

ELEKTRODYNAMICKÉ MODELY  
URYCHLOVAČŮ PLAZMATU

KANDIDÁTSKÁ DISERTAČNÍ PRÁCE

RNDr. Petr Kulhánek

ELEKTROTECHNICKÁ FAKULTA ČVUT, KATEDRA FYZIKY

ELEKTRODYNAMICKÉ MODELY  
URYCHLOVAČŮ PLAZMATU

kandidátská disertační práce

disertant: RNDr. Petr Kulhánek

školitel: Doc. Ing. Josef Maloch, DrSc.

PRAHA 1987

OBSAH

Seznam některých použitých symbolů .....	4
1. <u>PŘEHLED O SOUČASNÉM STAVU PROBLEMATIKY</u> ...	8
1.1. Urychlovače plazmatu .....	8
1.2. Možnosti využití urychlovačů plazmatu ....	12
1.3. Základní rovnice popisující urychlovač ...	14
1.4. Urychlovače vyvinuté na katedře fyziky FEL ČVUT .....	15
2. <u>CÍL KANDIDÁTSKÉ DISERTAČNÍ PRÁCE</u> <u>A ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ</u> .....	23
3. <u>ELEKTRODYNAMICKÝ MODEL</u> .....	25
3.1. Úvod .....	25
3.2. Inversní variační problém .....	30
3.3. Variační formulace ED modelu .....	35
3.4. Některé speciální případy .....	42
3.5. Numerické výpočty .....	48
4. <u>DVOUBODOVÝ MODEL PRO URYCHLOVAČ V SILNÉM</u> <u>VNĚJŠÍM MAGNETICKÉM POLI</u> .....	58
4.1. Úvod .....	58
4.2. Formulace dvoubodového modelu .....	59
4.3. Souvislost dvoubodového modelu s ED modelem .....	64
4.4. Anisotropní vodivost .....	65
4.5. Polarizace plazmatu .....	67
4.6. Variační formulace polarizačního jevu ...	75
5. <u>EXPLODUJÍCÍ DRÁTKY</u> .....	78
5.1. Úvod .....	78

5.2. Řešení obvodové rovnice s vlnou vypařování ve tvaru mocninné řady .....	84
5.3. Výsledky .....	87
6. <u>VÝSLEDKY DISERTACE S UVEDENÍM NOVÝCH POZNATKŮ. KONKRÉTNÍ ZÁVĚRY PRO DALŠÍ ROZVOJ VĚDY A UPLATNĚNÍ VE SPOLEČENSKÉ PRAXI</u> .....	92
Literatura .....	97

Seznam některých použitých symbolů

A	amplituda proudu
B	indukce celkového magnetického pole
$B_0$	indukce vnějšího magnetického pole
$B_{in}$	indukce vlastního magnetického pole
$C_0$	kapacita kondenzátorové baterie
$C'$	kapacita fiktivního kondenzátoru, který odpovídá vnějšímu magnetickému poli
$d_w$	průměr drátku
$e$	elementární náboj
$e_\alpha$	náboj částic druhu $\alpha$
E	intenzita elektrického pole
$E_I$	intenzita elektrického pole kolmo na elektrody
$E_P$	polarizační pole
F	síla
$\mathcal{F}$	Rayleighova disipační funkce
h	vzdálenost elektrod
$\mathcal{H}$	Hamiltonova funkce
I	elektrický proud
j	proudová hustota
$j_I$	proudová hustota kolmo na elektrody
$j_P$	proudová hustota polarizačního proudu
$j_{I0}$	amplituda veličiny $j_I$
$j_{P0}$	amplituda veličiny $j_P$
k	Boltzmannova konstanta
l	délka elektrod ( hlavně )
$l_w$	délka drátku
$l_x$	polarizační délka

