rightarrow \infty$ ($\omega_{pi} \rightarrow 0$), znamená to, že předpokládáme tak velkou setrvačnou hmotnost iontů, že se nemohou hýbat. Jde o třídu jevů s vysokými frekvencemi ($\sim \omega_{pe}$), které stihnou sledovat jen málo hmotné elektrony - například elektrické oscilace elektronů kolem iontových nepohyblivých center. Z disperzní relace (6.2.7) zbyde jen

$$\omega_{pe}^2 (1 + \gamma_e r_{De}^2 k^2) - \omega^2 = 0 \quad . \tag{6.2.8}$$

1) $\lambda \gg r_{De}$ ($r_{De} k \ll 1$) – limita dlouhých vln. V této limitě má disperzní relace tvar

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \quad . \tag{6.2.8 a}$$

Jde o elektronové oscilace (“vlny” s konstantní frekvencí) na plazmové frekvenci elektronů. Tato situace nastane pro délku vlny podstatně větší než Debyeův poloměr.

2) $\lambda \ll r_{De}$ ($r_{De} k \gg 1$) – limita krátkých vln. V této limitě má disperzní relace tvar

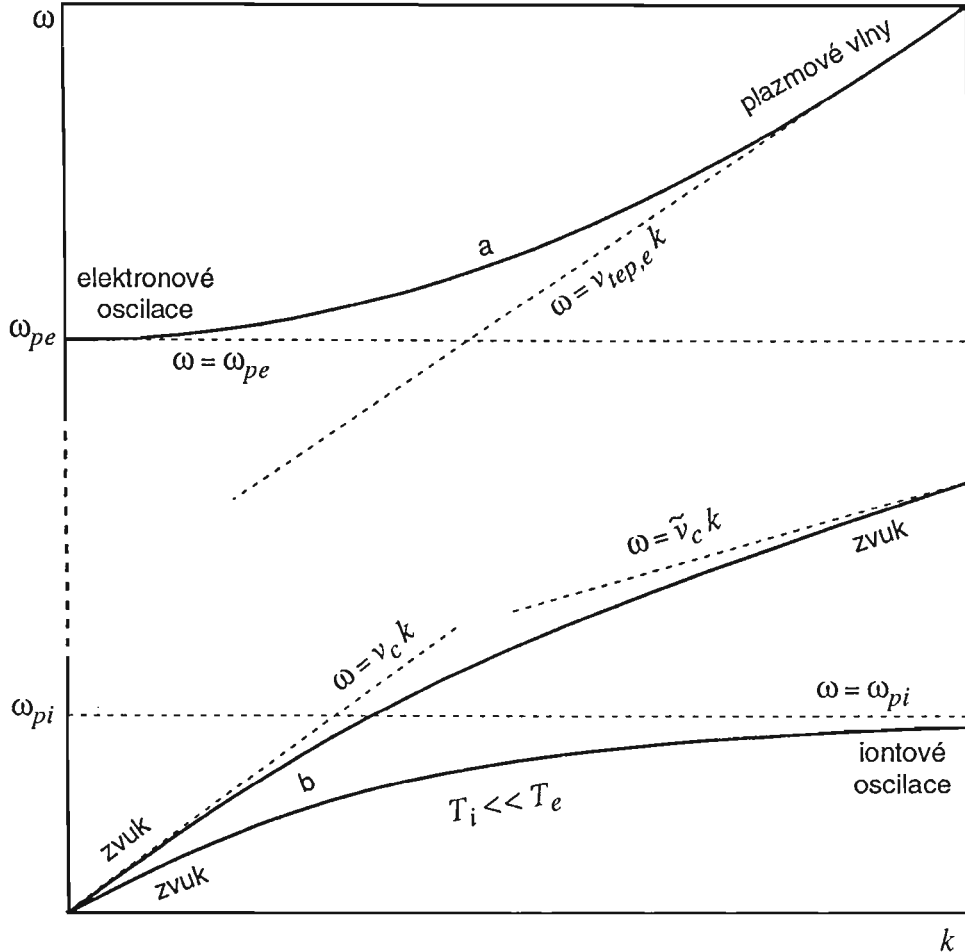
$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \gamma_e r_{De}^2 k^2 \quad . \tag{6.2.8 b}$$

Jde o vlny s konstantní rychlostí ($\omega \sim k$),

$$v_f \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\gamma_e \omega_{pe}^2 r_{De}^2} = \sqrt{\gamma_e \frac{k_B T_e}{m_e}} \quad , \quad (6.2.9)$$

která odpovídá tepelné rychlosti elektronů.

Obecný průběh závislosti $\omega(k)$ z disperzní relace (6.2.8) pro elektronové oscilace a vlny je znázorněn na obr. 6.2.1, křivka *a*.



Obr. 6.2.1.: Elektronové a iontové oscilace a vlny

Iontové oscilace a vlny

provedeme-li limitu $m_e \rightarrow 0$ ($\omega_{pe} \rightarrow \infty$), znamená to nulové setrvačné vlastnosti elektronů, elektrony reagují na vnější podněty okamžitě a vytvářejí vlastně spojité záporné pozadí, na kterém oscilují ionty. Jde o třídu jevů s nízkými frekvencemi ($\sim \omega_{pi}$), ke kterým patří například zvukové vlny. Z obecné disperzní relace (6.2.7) zbyde

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 + \gamma_i r_{Di}^2 k^2 - \frac{1}{(1 + \gamma_e r_{De}^2 k^2)} \right] \quad . \quad (6.2.10)$$

1) $\lambda \gg r_{De}$ ($r_{De} k \ll 1$) – limita dlouhých vln. V této limitě má disperzní relace tvar

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 (\gamma_i r_{Di}^2 + \gamma_e r_{De}^2) k^2 \quad , \quad (6.2.11)$$

což je disperzní relace zvukových vln s rychlostí

$$v_c \equiv \frac{\omega}{k} = \omega_{pi} \sqrt{\gamma_i r_{Di}^2 + \gamma_e r_{De}^2} = \sqrt{\gamma_i \frac{k_B T_i}{m_i} + \gamma_e \frac{k_B T_e}{m_e}} \quad . \quad (6.2.12)$$

2) $\lambda \ll r_{De}$ ($r_{De} k \ll 1$) – limita krátkých vln. V této limitě má disperzní relace tvar

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \gamma_i r_{Di}^2 k^2 \quad . \quad (6.2.13)$$

Jde opět o disperzní relaci zvukových vln, tentokrát s nižší rychlostí šíření:

$$v_c \equiv \frac{\omega}{k} = \omega_{pi} \sqrt{\gamma_i r_{Di}^2} = \sqrt{\gamma_i \frac{k_B T_i}{m_i}} \quad . \quad (6.2.14)$$

Elektronová komponenta v tomto případě k šíření zvukových vln nepřispívá. Provádíme -li limitu krátkých vln pro plazma, které má chladnou iontovou komponentu ($T_i \ll T_e$), potom je v limitě krátkých vln disperzní relace jen

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \quad . \quad (6.2.15)$$

V plazmatu se vytvoří iontové oscilace na plazmové frekvenci iontů. Případu iontových oscilací a vln odpovídá křivka *b* na obr. 6.2.1.

U plazmových oscilací a vln lze zkoumat i další závislosti, například vliv srážkových procesů nebo vliv pohybu plazmatu (Dopplerův jev). Většinou jde o jednoduché korekce výchozí disperzní relace. Konkrétně pro vliv pohybu prostředí rychlostí v_0 stačí v relaci (6.2.4) nahradit $\omega \rightarrow \Omega \equiv \omega - \mathbf{k}v_0$.

6.3. Magnetoakustické vlny

Magnetoakustické vlny představují zobecnění iontových oscilací a vln v přítomnosti magnetického pole. Plazma popíšeme jednotekutinovým MHD modelem s výchozími rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \quad , \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \\ p &= p(\rho) \quad . \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Plazma je považováno za vysoce vodivé, tj. člen difúze v rovnici magnetického pole můžeme zanedbat oproti členu zamrznání. MHD soustava je uzavřena stavovou rovnicí. Stejně jako v kapitole 6.2. provedeme linearizaci soustavy zavedením poruch

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 + \delta\rho \quad , \\
\mathbf{v} &= \delta\mathbf{v}, \\
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}
\end{aligned}
\tag{6.3.2}$$

a následnou Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned}
-\omega \delta\rho + (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}) \rho_0 &= 0 \quad , \\
-\omega \rho_0 \delta\mathbf{v} &= -v_c^2 \mathbf{k} \delta\rho + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}] \times \mathbf{B}_0 \quad , \\
-\omega \delta\mathbf{B} &= \mathbf{k} \times [\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \quad ,
\end{aligned}
\tag{6.3.3}$$

kde jsme označili

$$v_c^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{6.3.4}$$

kvadrát rychlosti zvuku v prostředí. Z linearizované soustavy rovnic (6.3.3) je možné vyloučit poruchy magnetického pole a hustoty. Získáme tak lineární rovnici pro poruchu rychlostního pole

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \cdot \delta\mathbf{v} &= 0 \quad , \\
\mathbb{A} &\equiv [\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2] \mathbb{1} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{k} \otimes \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A \otimes \mathbf{k}] - (v_A^2 + v_c^2) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad ,
\end{aligned}
\tag{6.3.5}$$

kde jsme označili

$$\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad ; \quad v_A^2 \equiv \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \tag{6.3.6}$$