L	celková indukčnost
$L_0$	indukčnost vnějšího obvodu
$L_1$	indukčnost na jednotku délky elektrod
$\mathcal{L}$	Lagrangeova funkce
m	celková urychlovaná hmotnost
$m_0$	hmotnost mechanické zátěže a plazmatu
$m_1$	hmotnost nabalovaná na jednotku délky elektrod
$\vec{m}$	jednotkový vektor ve směru magnetického pole
n	koncentrace
$n_\alpha$	koncentrace částic druhu $\alpha$
p	zobecněná hybnost, hybnost
P	tlak za zhustkem
$P^*$	tlak před zhustkem (pracovní tlak)
$P_0$	počáteční tlak exploze drátku
q	zobecněná souřadnice
Q, $Q_c$	náboj
R	celkový odpor obvodu
$R_0$	odpor vnějšího obvodu
$R_p$	odpor plazmatu
$R_1$	odpor elektrod na jednotku délky
$r_w$	poloměr drátku
S	průřez zhustku podél elektrod
$S'$	průřez zhustku napříč urychlovačem
t	čas
T	teplota
U	napětí na elektrodách
$U_0$	počáteční napětí na kondenzátorové baterii

$v$	rychlost zhustku
$v_\alpha$	rychlost částic druhu $\alpha$
$v_0$	rychlost vlny vypařování
$V_0$	objem expanzní komůrky
$\mathcal{V}$	potenciál
$W_P$	polarizační energie
$x$	poloha zhustku
$x_\alpha$	poloha částic druhu $\alpha$
$\alpha$	stupeň ionizace
$\beta$	koeficient odporu tření o elektrody
$\gamma$	koeficient polytropy
$\zeta$	koeficient útlumu
$\delta_{ij}$	Kroneckerův symbol
$\Delta$	bezrozměrný útlum
$\varepsilon$	levá strana Lagrangeových rovnic
$\varepsilon_0$	permitivita vakua
$z$	bezrozměrný proud
$\alpha$	koeficient odporu tření o prostředí před zhustkem
$\nu$	srážková frekvence
$\xi$	bezrozměrná souřadnice
$\Pi$	$\int_0^t p(t)dt$
$\rho$	hustota hmoty
$\rho_e$	hustota náboje
$\sigma_0$	vodivost
$\vec{\sigma}$	tenzor vodivosti
$\sigma$	povrchové napětí
$\tau$	bezrozměrný čas

$\tau_{ei}$	střední doba mezi dvěma následujícími srážkami elektronů s ionty
$\psi$	magnetický indukční tok
$\omega$	úhlová frekvence
$\omega_e$	cyklotronová frekvence elektronů
$\omega_i$	cyklotronová frekvence iontů
$\omega_p$	plazmová frekvence
$\omega_0$	vlastní frekvence el. obvodu
$\Omega_{...}$	úhlová frekvence
$\Omega$	bezrozměrná úhlová frekvence

Některé další bezrozměrné koeficienty používané v textu jsou označeny symboly  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $f_p$ ,  $f_T$ ,  $\lambda_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\gamma$ .



## 1. PŘEHLED O SOUČASNÉM STAVU PROBLEMATIKY

### 1.1. Urychlovače plazmatu

Myšlenka urychlování plazmatu elektrodynamickými silami vznikla již na konci 50. let a navázala na tehdejší zkušenosti s vývojem a sledováním různých rázových trubic. První urychlující systémy tohoto druhu byly popsány v pracích [18,19,20]. Výbojem vzniklým mezi dvěma elektrodami protéká elektrický proud s proudovou hustotou  $\vec{j}$ . Tento proud vytváří vlastní magnetické pole  $\vec{B}$ . Lorentzova síla  $\vec{j} \times \vec{B}$  potom zpětně působí na vzniklé plazma ( resp. proudovou vrstvu ) a urychluje ho na rychlosti značně převyšující hodnotu  $10^4$  m/s. Za tři desetiletí vývoje těchto zařízení bylo odzkoušeno mnoho typů, které se liší zdrojem energie, geometrií elektrod, pracovním tlakem, způsobem plnění a iniciací výboje, materiálem elektrod a druhem náplně pracovního prostoru, pracovním režimem atd.

Nejčastějším zdrojem energie bývá kondenzátorová baterie o kapacitě několika desítek až stovek mikrofaradů při napětích desítek kilovoltů. V poslední době se opět objevují pokusy s indukčním zdrojem energie. Výhodou je možnost dosáhnout větší účinnosti urychlovacího procesu, ale vlastní realizace indukčního zdroje je mnohem obtížnější než realizace zdroje kapacitního.