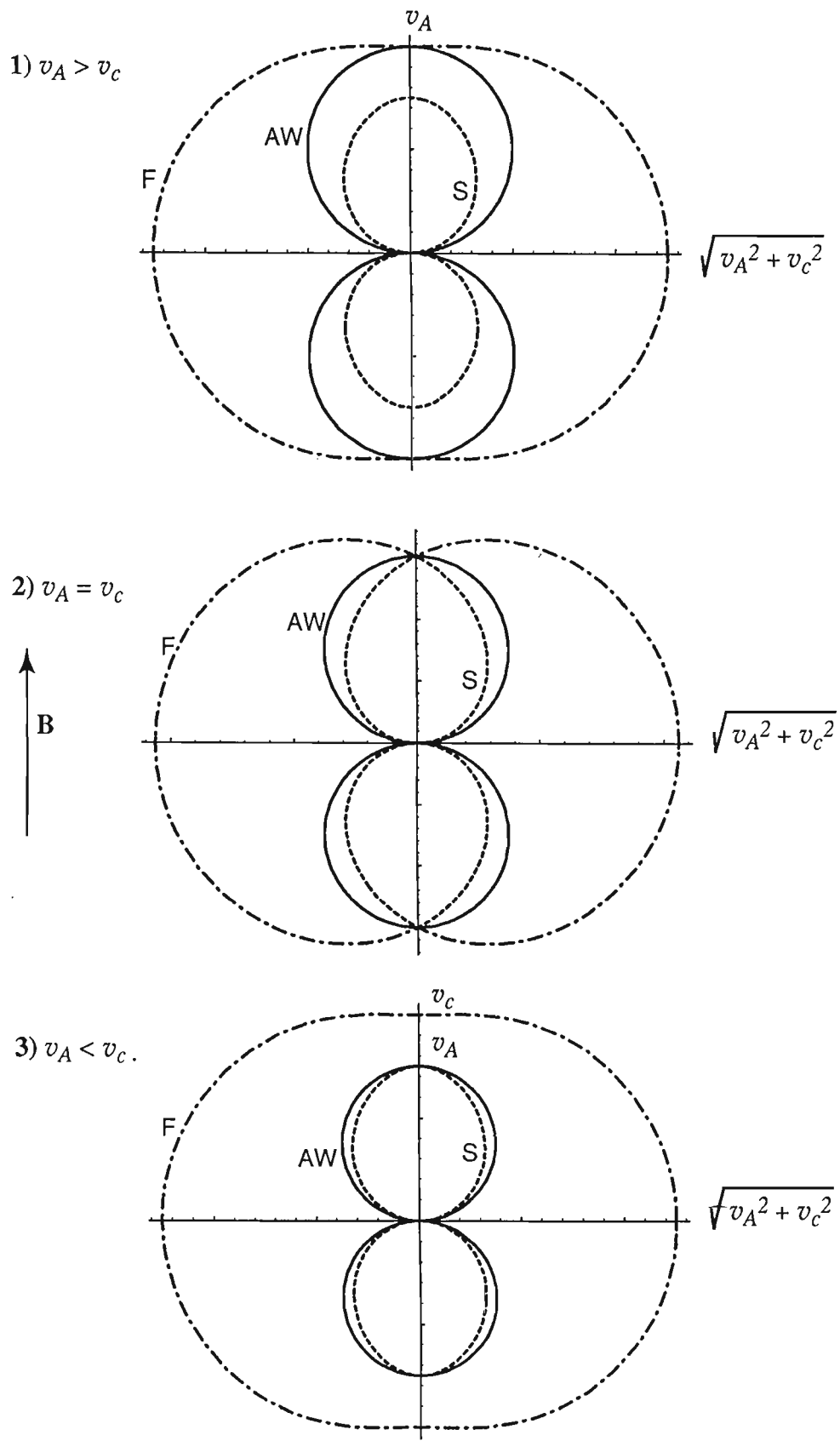
Alfvénovu rychlost. Soustava (6.3.5) bude mít netriviální řešení, bude-li determinant matice \mathbb{A} roven 0. Z této podmínky plyne disperzní relace magnetoakustických vln:

$$[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2] [\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + v_c^2) + v_c^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2] = 0 \quad . \tag{6.3.7}$$

Tato rovnice je kubickou rovnicí pro ω^2 . Rozepíšeme-li $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A = k v_A \cos \alpha$, kde α je úhel mezi magnetickým polem \mathbf{B}_0 a směrem šíření vlny \mathbf{k} , potom odpovídající tři řešení jsou

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= k^2 v_A^2 \cos^2 \alpha \quad , \\
\omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (v_c^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(v_c^2 + v_A^2)^2 - 4 v_c^2 v_A^2 \cos^2 \alpha} \quad , \\
\omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (v_c^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(v_c^2 + v_A^2)^2 - 4 v_c^2 v_A^2 \cos^2 \alpha} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.3.8}$$

Jde o zvukové vlny, jejichž šíření je modifikováno přítomností magnetického pole (magnetoakustické, resp. magnetoakustické vlny). Jednotlivé módy se nazývají: *Alfvénova vlna* (AW), *pomalá magnetoakustická vlna* (S) a *rychlá magnetoakustická vlna* (F). Řešením původní soustavy linearizovaných rovnic (6.3.3) snadno určíme, že Alfvénova vlna je příčná ($\delta\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$, $\delta\mathbf{B} \parallel \delta\mathbf{v}$; $\delta\mathbf{v} \perp \mathbf{B}_0$), u zbývajících módů $\delta\mathbf{v}$ a $\delta\mathbf{B}$



Obr 6.3.1.: Magnetoakustické vlny

nejsou obecně kolmé na původní směr pole \mathbf{B}_0 . Z relace (6.3.8) můžeme určit rychlost šíření vln ω/k pro všechny tři módy v různých směrech α . Na obr. 6.3.1 je znázorněn polární diagram závislosti fázové rychlosti $v_f(\alpha)$. Na radiální ose je vynášena fázová rychlost $v_f = \omega/k$, na axiální úhel α mezi směrem šíření a původním směrem magnetického pole \mathbf{B}_0 .

Z šlírových fotografií z-pinče je zřejmé, že zde dochází k šíření vln kolmo k magnetickému poli (“cibulovitá struktura proudové vrstvy”). S největší pravděpodobností jde o modifikaci rychlé magnetoakustické vlny v cylindrické geometrii. Tato vlna má jako jediná nenulovou rychlost šíření i ve směru kolmém k magnetickému poli.

6.4. Elektromagnetické vlny

Elektromagnetické vlny šířící se plazmatem interagují především s málo hmotnými elektrony. Ionty nemohou vysokofrekvenční děje sledovat. Za výchozí rovnice proto budeme volit rovnici kontinuity pro elektrony, pohybovou rovnici pro elektrony, a Maxwellovy rovnice pro časový vývoj elektrického a magnetického pole. Časový vývoj elektrického pole (Maxwellův posuvný proud) nelze vzhledem k frekvenci dějů zanedbat. Všude uvažujeme limitu $m_i \rightarrow \infty$; $p \rightarrow 0$, tj. pro šíření elektromagnetických vln plazmatem zanedbáváme pohyb iontů a tepelné děje v plazmatu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}_e) &= 0 \quad , \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e &= -e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} \quad , \\ \mathbf{j} &= -|e| n_e \mathbf{v}_e \quad . \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Standardním postupem provedeme linearizaci

$$\begin{aligned} n_e &= n_0 + \delta n_e \\ \mathbf{v}_e &= \delta \mathbf{v}_e \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B} \quad , \\ \mathbf{E} &= \delta \mathbf{E} \quad . \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Po následné Fourierově transformaci a nulové podmínce na determinant linearizované soustavy dostáváme disperzní relaci elektromagnetické vlny v plazmatu:

$$\begin{aligned}
& c^4 k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2) \right] + \\
& + (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha) \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \right. \\
& \left. - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2) (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) \right] = 0 \quad . \quad (6.4.3)
\end{aligned}$$

V této disperzní relaci jsme označili

$$c^2 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (6.4.4)$$

kvadrát rychlosti šíření světla.

Vlny podél pole \mathbf{B}_0 ($\alpha=0$)

Pro $\alpha=0$ z disperzní relace (6.4.3) máme

$$(\omega^2 - \omega_p^2) \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2)^2 \right] = 0 \quad . \quad (6.4.5)$$

Řešení vzhledem k ω má tři základní módy:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_p^2 \quad , \\
\omega^2 &= c^2 k^2 + \frac{\omega_p^2}{1 \pm \frac{\omega_c}{\omega}} \quad .
\end{aligned} \quad (6.4.6)$$

První mod odpovídá plazmovým oscilacím, u zbývajících dvou jde o elektromagnetické vlny, pro které můžeme z linearizované rovnice pro elektrické pole zjistit, že

$$\delta E_x \pm i \delta E_y = 0 \quad , \quad (6.4.7)$$

tj. jde o pravotočivě a levotočivě polarizovanou vlnu (tzv. R a L vlnu - Right, Left). Pro index lomu

$$\mathcal{N} \equiv \frac{c}{v_f} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{ck}{\omega} \quad , \quad (6.4.8)$$

z (6.4.6) snadno odvodíme relaci

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega}{1 \pm \omega_c/\omega} \quad . \quad (6.4.9)$$

Zajímavé jsou limitní situace

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) & \Rightarrow \omega = \omega_c \quad , \\
\mathcal{N} \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) & \Rightarrow \omega = \omega_{R,L} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2} \quad .
\end{aligned} \quad (6.4.10)$$

První limita odpovídá cyklotronní rezonanci, při které je vlna absorbována, druhá limita odrazu vln. Frekvence $\omega_{R,L}$ se nazývají pravá a levá mezní frekvence. Při řešení

kvadratické rovnice u druhé limity bylo použito před diskriminantem jen znaménko “+”, aby výsledná frekvence byla kladná.

Vlny napříč pole B_0 ($\alpha=\pi/2$)

Pro $\alpha=\pi/2$ z disperzní relace (6.4.3) máme

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) [(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \omega_c^2(\omega^2 - c^2 k^2)] = 0 \quad (6.4.11)$$

Anulováním první závorky získáme řádnou vlnu (*O* vlnu – Ordinary Wave):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (6.4.12)$$

Jde o základní disperzní relaci pro šíření elektromagnetické vlny plazmatem, není-li toto šíření ovlivněno magnetickým polem. Úhlová frekvence a vlnový vektor budou reálná čísla pro $\omega > \omega_p$. Pro frekvence vyšší než plazmová frekvence je plazma pro elektromagnetické vlny “průhledné”. Naopak pro $\omega < \omega_p$ dochází k útlumu vlnění (komplexní k , ω), vlna se nešíří. Dochází k rozkmitání elektronů a absorpci vlnění. Pro index lomu řádné vlny z této disperzní relace odvodíme

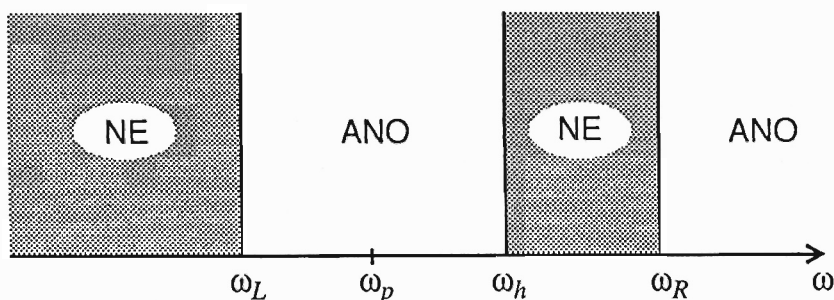
$$\mathcal{N}^2 = \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \quad (6.4.13)$$

Tento vztah jsme použili při odvození vlastností šliřové fotografie - viz rovnice (2.1.3) - (2.1.5)

Anulováním druhé závorky v (6.4.11) získáme disperzní relaci mimořádné vlny (*X* vlny – Extraordinary Wave). Standardní limitní situace nastávají pro

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) &\Rightarrow \omega = \omega_h \equiv \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2} \quad , \\ \mathcal{N} \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) &\Rightarrow \omega = \omega_{R,L} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

K rezonanci dochází pro tzv. horní hybridní frekvenci ω_h , k odrazům pro mezní pravou a levou frekvenci $\omega_{R,L}$. Mimořádná vlna se šíří v intervalu frekvencí (viz obr. 6.4.1.) $\omega \in (\omega_L, \omega_h) \cup (\omega_R, \infty)$.



Obr. 6.4.1.: Šíření X vlny.

V případě obecného směru vlny vzhledem k magnetickému poli \mathbf{B}_0 je šíření elektromagnetické vlny popsáno obecnou disperzní relací (6.4.3).

6.5. MHD nestability z pinče

Amplituda malých poruch šířících se plazmatem může s časem narůstat, potom přestávají platit linearizované rovnice a hovoříme o rozvoji nestability. V této kapitole stručně popíšeme některé nestability týkající se z-pinče, které je možné odvodit na základě MHD popisu.