Z tvarů elektrod jmenujme alespoň koaxiální uspořádání (dva sousední válce) [5,9,10], rovinné uspořá-

dání (tzv. kolejnicový urychlovač s dvěma rovnoběžnými elektrodami ve tvaru širokých plátů) [2] , drátové elektrody [16] , kuželové uspořádání [4] . Výhodou koaxiální geometrie je snadný teoretický popis okrajových efektů, komplikovanější je ale diagnostika plazmatu. Tento problém lze řešit nahrazením vnější elektrody soustavou rovnoběžných vodičů, čímž je umožněn snadnější přístup do prostoru urychlovače [5] . V koaxiální geometrii je možné získat značně vysoké teploty vylétávajícího plazmatu, dojde-li k vytvoření tzv. plazmafokusu [21] . Vlastní magnetické pole v koaxiální geometrii není homogenní, u vnitřní elektrody je silnější. Tím dochází k dalším jevům komplikujícím popis plazmatu (  $\vec{v} \times \vec{B}$  drift, deformace proudové vrstvy).

V rovinné geometrii lze docílit značné homogeneity vlastního magnetického pole, jsou-li elektrody dostatečně široké. Také přístup do prostoru urychlovače pro různé sondy je relativně snadný. Hůře popsateľné jsou okrajové efekty. Při použití tříelektrodové konfigurace (tři rovinné rovnoběžné elektrody) s prostřední elektrodou uzemněnou [17] využijeme částečně symetrie koaxiálního uspořádání s centrální elektrodou a současně výhody rovinné geometrie.

Uspořádání ve tvaru drátových elektrod [16] ponechává výhodu snadné diagnostiky plazmatu. Zhoršuje se možnost popisu okrajových efektů, zvětšuje se nehomogenita vlastního magnetického pole. Oproti rovinné

geometrii elektrod je ale při drátovém uspořádání větší indukčnost elektrod na jednotku délky [16] a tím i větší hodnota urychlující síly  $\frac{1}{2}L_1 I^2$  (viz. kapitola 3).

K největším výhodám kuželového uspořádání patří snížení eroze elektrod a tím i kontaminace plazmatu na minimum.

Podle pracovního tlaku můžeme urychlovače rozdělit na dvě skupiny. Urychlovače pracující za sníženého tlaku a urychlovače pracující za atmosférického tlaku. Urychlovače za sníženého tlaku se používají při základním výzkumu parametrů vzniklého plazmatu, k nanášení tenkých vrstev, k experimentům s korekčními raketovými motory atd. Urychlovače pracující za atmosférického tlaku, které jsou vyvíjeny zejména v poslední době, se využívají k přemísťování a urychlování různých drobných těles, které před sebou může tlačit plazmový zhustek. Takto urychlovaná tělesa mohou dosáhnout i značných rychlostí [15,60].

Způsob plnění prostoru urychlovače a iniciace výboje je další důležitý činitel, který spolurozhoduje o typu urychlovače. Nejběžnější jsou tři typy plnění a ionizace výboje: 1) statické (s určitým tlakem), 2) pulsní, 3) explodující drátek. Při pulsním plnění se do vyčerpaného prostoru urychlovače napustí určité množství plynu (např. elektromagnetickým ventilem), ve kterém se realizuje výboj. Tak vzniká plazmový zhustek, který je dále urychlován. Exploze drátků (viz. kapitola

5) lze použít za atmosférického i sníženého tlaku. Jde o velmi jednoduchý způsob získání plazmatu o přesně definované počáteční hmotnosti.

Materiál elektrod a prostředí ve kterém se realizuje výboj má značný význam u experimentů v plazmochemii a pro nanášení tenkých vrstev. Materiál elektrod je při pohybu zhustku erodován a stává se součástí plazmatu. Množství erodované hmotnosti elektrod je úměrné  $\int_0^t I^2 dt$  [1]. Konstanta úměrnosti závisí na geometrii uspořádání a na materiálu.

Urychlovače plazmatu mohou pracovat v jednozhustkovém režimu nebo v vícezhustkovém režimu. Další zhustky mohou vzniknout po první půlperiodě výbojového proudu, kdy na počátku urychlovače dochází k novému výboji a formování dalšího zhustku. Vícezhustkový režim bývá zpravidla nežádoucí a různými prostředky se zamezuje tvorbě dalších zhustků [2]. Způsob formování zhustku a jeho další vývoj u pulsního napouštění závisí velmi silně na časové prodlevě mezi napuštěním plynu do urychlovače a přivedením napětí na elektrody. Velikost tohoto časového intervalu může ovlivnit počet vzniklých zhustků, jejich následné štěpení a rychlost, čistotu plazmatu atd. [3].