Budeme uvažovat nejjednodušší případ - homogenní válec plazmatu s konstantním tlakem uvnitř, na jehož povrchu teče proud (tj. magnetické pole uvnitř je nulové a vně ubývá jako $1/r$). Na povrchu předpokládáme spojitost tlaků $p+p_m$, spojitost normálové složky pole $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ a spojitost normálové složky rychlosti $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$. Za výchozí sadu MHD rovnic využijeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0 \quad , \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad ; \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad , \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

tedy předpokládáme vodivé plazma s dominantním magnetickým polem (zanedbáváme difúzní člen a Maxwellův posuvný proud). Soustava rovnic je uzavřena adiabatickým vztahem pro tlak.

Řešení uvnitř:

Za rovnovážnou konfiguraci volme

$$\rho_0(r) = \rho_0 \quad , \quad v_0(r) = 0 \quad , \quad B_0(r) = 0 \quad , \quad p_0(r) = p_0 \quad . \tag{6.5.2}$$

Nyní provedeme linearizaci výchozích rovnic (6.5.1) v cylindrické geometrii standardním způsobem. Na rozdíl od kartézského souřadnicového systému, kde předpokládáme závislost poruch $\delta f = A \exp[i(\mathbf{kx} - \omega t)]$, budeme v cylindrickém případě předpokládat

$$\delta f = f_1(r) \exp[i(kz + m\varphi - \omega t)] \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad . \tag{6.5.3}$$

Linearizovaná soustava potom bude

$$\begin{aligned}
& -i\omega\rho_1 + \rho_0\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_{1r}) + \frac{1}{r}imv_{1\varphi} + ikv_{1z}\right) \quad , \\
& -i\omega\rho_1\mathbf{v}_1 = -\left(\frac{dp_1}{dr}, \frac{im}{r}p_1, ikp_1\right) \quad , \\
& -i\omega p_1 + \gamma\rho_0\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_{1r}) + \frac{1}{r}imv_{1\varphi} + ikv_{1z}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Vyloučíme -li z této soustavy linearizované rychlosti a hustotu, získáme rovnici pro linearizovanou poruchu tlaku:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp_1}{dr}\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + q^2\right)p_1 = 0 \quad , \tag{6.5.5}$$

kde jsme označili

$$q^2 \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{v_E^2} \quad . \tag{6.5.6}$$

Jde o přidruženou Besselovu rovnici, jejíž řešení můžeme psát ve tvaru

$$p_1(r) = A I_m(qr) + B K_m(qr) \quad . \tag{6.5.7}$$

Funkce I_m diverguje pro $r \rightarrow \infty$, funkce K_m diverguje pro $r \rightarrow 0$. Pro regulární řešení uvnitř pinče musí tedy být $B = 0$. Ostatní linearizované veličiny dopočteme z linearizované soustavy (6.5.4):

$$\begin{aligned}
p_1(r) &= A I_m(qr) \quad , \\
B_1(r) &= 0 \quad , \\
v_{1r}(r) &= -A \frac{iq}{\omega\rho_0} I_m'(qr) \quad , \\
v_{1\varphi}(r) &= A \frac{m}{\omega\rho_0 r} I_m(qr) \quad , \\
v_{1z}(r) &= A \frac{k}{\omega\rho_0} I_m(qr) \quad .
\end{aligned} \tag{6.5.8}$$

Řešení vně:

Vně je nenulová jen porucha magnetického pole, pro kterou platí $\text{rot } \mathbf{B}_1 = 0$. Zavedeme -li potenciál ψ rovnicí $\mathbf{B}_1 = \nabla\psi$, bude tento potenciál splňovat rovnici $\Delta\psi = 0$, tj.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right)\psi = 0 \quad , \tag{6.5.9}$$

která má řešení

$$\psi(r) = C I_m(kr) + D K_m(kr) \quad . \tag{6.5.10}$$

Z důvodu regularity řešení pro $r \rightarrow \infty$ bude $C = 0$. Poruchu magnetického pole určíme jako gradient potenciálu ψ :

$$\begin{aligned}
B_{1r}(r) &= Dk K'_m(kr) \quad , \\
B_{1\varphi}(r) &= D \frac{im}{r} K_m(kr) \quad , \\
B_{1z}(r) &= D ik K_m(kr) \quad .
\end{aligned}
\tag{6.5.11}$$

Nalezli jsme tedy řešení uvnitř i vně pinče, které je třeba navázat na hranici

$$r = r_0 + r_1 \exp[i(m\varphi + kz - \omega t)] \quad . \tag{6.5.12}$$

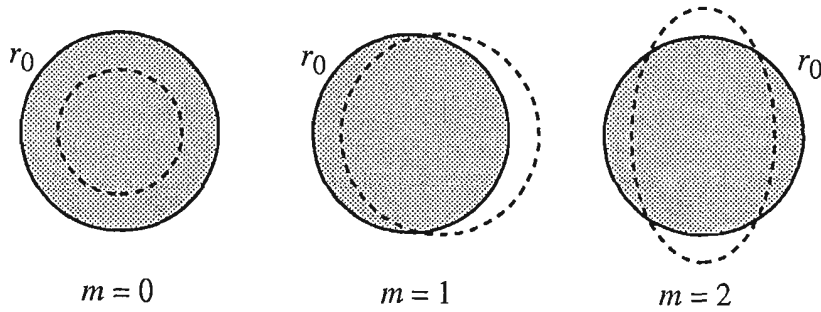
Normálový vektor k této hranici ve vácových souřadnicích je

$$\mathbf{n} = \left(-1, \frac{imr_1}{r}, ikr_1\right) = (-1, 0, 0) + \left(0, \frac{imr_1}{r}, ikr_1\right) = \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1 \quad . \tag{6.5.13}$$

Poruchu r_1 můžeme vyjádřit za pomoci poruchy rychlosti ze vztahu

$$v_{1r} = \frac{\partial r}{\partial t} = -i\omega r_1 \quad . \tag{6.5.14}$$

Poznamenejme, že hranice pinče je deformována, pro různá m je tato deformace zobrazena na obr. 6.5.1. Situace $m=0$ a $m=1$ odpovídá základním modům z obr. 1.2.2.



Obr. 6.5.1.: módy nestability

Ze spojitosti normálové komponenty magnetického pole a tlaku na hranici dostáváme podmínky

$$\begin{aligned}
A \left[i \frac{B_0}{\rho_0} \frac{qm}{\omega^2 r_0} I'_m(qr_0) \right] - D \left[k K'_m(kr_0) \right] &= 0 \quad , \\
A \left[I_m(qr_0) + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \frac{1}{\omega^2 r_0} q I'_m(qr_0) \right] - D \left[\frac{imB_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0) \right] &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{6.5.15}$$

Pro netriviální řešení koeficientů A, B bude determinant soustavy nulový. Odsud plyne disperzní relace

$$\omega^2 = -\frac{v_A^2}{r_0} q \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right] \quad , \tag{6.5.16}$$

kde v_A je Alfvénova rychlost definovaná vztahem(6.3.6). V systému dojde k rozvoji stabilních vln, je-li $\omega^2 > 0$. Z vlastností funkcí I_m, K_m ($I_m(x) \sim \exp(x)$; $K_m(x) \sim \exp(-x)$ pro $x \gg 1$) plyne podmínka stability ve tvaru

$$1 + \frac{m^2 K_m(kr_0)}{kr_0 K_m'(kr_0)} < 0 . \quad (6.5.17)$$

Tato podmínka není splněna nikdy pro $m=0$ a $m=1$. Pro $m>1$ je tato podmínka přibližně splněna ($K_m/K_m' \sim -1$) pro

$$kr_0 \lesssim m^2 - 1 \quad ; \quad m = 2, 3, \dots , \quad (6.5.18)$$

tedy pro vlnové délky

$$\lambda \gtrsim \frac{2\pi r_0}{m^2 - 1} \quad ; \quad m = 2, 3, \dots . \quad (6.5.19)$$

V tomto jednoduchém případě je tedy pinč nestabilní pro módy $m=0$ a $m=1$. Pinč může stabilizovat přítomnost axiálního pole. V pinčích dochází k rozvoji mnoha dalších typů nestabilit, které přesahují rámec této práce. Jmenujme alespoň výměnnou nestabilitu (interchange; flute instability), která se rozvíjí, je-li z energetického hlediska výhodná výměna hmoty mezi dvěma proudovými vlákny a Kelvin-Helmholtzovu nestabilitu, která se vyvíjí na hranici dvou oblastí s různou rychlostí (vítr na vodní hladině, plazmový jet pohybující se v okolním prostředí).

7. STATISTICKÉ MODELY

7.1. Úvod - Boltzmannova rovnice

Při statistickém popisu plazmatu vycházíme z pravděpodobnostního rozdělení $f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha)$ částic druhu α v čase t , místě \mathbf{x} a s rychlostí \mathbf{u}_α . Rychlost \mathbf{u}_α je fázová proměnná, makroskopickou rychlost \mathbf{v}_α bychom získali středováním. Rozdělovací funkci f_α normujeme k celkovému počtu částic, tj.

$$\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha(t, \mathbf{x}) \quad ; \quad \text{resp.} \quad (7.1.1)$$

$$\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{u}_\alpha = N_\alpha \quad .$$

Střední hodnotu dynamické proměnné $A(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha)$ získáme středováním

$$\bar{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{n(t, \mathbf{x})} \int A(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{u}_\alpha \quad ; \quad \text{resp.} \quad (7.1.2)$$

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{N} \int A(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{u}_\alpha \quad .$$

Například pro makroskopickou rychlost platí

$$\mathbf{v}_\alpha(t, \mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{u}}_\alpha = \frac{1}{n(t, \mathbf{x})} \int \mathbf{u}_\alpha f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{u}_\alpha = \frac{\int \mathbf{u}_\alpha f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{u}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_\alpha) d^3 \mathbf{u}_\alpha} \quad . \quad (7.1.3)$$

Budeme předpokládat, že časová změna rozdělovací funkce je způsobena srážkovými procesy s ostatními částicemi

$$\left(\frac{df_\alpha}{dt} \right)_s = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \quad , \quad (7.1.4)$$

kde $S_{\alpha\beta}$ je srážkový člen částic druhu α s částicemi druhu β . Po provedení derivace na levé straně a vyjádření zrychlení za pomoci Lorentzovy síly dostaneme Boltzmannovu rovnici pro částice v elektrických a magnetických polích:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) f_\alpha + \left[\frac{e_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\alpha} \right] f_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \quad . \quad (7.1.5)$$

Tuto rovnici musíme doplnit příslušnými Maxwellovými rovnicemi pro elektrické a magnetické pole

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} , \quad (7.1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} ,$$

kde proudová hustota na pravé straně je vyjádřena za pomoci rozdělovací funkce vztahem

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left[e_{\alpha} \int \mathbf{u}_{\alpha} f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\alpha}) d^3 \mathbf{u}_{\alpha} \right] . \quad (7.1.7)$$

Soustava rovnic (7.1.5), (7.1.6) a (7.1.7) pro proměnné $f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\alpha})$, $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ je výchozí sada rovnic při statistickém popisu plazmatu [60,53,56].