## 1.2. Možnosti využití urychlovačů plazmatu

Povšimněme si nyní některých aplikačních možností urychlovačů plazmatu, které se objevily ve třech desetiletích jejich bouřlivého rozvoje.

Urychlovače plazmatu se používají v plazmochemii pro uskutečnění chemických reakcí, které probíhají jen za vysokých teplot. Zejména v pulsním režimu lze těchto teplot dosáhnout relativně snadno a ve vzniklém nerovnovážném plazmatu proběhnou příslušné reakce. Po opuštění urychlovače plazma expanduje a vzniklé chemické produkty se velmi rychle ochladí [22].

Některá zařízení využívají reakční sílu pulsního plazmatu. Jde například o korekční motory pro kosmické lodě, které byly odzkoušeny s úspěchem na amerických i sovětských kosmických sondách [23]. Malé množství plynu urychlené ve vakuu na značné rychlosti vytvoří reaktivní sílu, která ovlivňuje pohyb sondy.

Velmi výhodné je také nanášení tenkých vrstev za pomoci urychlovačů plazmatu. Výboj hoří ve vhodné atmosféře a kov odpařený z elektrod může s touto atmosférou za vysokých teplot reagovat. Stojí-li plazmovému zhustku v cestě vhodný terčik je na něho po několika (řádově sto) dopadech plazmových zhustků nanesena ultrajemná, mimořádně přílnavá tenká vrstva, jejíž tloušťku lze regulovat počtem zhustků. Tuto metodu vyvinula skupina polských odborníků vedená M. Sokolowskim [24,25,57]. S úspěchem nanášeli vrstvy diamant-

tu a diamantupodobných forem uhlíku (uhlíkové elektrody), vrstvy nitridů titanu (titanové elektrody v atmosféře  $N_2$ ) a další. Přehled některých výsledků je v tabulce 5 [57].

Urychlovače plazmatu slouží také k některým simulačním studiím. Lze za pomoci nich simulovat např. interakci slunečního větru s magnetickým polem planet [26]. Sluneční vítr je v těchto experimentech nahrazen proudem plazmatu vystupujícím z koaxiálního urychlovače a magnetické pole je tvořeno systémem cívek. Některé studie se týkají i aerodynamických problémů, např. simulace návratu kosmické lodi do atmosféry Země.

Velmi zajímavé experimenty byly provedeny koncem 60. a začátkem 70. let [41]. Drobné skleněné nebo kovové kuličky byly urychleny plazmovým zhuštěním na vysoké rychlosti a nastřeleny na olověný terč. Jejich značná kinetická energie způsobila tvorbu mikrokráterů. Sledován byl tvar a hloubka mikrokráterů a jejich struktura. Ukázala se dobrá shoda s mikrokrátery známými z materiálů přivezených z Měsíce.

V posledních letech se velmi rozvíjí urychlovače plazmatu pracující za atmosférického tlaku, které jsou schopny přemísťovat a urychlovat mechanickou zátěž (tělesa). Plazma je zpravidla vytvořeno explozí drátka. V podstatě existují dva typy těchto urychlovačů. První z nich kombinuje sílu tlakové vlny od exploze drátka s vlastním elektrodynamickým urychlením plaz-

matu. V běžných zařízeních je však elektrodynamické urychlení malé, podstatný vliv má až při velkých kapacitách kondenzátorové baterie nebo při použití indukčního zdroje energie. Druhý typ využívá jen exploze drátku, jejíž účinky mohou značně převýšit i účinky klasických chemických trhavin. Vzniklé plazma potom svou expanzí urychlí mechanickou zátěž. Tím, že se u tohoto typu nevyužívá elektrodynamických sil, není již třeba, aby se mechanická zátěž pohybovala mezi např. rovinnými elektrodami, ale může být vedena válcovou trubkou (hlavní). Ovšem zde již nejde o urychlovač plazmatu v původním slova smyslu.

### 1.3. Základní rovnice popisující urychlovač

Děje v urychlovači plazmatu lze popsat dvojitým způsobem. Jednou z možností je sledovat vnitřní parametry plazmatu, jeho strukturu a chování ve vnějších polích. To je možné udělat v rámci magnetohydrodynamických nebo statistických metod. V této práci se omezíme na druhou z možností - popis v rámci "bodových" modelů, které nezajímají jednotlivé parametry plazmatu, ale jen jeho globální charakteristiky, které určují dynamiku urychlovacího procesu [1].