● Poznamenejme, že v případě potenciálních sil $\mathbf{F} = -\nabla U$ je stacionárním řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (7.1.8)$$

Maxwellovo rozdělení

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = c_1 \exp \left[c_2 \left(\frac{m \mathbf{u}^2}{2} + \dot{U}(\mathbf{x}) \right) \right] . \quad (7.1.9)$$

Srážkový člen je pro Maxwellovo rozdělení nulový.

● Zavedeme -li tepelnou (chaotickou) složku rychlosti vztahem

$$\mathbf{w}_{\alpha} \equiv \mathbf{u}_{\alpha} - \bar{\mathbf{u}}_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha} , \quad (7.1.10)$$

je možné používat i Boltzmannovu rovnici ve tvaru přeepsaném do proměnných $t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_{\alpha}$:

$$\frac{d_{\alpha} f_{\alpha}}{dt} + \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m_{\alpha}} - \frac{d_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}}{dt} \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{w}_{\alpha}} - \left(\mathbf{w}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{w}_{\alpha}} \right) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} , \quad \text{kde}$$

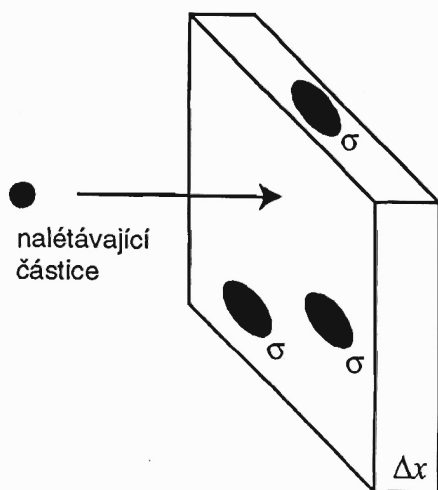
$$\frac{d_{\alpha}}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} , \quad (7.1.11)$$

$$\mathbf{F}_{\alpha} = e_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) ,$$

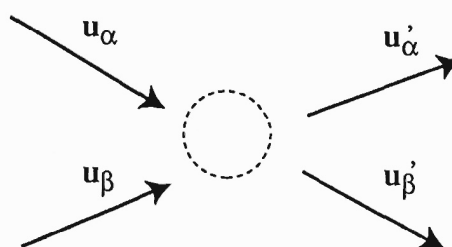
$$f_{\alpha} = f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_{\alpha}) .$$

7.2. Srážky v plazmatu

Srážky v plazmatu charakterizujeme účinným průřezem σ srážky. Účinný průřez představuje plošku, do které se musí při daném procesu "strefit" nalétávající částice. V jednoduchém příkladu znázorněném na obr. 7.2.1 je pravděpodobnost srážky $N\sigma/S$ a pro frekvenci srážek máme



Obr. 7.2.1.: Účinný průřez



Obr.7.2.2.: Elastická srážka

$$v = \frac{N\sigma}{S} \frac{1}{\Delta t} = \frac{N\sigma}{S\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow n\sigma\bar{u} = n\sigma v . \quad (7.2.1)$$

V obecném případě pro srážkovou frekvenci částic druhu α s částicemi druhu β platí:

$$v_\alpha = \sum_{\beta} v_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} n_{\beta} \bar{u}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} n_{\beta} v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} , \quad (7.2.2)$$

kde $v_{\alpha\beta}$ je velikost průměrné vzájemné rychlosti částic α a β a $\sigma_{\alpha\beta}$ je účinný průřez srážky částice druhu α s částicí druhu β . Srážkové frekvence se sčítají. Pro střední dobu mezi srážkami ($\nu=1/\tau$) potom platí

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \sum_{\beta} \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} \quad ; \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{v_{\alpha\beta}} \quad (7.2.3)$$

a pro střední volnou dráhu

$$l_\alpha = c_\alpha \tau_\alpha , \quad (7.2.4)$$

kde c_α je střední hodnota tepelné rychlosti.

Uvažme nyní elastickou srážku dvou částic (obr. 7.2.2). Zavedeme-li místo rychlostí u_α, u_β vzájemnou a těžišтовую rychlost vztahy

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &\equiv u_\alpha - u_\beta , \\ u_{(\alpha\beta)} &\equiv \frac{m_\alpha u_\alpha + m_\beta u_\beta}{m_\alpha + m_\beta} , \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

bude pro hybnost a kinetickou energii v nových proměnných platit

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (m_\alpha + m_\beta) u_{(\alpha\beta)} , \\ W_k &= \frac{1}{2} (m_\alpha + m_\beta) u_{(\alpha\beta)}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} u_{\alpha\beta}^2 . \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Ze zákona zachování hybnosti a energie plyne zachování těžišťové rychlosti a velikosti vzájemné rychlosti. Při elastické srážce se tedy mění jen směr vzájemné rychlosti částic (2 stupně volnosti):

$$\mathbf{k}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathbf{u}_{\alpha\beta}}{u_{\alpha\beta}} \quad (7.2.7)$$

Účinný průřez srážky je proto podmíněnou pravděpodobností

$$\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; u_{\alpha\beta}) \quad (7.2.8)$$

takovou, aby výraz

$$\overline{u_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; u_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} dt} \quad (7.2.9)$$

udával pravděpodobnost, že jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti bude po srážce ležet v intervalu $(\mathbf{k}'_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha\beta} + d\mathbf{k}'_{\alpha\beta})$, byl-li před srážkou jeho směr $\mathbf{k}_{\alpha\beta}$.

Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (7.1.5) musí pak být dán časovou změnou pravděpodobnosti přechodu částic do nových stavů \mathbf{u}'_{α} , \mathbf{u}'_{β} minus pravděpodobnosti úniku částic z daného místa fázového prostoru přeintegrovanou přes volné parametry:

$$S_{\alpha\beta} = \int \left[f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}'_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}'_{\beta}) - f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\beta}) \right] \cdot u_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; u_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{u}_{\beta} \quad (7.2.10)$$

Srážkový člen v tomto tvaru se nazývá Boltzmannův srážkový integrál. Ze symetrie účinného průřezu $\sigma(\mathbf{k} | \mathbf{k}'; u) = \sigma(\mathbf{k}' | \mathbf{k}; u)$ plyne pro srážkový integrál důležitá vlastnost:

$$\sum_{\alpha, \beta} \int \Psi_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{u}_{\alpha} = 0 \quad (7.2.11)$$

pro každý sumační invariant (hmotnost, hybnost, energie, ...).

● Poznámka: V Newtonově pohybové rovnici lze snadno zavést průměrnou sílu od srážek (“třecí” člen) jako časovou změnu hybnosti způsobenou srážkami:

$$\mathbf{F}_{\alpha}^{(S)} = - \sum_{\beta} v_{\alpha\beta} m_{\alpha} v_{\alpha\beta} \quad (7.2.13)$$

například Lorentzova pohybová rovnice pro elektron bude mít tvar

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = - |e| (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - v_{ei} m_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - v_{en} m_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) \quad (7.2.14)$$

7.3. Momentová rovnice (rovnice přenosu)

Vynásobme Boltzmannovu rovnici (7.1.5) funkcí $\Phi_\alpha(\mathbf{u}_\alpha)$ a vystředujme přes \mathbf{u}_α :

$$\begin{aligned} & \int \Phi_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{u}_\alpha + \int \Phi_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) d^3 \mathbf{u}_\alpha + \\ & + \int \Phi_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \left[\frac{e_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{u}_\alpha} \right] d^3 \mathbf{u}_\alpha = \\ & = \sum_\beta \int \Phi_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{u}_\alpha \quad . \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Po provedení integrace per partes ve třetím členu a za pomoci definice středování (7.1.2) přes rychlost získáme “momentovou rovnici” neboli “rovnici přenosu”:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \overline{\Phi_\alpha}) + \operatorname{div} (n_\alpha \overline{\Phi_\alpha \mathbf{u}_\alpha}) - \frac{n_\alpha e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \overline{\Phi_\alpha}}{\partial \mathbf{u}_\alpha} \\ & = \sum_\beta \int \Phi_\alpha S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{u}_\alpha \quad . \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Z momentové rovnice v tomto tvaru můžeme získat MHD rovnice N -tekutinového modelu, budeme-li za funkci Φ_α volit různé momenty rychlostí. Na pravé straně rovnic budou zdrojové členy dané srážkovým integrálem na pravé straně (7.3.2). Pokud sečteme rovnice (7.3.2) přes α a za Φ_α budeme volit sumační invarianty (hmotnost, hybnost, energie, ...), bude pravá strana vzhledem k vlastnosti (7.2.11) nulová a získáme rovnice jednotekutinového MHD modelu:

Nulový moment: $\Phi_\alpha = m_\alpha$

Po dosazení dostaneme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (7.3.3)$$

kde

$$\rho \equiv \sum_\alpha \rho_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \quad (7.3.4)$$

je celková hustota hmoty.

První moment: $\Phi_\alpha = m_\alpha u_{\alpha i}$

Po dosazení získáme zákon zachování hybnosti ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^L = (\rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})_i \quad , \quad (7.3.5)$$

kde

$$\begin{aligned}
\rho_Q &\equiv \sum_{\alpha} \rho_Q^{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \quad , \\
\mathbf{j} &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad , \\
\tau_{ij}^L &\equiv \sum_{\alpha} \tau_{ij}^{\alpha} \quad , \\
\tau_{ij}^{\alpha} &\equiv \rho_{\alpha} \overline{u_{\alpha i} u_{\alpha j}} = \rho_{\alpha} v_{\alpha i} v_{\alpha j} + \rho_{\alpha} \overline{w_{\alpha i} w_{\alpha j}}
\end{aligned}
\tag{7.3.6}$$

jsme postupně označili hustotu náboje, proudovou hustotu a tenzor toku hybnosti částic, který se po zavedení chaotické tepelné rychlosti (7.1.10) rozpadl na dynamický tlak a tenzor tlaku

$$P_{ij}^{\alpha} \equiv \rho_{\alpha} \overline{w_{\alpha i} w_{\alpha j}} = \rho_{\alpha} \left(\frac{w_{\alpha}^2}{3} \right) \delta_{ij} - \rho_{\alpha} \left(\frac{w_{\alpha}^2}{3} \delta_{ij} - w_{\alpha i} w_{\alpha j} \right) \equiv p_{\alpha} \delta_{ij} + V_{ij}^{\alpha} . \tag{7.3.7}$$

Tenzor tlaku jsme rozložili na skalární tlak a vizkózní tenzor s nulovou stopou.