Jednoduché schema urychlovače je znázorněno na obr. 5. Vnější obvod urychlovače je popsán soustředěnými parametry  $L_0$ ,  $R_0$ ,  $C_0$  a je spínán řízeným jiskřištěm  $J$ . Předpokládáme, že indukčnost celého obvodu a

hmotnost zhustku rostou při pohybu zhustku lineárně s jeho polohou  $x$ , tj

$$(1.1) \quad L(x) = L_0 + L_1 x$$

$$(1.2) \quad m(x) = m_0 + m_1 x \quad .$$

Pohyb zhustku je (za přítomnosti vnějšího magnetického pole  $B_0$ , které je rovnoběžné s vlastním magnetickým polem) popsán rovnicemi [1]

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt}[L(x)I] + (R_0 + R_P)I + \frac{1}{c_0} \int_0^t I dt + B_0 h v = U_0$$

$$(1.4) \quad \frac{d}{dt}[m(x)v] = \frac{1}{2} L_1 I^2 + B_0 h I \quad .$$

Význam symbolů je dán v kapitole 3. První rovnice je obvodová rovnice a druhá rovnice je Newtonova pohybová rovnice zhustku. Tyto rovnice je možné doplnit o další členy, jak bude ukázáno v kapitole 3, a rozšířit je tak pro všechny 4 typy urychlovačů vyvinutých na katedře fyziky FEL ČVUT.

#### 1.4. Urychlovače vyvinuté na katedře fyziky FEL ČVUT

Na katedře fyziky FEL ČVUT byly v průběhu let vytvořeny a experimentálně odzkoušeny celkem 4 typy urychlovačů. První z nich měl drátové elektrody, pra-



coval za sníženého tlaku. Cílem bylo ověřit možnosti urychlování plazmatu v podobných zařízeních. Drátové elektrody byly voleny z důvodu vyšší hodnoty indukčnosti elektrod na jednotku délky a tím i větší urychlující síly [16]. U tohoto urychlovače byl také zkoumán vliv vnějšího magnetického pole na urychlovací proces. Urychlovač je znázorněn na obr. 1 a některé jeho parametry jsou v tabulce 1.

Druhým typem realizovaným na tomto pracovišti je tříelektrodový kolejnicový urychlovač s rovinnou geometrií [17]. Šířka elektrod 5 cm a vzdálenost 1,8 cm zajišťují alespoň přibližnou homogenitu magnetického pole mezi elektrodami. Tento urychlovač bylo možné zapojit buď jako tříelektrodový kolejnicový urychlovač (prostřední elektroda je uzemněna a napájení je z kondenzátorové baterie  $2 \times 93,4 \mu\text{F}$ ) nebo jako dvouelektrodový kolejnicový urychlovač (jedna elektroda je nezapojena a obě části kondenzátorové baterie tvoří nyní zdroj pro zbývající elektrody o kapacitě  $186,6 \mu\text{F}$ ). Výbojová trubice je předčerpávána rotační vývěvou RV 500 a na pracovní tlak řádově  $10^{-3}$  Pa je dočerpávána difúzní olejovou vývěvou DV 250. Pracovní plyn byl napouštěn pulsně, elektromagnetickým ventilem. Urychlovač je znázorněn na obr. 2 a jeho parametry jsou v tabulce 2.