Se zákonem zachování hybnosti látky (7.3.5) koresponduje zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, který lze odvodit snadno z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^E + \tau_{ij}^M) = -(\rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})_i \quad , \tag{7.3.8}$$

kde $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ je hustota hybnosti elektromagnetického pole, τ_{ij}^E, τ_{ij}^M jsou elektrická a magnetická část Maxwellova tenzoru pnutí

$$\tau_{ij}^E \equiv \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{ij} - E_i D_j \right) \quad ; \quad \tau_{ij}^M \equiv \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{ij} - H_i B_j \right) \quad . \tag{7.3.9}$$

Součtem zákona zachování hybnosti látky (7.3.5) a zákona zachování hybnosti pole (7.3.8) získáme zákon zachování hybnosti soustavy “látko + pole”, který má pravou stranu bez zdrojových členů

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{D} \times \mathbf{B})_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^L + \tau_{ij}^E + \tau_{ij}^M) = 0 \quad . \tag{7.3.10}$$

Druhý moment: $\Phi_{\alpha} = 1/2 m_{\alpha} u_{\alpha}^2$

Podobnými úpravami jako pro nultý a první moment získáme zákon zachování energie látky, pole a soustavy “látko + pole” ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \operatorname{div} \left(\varepsilon \mathbf{v} + \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right) &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad , \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad ,
\end{aligned}
\tag{7.3.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\varepsilon \mathbf{v} + \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) = 0 \quad .$$

Význam jednotlivých členů popíšme u poslední rovnice. V časové derivaci postupně je: hustota vnitřní energie látky, hustota kinetické energie látky, hustota energie elektrického a magnetického pole. V divergenci jsou členy: tok vnitřní energie látky, tok kinetické energie látky, tok hybnosti, tepelný tok a tok energie elektromagnetického pole (Poyntingův vektor). Na pravé straně parciálních zákonů zachování energie je hustota výkonu Jouleova ohřevu. Nově označené veličiny (hustota vnitřní energie a tepelný tok) byly definovány vztahy

$$\begin{aligned}\varepsilon &\equiv \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \overline{w_{\alpha}^2} \quad , \\ \mathbf{q} &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \rho_{\alpha} \overline{w_{\alpha}^2 \mathbf{w}} \quad .\end{aligned}\tag{7.3.12}$$

Veličiny definované středováním přes chaotickou složku rychlosti lze psát i přímo v integrální podobě:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{P}} &\equiv \rho \overline{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}} = m \int (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{v}) f d^3 \mathbf{u} \quad , \\ \varepsilon &\equiv \frac{1}{2} \rho \overline{w^2} = \frac{1}{2} m \int (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) f d^3 \mathbf{u} \quad , \\ \mathbf{q} &\equiv \frac{1}{2} \rho \overline{w^2 \mathbf{w}} = \frac{1}{2} m \int (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}) f d^3 \mathbf{u} \quad .\end{aligned}\tag{7.3.13}$$

Při každém středování vzniká nová veličina (makroskopická rychlost, tlak, tepelný tok, ...), pro kterou je třeba najít rovnici středování přes vyšší moment. O uzavření této soustavy bylo pojednáno v kapitole 5.1.

7.4. Landauův srážkový člen

Boltzmannův srážkový člen lze upravit přímo pro Coulombické srážky mezi částicemi. Základními předpoklady jsou:

- 1) Započteme jen srážky, při kterých se částice přiblíží na vzdálenost (záměrný parametr) $r \in (r_{min}, r_{max})$. Za r_{min} se bere vzdálenost, při které je úhel odklonu trajektorie 90° . Srážky s $r < r_{min}$ jsou velmi málo pravděpodobné. Za r_{max} se volí Debyeův poloměr r_D . Pro $r > r_D$ je vzájemné působení částic slabé (Debyeovo stínění). Definujeme tzv. Coulombův logaritmus vztahem

$$\ln \Lambda \equiv \ln \frac{r_{max}}{r_{min}} \equiv \ln \frac{12 \pi (\varepsilon_0 k_B T_e)^{3/2}}{n^{1/2} e^3} \quad .\tag{7.4.1}$$

2) Přítomné magnetické pole ovlivňuje proces srážky zanedbatelně, tj. Larmorův poloměr je větší než maximální záměrný parametr srážky - Debyeův poloměr

$$r_L > r_D \quad (\Leftrightarrow \omega_p > \omega_c) \quad . \quad (7.4.2)$$

Boltzmannův srážkový integrál lze potom psát ve tvaru

$$S_{\alpha\beta} = \hat{L}_{\alpha\beta}[f_\alpha] \quad ;$$

$$\hat{L}_{\alpha\beta}[f_\alpha] \equiv \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \ln\Lambda \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha i}} \int \left(\frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_{\alpha k}} - \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial u_{\beta k}} \right) U_{ik} d^3 \mathbf{u}_\beta \quad , \quad (7.4.3)$$

$$U_{ik} \equiv \frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{\partial u_{\alpha i} \partial u_{\alpha k}} = \left(\frac{\delta_{ik}}{u_{\alpha\beta}} - \frac{(u_{\alpha\beta})_i (u_{\alpha\beta})_k}{u_{\alpha\beta}^3} \right) \quad .$$

Tento tvar srážkového integrálu nazýváme Landauův srážkový člen nebo Landauův operátor. Landauův operátor můžeme přepsat tak, aby explicitně byly prováděny jen operace s funkcí f_α , pro niž řešíme Boltzmannovu rovnici. Výrazy obsahující ostatní rozdělovací funkce označíme jako nové koeficienty, resp. potenciály φ_β a ψ_β :

$$\hat{L}_{\alpha\beta}[f_\alpha] \equiv \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{\epsilon_0^2} \ln\Lambda \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha i}} \left\{ \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial u_{\alpha i}} f_\alpha - \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial u_{\alpha i} \partial u_{\alpha k}} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_{\alpha k}} \right\} \quad ;$$

$$\varphi_\beta \equiv -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{u_{\alpha\beta}} f_\beta d^3 \mathbf{u}_\beta \quad , \quad (7.4.4)$$

$$\psi_\beta \equiv -\frac{1}{8\pi} \int u_{\alpha\beta} f_\beta d^3 \mathbf{u}_\beta \quad .$$

Z tvarů (7.4.3), (7.4.4) můžeme odvodit některé typické vlastnosti Landauova srážkového operátoru [56]:

- 1) Pro Maxwellova rozdělení f_α, f_β s teplotami $T_\alpha = T_\beta = T$ a středními rychlostmi $\bar{\mathbf{u}}_\alpha = \bar{\mathbf{u}}_\beta = \mathbf{v}$ je působení Landauova operátoru nulové.
- 2) Landauův operátor má tvar divergence v rychlostním prostoru - viz (7.4.4).
- 3) Landauův operátor je eliptický operátor tvaru

$$\hat{L}_{\alpha\beta}[f_\alpha] = A_{ik}^\beta \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_{\alpha i} \partial u_{\alpha k}} + B_i^\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_{\alpha i}} \quad , \quad (7.4.5)$$

$$A_{ik}^\beta \xi_i \xi_k > 0 \quad \text{pro } \forall \xi_i, \xi_k \quad .$$

- 4) Landauův operátor zachovává sumační invarianty

$$\sum_\alpha \int \Psi_\alpha \hat{L}_{\alpha\beta}[f_\alpha] d^3 \mathbf{u}_\alpha = 0 \quad . \quad (7.4.6)$$

5) Zavedeme-li entropii vztahem

$$S = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \ln f_{\alpha} d^3 \mathbf{u}_{\alpha} , \quad (7.4.7)$$

bude platit Boltzmannův H teorém

$$\left(\frac{dS}{dt} \right)_S = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \ln f_{\alpha} \hat{L}_{\alpha\beta}[f_{\alpha}] d^3 \mathbf{u}_{\alpha} \geq 0 , \quad (7.4.8)$$

tedy časová změna entropie způsobená srážkami je nezáporná, entropie může vlivem srážek jen růst.

Uvedme nyní relaxační doby některých dějů, které plynou z definice Landauova srážkového operátoru:

Doba τ_{α} za kterou částice α získají srážkami mezi sebou Maxwellovo rozdělení

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn_{\alpha}}{dt} \right)_S &= \int \hat{L}_{\alpha\alpha}[f_{\alpha}] d^3 \mathbf{u}_{\alpha} \approx \frac{n_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau_{\alpha} &= \frac{16 \pi \epsilon_0^2 (k_B T_{\alpha})^{3/2} \sqrt{m_{\alpha}}}{\sqrt{2} e_{\alpha}^4 n_{\alpha} \ln \Lambda} \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Jde o tzv. relaxační dobu k Maxwellovu rozdělení.

Doba τ_{ei} za kterou elektrony vymění svou nadbytečnou hybnost $m_e v_0$ s ionty

Předpokládáme, že elektrony mají makroskopickou hybnost $m_e v_0$ získanou např. malou vnější poruchou. Tato nadbytečná hybnost je podstatně menší než střední tepelná hybnost. Pro časovou změnu hustoty hybnosti lze psát

$$\left(\frac{dn_e m_e v_e}{dt} \right)_{e \rightarrow i} = \int m_e \mathbf{u}_e \hat{L}_{ei}[f_e] d^3 \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{Z^2 e^4 n_e^2 \ln \Lambda}{4 \pi \epsilon_0^2 k_B T_e} G \left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2 k_B T_e}{m_e}}} \right) \approx - \frac{n_e m_e v_e}{\tau_{ei}} ; \quad (7.4.8)$$

$$G(x) \equiv \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\int_0^x \xi^2 \exp[-\xi^2] d\xi}{x^2} \approx \begin{cases} \frac{2}{3 \pi^{1/2}} x & ; \quad x \ll 1 \\ \frac{1}{2 x^2} & ; \quad x \gg 1 \end{cases}$$

$G(x)$ se nazývá Chandrasekharova funkce. Pro malé předané impulsy ($x \ll 1$) snadno určíme relaxační dobu hybností předávaných od elektronů k iontům

$$\tau_{ei} = \frac{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2} \sqrt{m_e}}{\sqrt{2} e^4 Z n_e \ln \Lambda} \quad (7.4.9)$$

Doba τ_{ie} za kterou ionty vymění svou nadbytečnou hybnost $m_i v_0$ s elektrony

Podobným výpočtem nebo přímo ze zákona zachování hybnosti můžeme určit

$$\tau_{ie} = \frac{m_i}{m_e} \tau_{ei} = \frac{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2}{\sqrt{2} e^4} \frac{(k_B T_e)^{3/2} m_i}{Z n_e \ln \Lambda \sqrt{m_e}} \quad (7.4.10)$$

Doba τ_T za kterou ionty a elektrony vymění své energie (relaxace teploty)

Podobným výpočtem zjistíme

$$\begin{aligned} \tau_T &= \frac{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2}{e_\alpha^2 e_\beta^2} \frac{(k_B T_\alpha)^{3/2} (k_B T_\beta)^{3/2} \left[\frac{m_\alpha}{2 T_\alpha} + \frac{m_\beta}{2 T_\beta} \right]^{3/2}}{n_\beta \ln \Lambda \sqrt{m_\alpha m_\beta}} \approx \\ &\approx \frac{6 \pi^{3/2} \epsilon_0^2}{\sqrt{2} Z^2 e^4} \frac{(k_B T_e)^{3/2} m_i}{n_i \ln \Lambda \sqrt{m_e}} \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Z vyjádření jednotlivých časů vidíme, že platí

$$\tau_e \approx \tau_{ei} \ll \tau_i \ll \tau_T = \tau_{ie} \quad (7.4.12)$$

V nerovnovážném plazmatu tedy nejprve dojde k

- 1) "maxwellizaci" rozdělení elektronů a vyrovnání střední hybnosti elektronů vůči iontům.
- 2) Později dojde k "maxwellizaci" rozdělení iontů díky srážkám $i \rightarrow i$.
- 3) Nakonec dojde vyrovnání teplot rozdělení elektronů a iontů a k vyrovnání střední hybnosti iontů vzhledem k elektronům.

Časy dějů 1) až 3) rostou v poměru $(m_i/m_e)^{1/2}$. Ze známých relaxačních časů lze již snadno odvodit vztahy pro koeficient difúze, elektrickou a tepelnou vodivost plazmatu.

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha v_\alpha}; \\ \sigma_\alpha &= \frac{n_\alpha e^2}{m_\alpha v_\alpha}; \\ \lambda_\alpha &= \frac{3}{2} \frac{n_\alpha k_B^2 T_\alpha}{m_\alpha v_\alpha} \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

Elektrická vodivost je způsobena především elektrony a tepelná vodivost ionty, proto

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \sigma_e \approx \frac{n_e e^2}{m_e (v_e + v_{ei})} \approx \frac{n_e e^2}{m_e \left(\frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_{ei}} \right)} \approx \frac{8 \pi \epsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}{Z e^2 \ln \Lambda \sqrt{m_e}}; \\ \lambda &\approx \lambda_i \approx \frac{3}{2} \frac{n_i k_B^2 T_i}{m_i (v_i + v_{ie})} \approx \frac{3}{2} \frac{n_i k_B^2 T_i}{m_i \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_{ie}} \right)} \approx \frac{24}{\sqrt{2}} \frac{\pi \epsilon_0^2 k_B (k_B T_i)^{5/2}}{e^4 \ln \Lambda \sqrt{m_i}} \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

Tyto vztahy se nazývají Spitzerovy vztahy pro elektrickou a tepelnou vodivost.

7.5. Únik rychlých elektronů

Zabývejme se nyní urychlováním elektronů vnějším elektrickým polem v přítomnosti srážkových procesů. Pohybovou rovnici doplníme o změnu hybnosti způsobenou srážkami ve tvaru (7.4.8)

$$m_e \frac{dv_e}{dt} = eE - \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 k_B T_e} G\left(\frac{v_0}{c_e}\right), \quad (7.5.1)$$

kde $G(x)$ je Chandrasekharova funkce zavedená v (7.4.8) a c_e je tepelná rychlost elektronů $(2k_B T_e/m_e)^{1/2}$. Vzhledem k limitnímu chování Chandrasekharovy funkce - viz (7.4.8) ji můžeme s dosti vysokou přesností nahradit jednodušší funkcí

$$G(x) \approx \frac{\frac{2}{3\pi^{1/2}} x}{1 + \frac{4}{3\pi^{1/2}} x^3}. \quad (7.5.2)$$

Zavedme v rovnici (7.5.1) bezrozměrný čas, polohu, rychlost a elektrické pole

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{t_0}; & t_0 &\equiv \frac{1}{2\nu_e}, \\ \xi &= \frac{x}{x_0}; & x_0 &\equiv \frac{c_e}{2\nu_e}, \\ \vartheta &= \frac{v_e}{c_e}, \\ \mathcal{E} &= \frac{E}{E_0}; & E_0 &\equiv \frac{m_e c_e \nu_e}{e}, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

kde ν_e je srážková frekvence elektronů

$$\nu_e = \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{\sqrt{2} 6\pi^{3/2} \epsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2} \sqrt{m_e}}. \quad (7.5.4)$$

V bezrozměrných proměnných získá pohybová rovnice tvar

$$2 \frac{d\vartheta}{d\tau} = \mathcal{E} - \frac{\vartheta}{1 + \frac{4}{3\pi^{1/2}} \vartheta^3}. \quad (7.5.5)$$

Nyní provedeme substituci

$$\mathcal{W} = \vartheta^2 \quad (7.5.6)$$

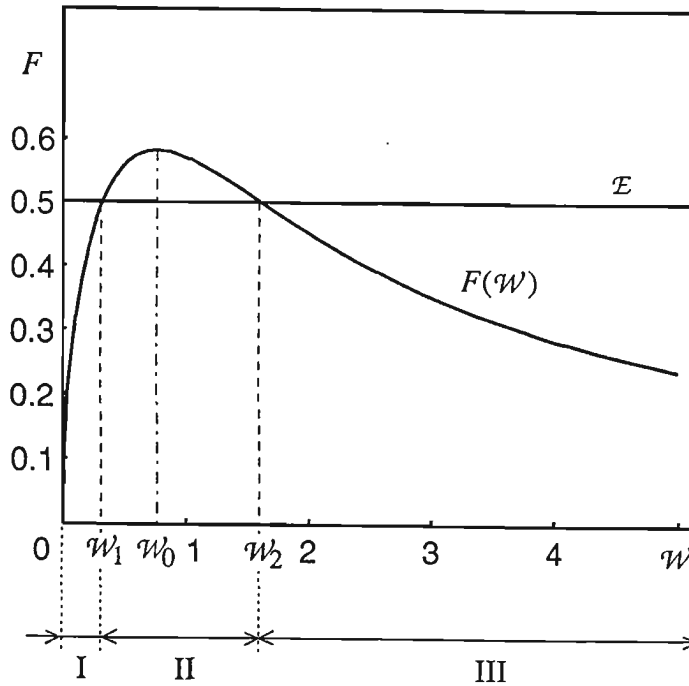
a za závislou proměnnou zvolíme ξ (nahradíme $d/d\tau \rightarrow \vartheta d/d\xi$):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{W}}{d\xi} &= \mathcal{E} - F(\mathcal{W}); \\ F(\mathcal{W}) &\equiv \frac{\mathcal{W}^{1/2}}{1 + \frac{4}{3\pi^{1/2}} \mathcal{W}^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

Veličina \mathcal{W} je kinetická energie urychlovaného elektronu v jednotkách $k_B T_e$ a rovnice (7.5.7) určuje nárůst kinetické energie v závislosti na vzdálenosti ξ . Průběh funkce $F(\mathcal{W})$ je znázorněn na obrázku 7.5.1. Maximum funkce nastává v bodě

$$\mathcal{W}_0 = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right)^{2/3} \approx 0.76 \quad ,$$

$$F(\mathcal{W}_0) = \max_{\mathcal{W} \in \langle 0, \infty \rangle} F = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{9} \right)^{1/3} \approx 0.58 \quad . \quad (7.5.8)$$



Obr. 7.5.1.: Průběh funkce $F(\mathcal{W})$.
Hodnoty \mathcal{W}_1 a \mathcal{W}_2 jsou vyznačeny pro hodnotu pole $\mathcal{E}=0.5$.

Definujme kritické elektrické pole relací

$$\mathcal{E}_c = \max_{\mathcal{W} \in \langle 0, \infty \rangle} F \quad . \quad (7.5.9)$$

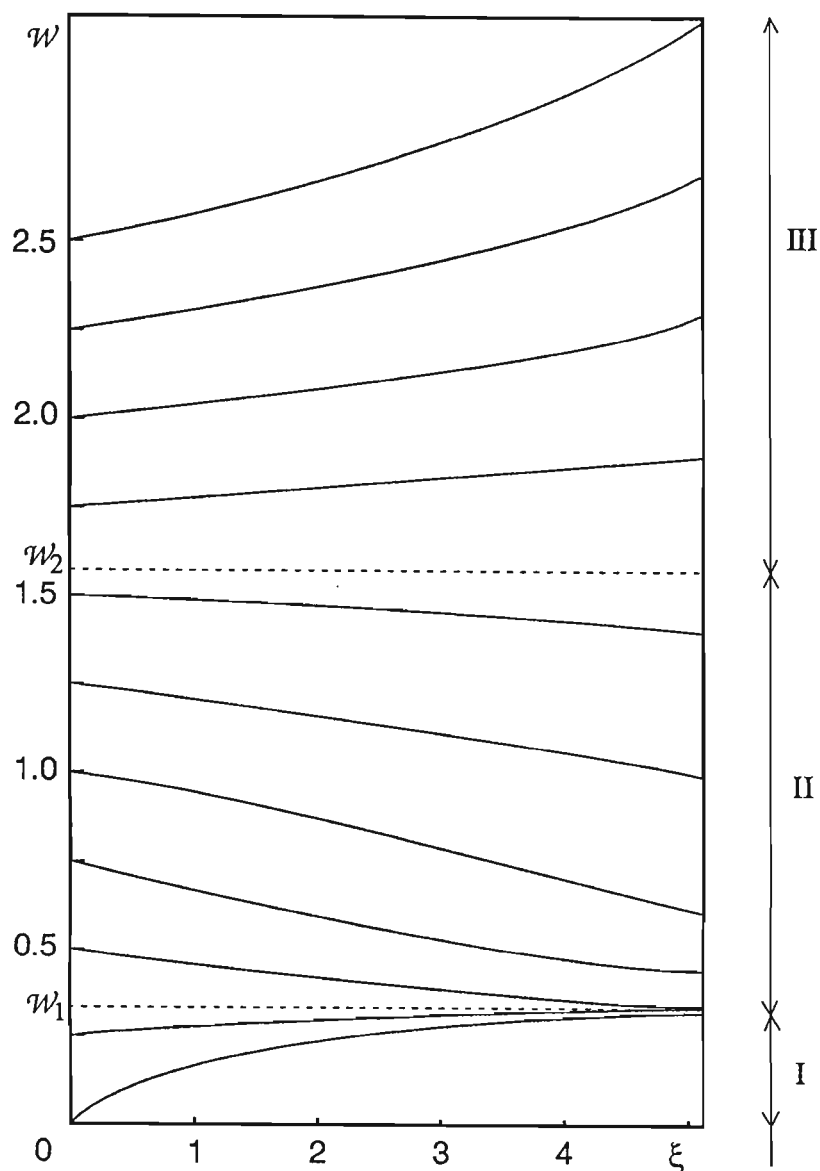
Pro podkritické hodnoty elektrického pole můžeme nalézt dvě hodnoty řešení rovnice

$$\mathcal{E} = F(\mathcal{W}) \quad . \quad (7.5.10)$$

Tyto hodnoty jsou v obrázku 7.5.1 označeny \mathcal{W}_1 a \mathcal{W}_2 a můžeme je najít řešením kubické rovnice (7.5.10):

$$\mathcal{W}_{1,2} = \frac{\pi^{1/2}}{\mathcal{E}} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} \right) \quad , \quad \text{kde} \quad (7.5.11)$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{3}{\pi^{1/4}} \mathcal{E}^{3/2} \right) \quad .$$



Obr. 7.5.2.: Numerické řešení rovnice (7.5.7) pro různé počáteční podmínky, $\mathcal{E}=0.5$ stejně jako na obr. 7.5.1.

Řešení diferenciální rovnice (7.5.7) bylo nalezeno numericky a jeho závislost na počáteční podmínce $\mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_{in}$ je zobrazeno na grafu v obr. 7.5.2. Řešení lze rozdělit do čtyřech skupin:

I. $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$, $\mathcal{W}_{in} < \mathcal{W}_1$; tj. $d\mathcal{W}/d\xi > 0$.

Elektrony jsou urychlovány až na energii \mathcal{W}_1 . Dalšímu urychlování zabrání srážkové procesy.

II. $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$, $\mathcal{W}_{in} \in (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$; tj. $d\mathcal{W}/d\xi < 0$.

Elektrony jsou srážkovými procesy brzděny na rychlost odpovídající energii \mathcal{W}_1 .

III. $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$, $\mathcal{W}'_{in} > \mathcal{W}'_2$; tj. $d\mathcal{W}/d\xi > 0$.

Vysoká počáteční rychlost elektronů způsobí snížení efektivního účinného průřezu srážek elektronů s ionty. Srážkové procesy jsou slabé a elektrony jsou urychlovány elektrickým polem na vysoké energie. Tyto počáteční rychlosti mají elektrony z chvostu Maxwellova rozdělení. Jejich urychlení je možné i pro podkritické hodnoty elektrického pole.

IV. $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$; tj. $d\mathcal{W}/d\xi > 0$.

V silných (nadkritických) elektrických polích je elektron mezi dvěma následujícími srážkami urychlen natolik, že účinný průřez srážek poklesne tak, že elektron je opět urychlován elektrickým polem na vysoké energie v podstatě beze srážek.

Určité malé procento elektronů může tedy v přítomnosti elektrického pole získat i značné energie. Odhad celkové energie, kterou z plazmatu odnášejí rychlé elektrony byl publikován spolu s těmito výsledky v práci [28].

8. ZÁVĚR

V této práci jsem se pokusil shrnout různé teoretické pohledy na problematiku z-pinčů - nejtypičtějších útvarů v plazmatu. Práce v sobě zahrnuje základní způsoby popisu plazmatu - částicový, magnetohydrodynamický a statistický, včetně driftů a některých vln a nestabilit. Práce vychází z experimentálních výsledků dosažených na katedře fyziky Elektrotechnické fakulty ČVUT a z některých vlastních teoretických výpočtů z období mého dvanáctiletého působení na katedře. Většina výsledků byla publikována v odborné literatuře nebo prezentována na našich i zahraničních konferencích o fyzice plazmatu.

Na závěr bych chtěl shrnout mé původní výsledky prezentované v této práci.

1) Rovnice pro prostorové deflekce ve šlírové metodě

Velmi častou metodou zobrazování plazmatu je šlírová fotografie, která využívá odklonu diagnostického paprsku (zpravidla laserového) na příčných nehomogenitách v plazmatu. Odkloněné paprsky jsou zobrazeny mimo ohnisko optické soustavy. To umožňuje separaci odkloněných a neodkloněných paprsků - například umístěním clonky (hrot, břit, kruhová clonka) do ohniska soustavy. Zbývající paprsky zobrazí na stínítku gradient příčných nehomogenit v plazmatu.

Pro jednoduché typy nehomogenit s cylindrickou symetrií je za pomoci Abelovy a Hilbertovy integrální transformace možná rekonstrukce průběhu indexu lomu a koncentrace v nehomogenitě.

Při popisu pohybu laserového diagnostického paprsku plazmatem se standardně používají malé odklony diagnostického paprsku na příčných nehomogenitách v plazmatu. Obecně je ale okamžitá osa otáčení paprsku kolmá jednak ke gradientu fázové rychlosti a jednak ke směru šíření paprsku. V kapitole 2.3. jsem ukázal odvození rovnic prostorové deflekce, které nemají žádné omezení na směr gradientu koncentrace ani na velikost deflekce. Jde o soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (pro parametrizovanou "polohu" paprsku) resp. šesti rovnic prvního řádu pro vektor ve směru šíření paprsku a parametrizovanou trajektorii.

V případě malých deflekcí a příčného gradientu koncentrace přechází tato soustava v běžnou rovnici používanou ve šlírové diagnostice.

2) Rovnováha pinče s válcovou symetrií

V kapitolách 3.3. a 3.4. jsem se zabýval řešením rovnováhy plazmatu v cylindrické geometrii. Předpokládal jsem mocninný průběh celkového proudu J v oblasti $\langle 0, r \rangle$ pinče, tj.

$$J(r) = \begin{cases} I \left(\frac{r}{R}\right)^2 & r < R \\ I & r \geq R \end{cases}, \quad \text{kde} \quad (8.1)$$

$$J(r) \equiv \int_0^r 2\pi r j(r) dr \quad (8.2)$$

Z podmínek rovnováhy je potom již možné určit rovnovážný průběh ostatních veličin: celkové proudové hustoty, proudové hustoty způsobené driftem zakřivení, proudové hustoty způsobené grad B driftem, magnetizační proudové hustoty, tlaku, magnetického pole, hustoty tlakové síly, hustoty Lorentzovy síly a síly dané zakřivením magnetických silokřivek. Výsledky závisí na hodnotě koeficientu α ve vztahu (8.1) a průběhy některých funkcí jsou na obr. 3.4.1. na straně 40.

Pro $\alpha < 2$ proud teče především v centru pinče, směrem do centra proudová hustota narůstá a diverguje. Na povrchu pinče teče minimální proud. Magnetické pole vytvořené tímto průběhem proudové hustoty roste se vzdáleností od centra pinče jako konvexní funkce. Pokles tlaku v závislosti na vzdálenosti od centra je konvexní pro $\alpha < 1.5$. To znamená výrazně husté jádro pinče a řídké okrajové vrstvy pinče. Pro $\alpha = 1.5$ je pokles tlaku lineární, pro $\alpha > 1.5$ konkávní.

Pro $\alpha = 2$ jde o případ konstantního průběhu proudové hustoty v pinči. Tato rovnováha je známa jako Bennetova rovnováha. Magnetické pole narůstá v pinči přesně lineárně a tlak klesá parabolicky od centra k povrchu (Bennetův průběh tlaku a koncentrace). V tomto případě je součet proudových hustot od ∇B driftu a od driftu zakřivení nulový. To znamená, že pro $\alpha = 2$ je veškerý proud magnetizační.

Pro $\alpha > 2$ proudová hustota roste od centra směrem k povrchu. Proud tedy teče převážně po povrchu pinče (skin efekt). Odpovídající průběh magnetického pole se příliš neliší od mezního případu $\alpha = 2$. Pole roste od centra k okraji pinče, růst však již není lineární. Tomu odpovídá i průběh tlaku velice podobný Bennetovu průběhu.

3) Výpočet elektrického pole v pinči z polarizačního driftu

Celková proudová hustota tekoucí plazmatem je dána součtem proudové hustoty způsobené grad B driftem, proudové hustoty způsobené driftem zakřivení, magnetizační proudové hustoty a proudové hustoty způsobené polarizačním driftem. První tři členy představují tzv. diamagnetický proud související s gradientem koncentrace plazmatu. Polarizační proud je způsoben časovou proměnností elektrického pole. Známe-li z experimentu průběh koncentrace a celkové proudové hustoty v prosoru a čase, můžeme určit ze vztahu pro polarizační drift závislost elektrického pole jak na radiální, tak na časové souřadnici. V kapitole 3.5. jsem odvodil výchozí vztah a uvedl i výsledek

konkrétního výpočtu pro hodnoty koncentrací naměřených na aparatuře katedry fyziky FEL ČVUT.

4) Doba komprese pro gas puff

Gas puff je dutý válcový sloupec plazmatu, kterým prochází proud vytvářející magnetické pole. Toto pole působí Lorentzovou silou na plazma, které je následně komprimováno k ose.

V kapitole 4.2. jsem odvodil jednoduchý vztah pro dobu komprese gas puffu. Výchozí rovnice byly numericky integrovány Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu s automaticky proměnným krokem. Závislost doby komprese na počátečním poloměru plazmové slupky byla téměř lineární. Numerický výpočet jsem proto aproximoval lineárním analytickým výrazem, ze kterého bylo možné odvodit jednoduchý vztah pro celkovou dobu komprese gas puffu v závislosti na hmotnosti, poloměru a délce gas puffu a na amplitudě a frekvenci protékajícího proudu.

V kapitole 4.3. jsem ještě našel Lagrangeovu funkci pro rovnici komprese gas puffu, tj. tuto rovnici je možné formulovat variačně.

5) MHD model transportu hmoty z-pinčem

V Kapitole 5.3. jsem navrhl magnetohydrodynamický model z-pinče. Rychlost je počítána z pohybové rovnice se dvěma silovými členy - Lorentzovým a tlakovým, koncentrace z rovnice kontinuity, proudová hustota je úměrná celkovému proudu $I(t)$ a Spitzerově vodivosti $\sigma \sim T^{3/2}$. Magnetické pole je určováno z Ampérova zákona a teplota je v současném stavu rozpracovaností modelu držena konstantní.

Model byl implementován na Lagrangeově síti pohybující se s plazmatem. V uzlových bodech sítě je lokalizována rychlost, magnetické pole a radiální souřadnice. V centrech sítě (v cylindrické geometrii pásů) je lokalizována proudová hustota, koncentrace a teplota plazmatu.

Vytvořené diferenční schema je pseudoexplicitní - počítá některé veličiny na pravých stranách v čase $t_n + \Delta t$, ale jen takové, které jsou již známy z předchozích výpočtů. Diferenční schema vykazuje stabilní chování a bylo testováno pro různé situace (lineární a bennetovský průběh počáteční koncentrace, konstantní i sinusoidální průběh celkového proudu, různý poměr p_{out}/p_{in} , hraniční podmínky, parametry pinče, ...). V práci jsem uvedl výsledky tří běhů programu - viz obrázky na stranách 60 až 66:

- a) Bennetova rovnováha: pinč s parametry Bennetovy rovnováhy viditelně nekomprimuje ani neexpanduje.

b) *oscilace*: pinč s parametry blízkými Bennetově rovnováze osciluje kolem nějakého středního poloměru.

c) *komprese*: pinč s parametry z laboratoře katedry fyziky FEL ČVUT komprimuje k ose a po půlperiodě proudu získává radiální rychlost asi $0.8 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$.

6) Únik rychlých elektronů

Elektrony v plazmatu mohou být urychlovány elektrickým polem i v přítomnosti srážkových procesů. V pohybové rovnici přibude srážkový člen vyjádřený Chandrasekharovou funkcí. Průběh Chandrasekharovy funkce je možné přibližně nahradit racionální lomenou funkcí. Z tvaru pohybové rovnice plyne existence kritického elektrického pole (je dáno maximem Chandrasekharovy funkce). Pro elektrická pole větší než kritická je elektron mezi dvěma následujícími srážkami urychlen natolik, že účinný průřez srážek poklesne tak, že elektron je urychlován na vysoké energie v podstatě beze srážek. V kapitole 7.5. jsem ukázal, že urychlování je možné i v podkritických elektrických polích, je-li počáteční rychlost elektronu větší než jistá kritická mez. Jde o elektrony z chvostu Maxwellova rozdělení, pro které je účinný průřez Coulombických srážek nízký. V obr 7.5.2 na straně 92 jsou prezentována řešení pohybové rovnice s Chandrasekharovým členem a v textu jsou odvozeny vztahy pro kritické elektrické pole i pro mezní kinetickou energii potřebnou k progresivnímu urychlování částice v subkritickém poli.

Závěrem bych rád poděkoval všem svým spolupracovníkům z katedry fyziky FEL ČVUT. Z dřívější doby jde zejména o doc. Ing. Josefa Malocha, DrSc.; Ing. Richarda Valentu, CSc.; RNDr. Miloše Uzla, CSc. Do tohoto období mé činnosti patří práce zabývající se kolejnicovými urychlovači plazmatu, variační formulací elektrodynamických modelů, nanášením tenkých vrstev, únikem rychlých elektronů z plazmových zhustků, polarizací plazmových zhustků a další.

Z doby současné patří můj dík především vedoucímu katedry doc. RNDr. Pavlu Kubešovi, CSc. a doc. Ing. Jozefu Kravárikovi, CSc. Také bych rád poděkoval svým diplomantům, kteří přispěli k dokončení některých částí započaté práce - Ing. Martinu Hauptvoglovi, Ing. Vítku Novotnému, Ing. Miroslavu Kovářovi a Jaroslavu Körnerovi.

9. LITERATURA

- [1] Bennet W. H.: Physical Review 45, 890 (1934)
- [2] Braginskij S.: ŽETF 33, 645 (1957)
- [3] Pease R. S.: Proc. Royal. Soc. B70, 445 (1957)
- [4] Tonti E.: Bull. Sciences Acad. R. de Belgique **55**, 137, 262 (1969)
- [5] Adams A.: *Plasma Deposition of Inorganic Films*, Solid State Technology **135** (1983)
- [6] Haas C. R., Noll R., Rühl F., Herziger C.: *Schlieren Diagnostics of the Plasma Focus*; Nuclear Fusion **24**, 1216 (1984)
- [7] Kozyrev A. V., Tinčurin K.A.: *Vosstanovlenie profila pokazatelja prelomlenia slaboprelomljajuščich prozračnyh neodnorodnostej*; Optika i spektroskopija **59**, 377 (1985)
- [8] Mejerovič B. E.: *Na puti k osuščestvleniu elektromagnitnovo kolapsa*; UFN **149**, 221 (1986)
- [9] NASA Technical Paper 2571; *Rail Accelerator for Space Transportation*, 1986
- [10] Borodič Ju. V. et al.: *K kačestvennomu analizu tenevych izobraženij prostranstvennyh neodnorodnostej optičeskoj plotnosti*; Optika i spektroskopija **62**, 1089 (1987)
- [11] Borodič Ju. V. et al.: *K analizu tenevych izobraženij pri silnyh krupnomasštabnyh vozmuščeniach sredy*; Optika i spektroskopija **62**, 894 (1987)
- [12] International Conferences on Plasma Louchers (1980 - San Diego, 1983 - Boston, 1986 - Austin, 1988 - Austin); published in IEEE Trans. on Magnetics **20**, **22**, **25** (1984, 1986, 1989)
- [13] Dokuka V. N., Samochin A. A.: *Ustojčivost' odnorodno vo dol osi z-pinča pri tokoch vyše toka Piza-Braginskovo*; Fizika plazmi **15**, 460 (1989)
- [14] Birdsall C. K.: *Particle in Cell Charged - Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC*; IEEE Trans. on Plasma Science **19**, 65 (1991)
- [15] Robson A. E.: *Lower-hybrid-drift Instability and Radiative Collapse of a Dense Z-pinch*; Phys. Fluids **B3**, 1461 (1991)
- [16] Rutkewitch I. M., Mond M.: *Amplification of fast Magnetosonic Waves and the Cut-off Spectrum*; J. Plasma Physics **48**, 345 (1992)
- [17] Kuljabin K. L.: *O vozrostanii toka z-pinče vsledstvie dissipacii*; Fizika plazmi **19**, 86 (1993)

- [18] Vichrev V. V., Rozanova G. A.: *Modelirovanie dinamiki razvitija peretjazki v z-pinče v usloviach suščestvenno termojadernovo teplovydelenia*; Fizika plazmi **19**, 79 (1993)
- [19] Linhart J. G.: *Propagation of Fusion detonations in Cylindrical Channels*; Il Nuovo Cimento **A**, 106 (1993)
- [20] Temporal M.: *Three Dimensional Simulation on Rayleigh-Taylor Instability*; Workshop "2D MHD Code for Axial Nucleon Detonation", Prague 1993
- [21] Miklaszewski R., Stepniewski W.: *Numerical Solutions of MHD Equations for some physical problems.*; preprint "Institute of Plasma Physics and Laser Microfusion", Warsaw, Poland 1994
- [22] Bilbao L.: *Finit Volume Lagrangian MHD Calculations*; preprint "University of Buenos Aires", Buenos Aires 1994
- [23] Kubeš P. et al.: *Schlieren Method with Narrow Screen for Electron Density Determination in a Plasma*; Czech J. Phys **B 35**, 155 (1985)
- [24] Kravárik J., Kubeš P.: *Electron Density Determination for Small Inhomogeneities in High Current and Low Pressure Discharge*; Acta Physica Slovaca **35**, 63 (1985)
- [25] Maloch J., Kulhánek P., Šobra K.: *Variational Formulation of Accelerating Process in a Rail Plasma Accelerator*; XIII SPIG, Šibenik, Jugoslávie 1986
- [26] Kulhánek P.: *Elektrodynamické modely urychlovačů plazmatu*; kandidátská disertační práce, FEL ČVUT, Praha 1987
- [27] Kulhánek P., Maloch J.: *Inverse variational Problem for the Rail Plasma Accelerator*; Czech J. Phys. **B37**,561 (1987)
- [28] Kulhánek P., Maloch J.: *An Escape of Fast Electrons from a Plasma Cluster in Subcritical Electric Field*; Czech J. Phys **B 39**, 717 (1989)
- [29] Uzel M., Maloch J., Kulhánek P.: *Two Dimensional Model of Electrode Radiative Heating in the Rail Plasma Accelerator*; Czech J. Phys. **B40**, 664 (1990)
- [30] Uzel M., Kulhánek P.: *Numerical Simulation in Plasma Physics*, VIII. Symp. on Elem Proc. and Chem. Reactions in Low Temperature Plasma, Stará Lesná 1994
- [31] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Píchal J., Kulhánek P.: *Filamentary Structure of the z-Pinch*; XX ICPIG, Pisa 1991
- [32] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Píchal J., Kulhánek P.: *The Interrupted z-pinch Filamentary Structure*; Czech J. Phys **B42**, 807 (1992)
- [33] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *The Interrupted z-pinch Dynamics Modeling*; International Conference on Plasma Science, Innsbruck, 1992
- [34] Hakr J., Kravárik J., Kubeš P., Kulhánek P., Píchal J., Pina L.: *Laser Optical and X-Rays Plasma Diagnostics of the Interrupted Gas Embedded z-Pinch*; IX. Symp. o elem. procesech a chem reakcích v nízkoteplotním plazmatu. Častá 1992.:

- [35] Kulhánek P.: *The z-pinch Plasma Column Equilibrium*; IX. Symp. o elem. procesech a chem reakcích v nízkoteplotním plazmatu. Častá 1992.:
- [36] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *Research Projects CTU*, Prague 1992
- [37] Kubeš P., Píchal J., Kulhánek P., Hakr J., Kravárik J., Krejčí A.: *Some problems of the Plasma Pinches research*; Acta Polytechnica **33**, 59 (1993)
- [38] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *Observation of the Jets in the Gas Embedded Interrupted z-Pinch*, Proc. 3rd Int. Conf. Dense z-Pinches, p. 38, Imperial College, London 1993
- [39] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *Interrupted z-Pinch in Argon.*; Proc. 16th Symp. Plasma Physics & Technology, p. 170, Prague 1993
- [40] Kubeš P., Píchal J., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P.: *Z-pinch Discharge Turbulent Energy Considerations*; 20th Fusion, Lisabon 1993
- [41] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J., Peřina V.: *Z-pinch Plasma jet*; IEEE Trans. on Plasma Science **21**, 605 (1993)
- [42] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *Pinčový jev v hustém plazmatu*; Čs. čas fyz. A, 1994
- [43] Hakr J., Kravárik J., Kubeš P., Kulhánek P., Píchal J.: *Diagnostics and Dynamics of the z-Pinch*; CTU Seminar, p. 87, Prague 1994
- [44] Kravárik J., Hakr J., Kubeš P., Kulhánek P., Píchal J.: *Optic Diagnostic devices for Pulse Discharge Plasma*; CTU Seminar, p. 89, Prague 1994
- [45] Kubeš P., Kravárik J., Hakr J., Kulhánek P., Píchal J.: *Stable Structure in the Interrupted Z-pinch*; IEEE Trans. on Plasma Science **22**, 986 (1994)
- [46] Hakr J., Kravárik J., Kubeš P., Kulhánek P., Novotný V., Píchal J.: *MHD model of the gas embedded interrupted z-pinch*, Proc. Int. Conf. on Plasma Science, Bochum 1994
- [47] Kulhánek P.: *MHD Model of the Z-pinch Mass Transfer*; Proc. "17 Symposium on Plasma Physics and technology", Prague 1995
- [48] Kulhánek P., Hakr J., Kubeš P., Kravárik J., Píchal J.: *Compression time of the gas puff z-pinch*; Sborník z konference "Workshop 95"; ČVUT Praha, VUT Brno 1995.
- [49] Hauptvogel M.: *Numerická simulace plazmafokusu*; diplomová práce, FEL ČVUT Praha 1991
- [50] Novotný V.: *Počítačová simulace radiálního přenosu hmoty do centra z-pinče v silnoprúdém výboji*; diplomová práce, FEL ČVUT, Praha 1993
- [51] Kracík J., Tobiáš J.: *Fyzika plazmatu*; ACADEMIA 1966
- [52] Jahoda F. C., Sawyer G. A.: *Optical Refractivity of Plasmas*. Methods of Experimental Physics IX, Part B, Academic Press, New York-London 1971

- [53] Kracík J., Šesták B., Aubrecht L.: *Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha 1974
- [54] *Plasma Physics - Advances in Science and Technology in the USSR*; ed. by B. Kadomtsev; MIR, Moskva 1981
- [55] Parker E.: *Kosmičeské magnetické polje*; MIR, Moskva 1982
- [56] Dnestrovskij Ju. N., Kostomarov D. P.: *Matematické modelování plazmy*, NAUKA, Moskva 1982
- [57] Kracík J., Maloch J., Šobra K.: *Urychlovače plazmatu a jejich použití*; ACADEMIA, Praha 1983
- [58] Alfvén H.: *Kosmičeská plazma*; MIR, Moskva 1983
- [59] Chen F. F.: *Úvod do fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha 1984
- [60] *Osnovy fyziky plazmy*; ed. by R. Z. Sagdeev; ENERGOIZDAT, Moskva 1984
- [61] Cairns R. A.: *Physics of Hot Plasmas*; Heyden & Son Inc., USA 1985
- [62] Peyret R., Taylor T. D.: *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, 1986
- [63] Vitásek E.: *Numerické metody*; SNTL, Praha 1987
- [65] Kadomtsev B. B.: *Kollektivní jevy v plazmě*; NAUKA, Moskva 1988
- [66] Alexandrov A. F., Bogdankevitch L. S., Ruchadze A. A.: *Osnovy elektrodinamiky plazmy*, VYŠŠAJA ŠKOLA, Moskva 1988
- [67] Rektorys K.: *Přehled matematiky*; ACADEMIA 1988
- [68] Peratt A. L.: *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, 1992
- [69] Patankar S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*; Hemisphere Publishing Corporation, 1992