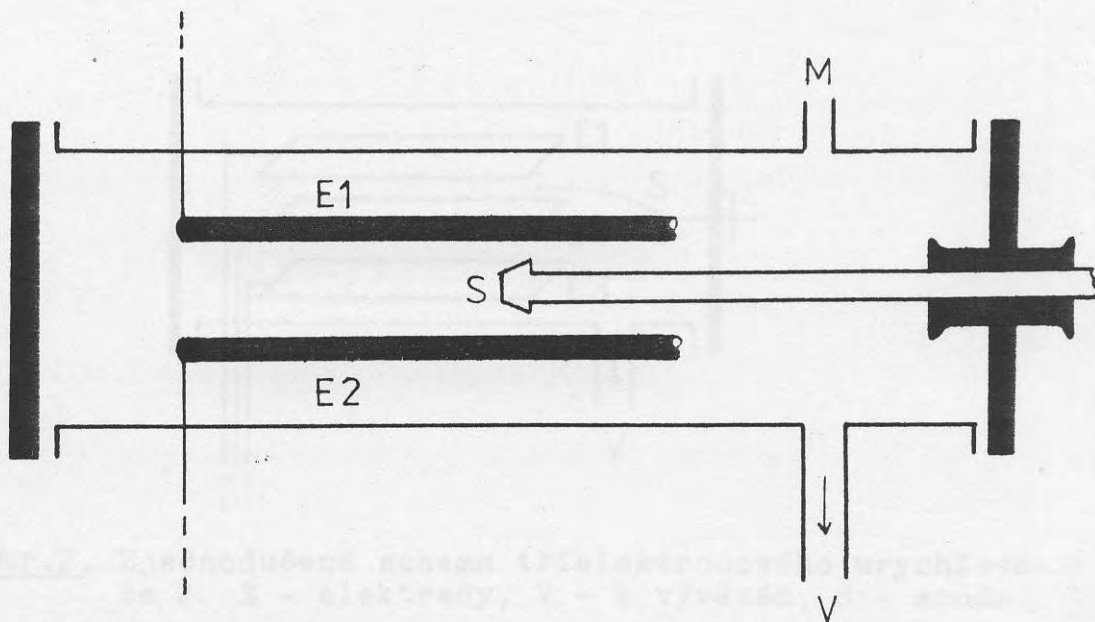
Třetí zkonstruovaný typ urychlovače je opět kolejnicový urychlovač, ale tentokrát pracující za at-

atmosférického tlaku a schopný urychlovat mechanickou zátěž z aluminidu na rychlosti 250 m/s. Plazma je tvořeno explozí drátku, který je přímo součástí mechanické zátěže [60]. Tento urychlovač byl vytvořen ve dvou verzích pro urychlování mechanické zátěže o hmotnosti 5 g a 1 g. Některé parametry 1. verze jsou v tabulce 3 a urychlovač je znázorněn na obr. 3.

Poslední urychlovač vyvinutý v roce 1987 je znázorněn na obr.4 a některé parametry jsou v tabulce 4. Tentokrát je využívána jen tlaková síla exploze drátku a elektrodynamické síly se již na urychlování nepodílejí. Urychlovač pracuje na vzduchu za atmosférického tlaku.

průměr elektrod	1	0,5 mm
průměr drátku	0,5	0,5 mm
vzdálenost elektrod	2	2 mm
kapacita kond. bat.	0,1	10,5 pF
napětí na kond. bat.	U <sub>0</sub>	100 ± 50 V
pracovní tlak	P <sub>0</sub>	0,1 ± 0,05 MPa
houbová rychlost chůze	v	~ 3 · 10 <sup>4</sup> m/s <sup>2</sup>
materiál elektrod		stál.

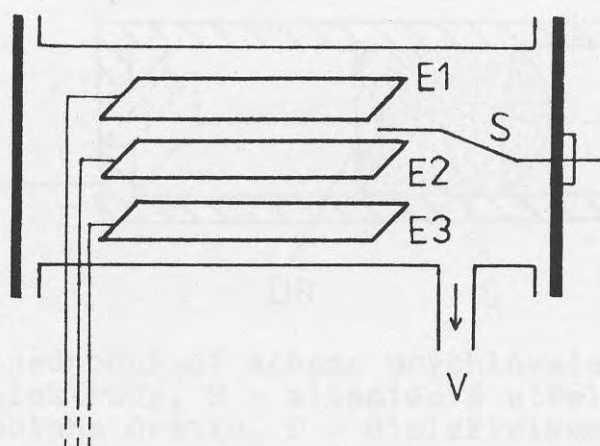
Tab. 3. Některé parametry urychlovače 1.



Obr. 1. Zjednodušené schéma urychlovače 1. E - drátové elektrody, V - k rotační a difúzní vývěvě, M - Penningův vakuoměr, S - sonda.

délka elektrod	l	80 cm
průměr elektrod	d	0,5 cm
vzdálenost elektrod	h	2 cm
kapacita kond. bat.	$C_0$	10,8 $\mu$ F
napětí na kond. bat.	$U_0$	(10 ÷ 16) kV
pracovní tlak	$P^*$	$10^{-3}$ Pa
dosažená rychlost zhustku	v	$\sim 5 \cdot 10^4$ ms <sup>-1</sup>
materiál elektrod		ocel

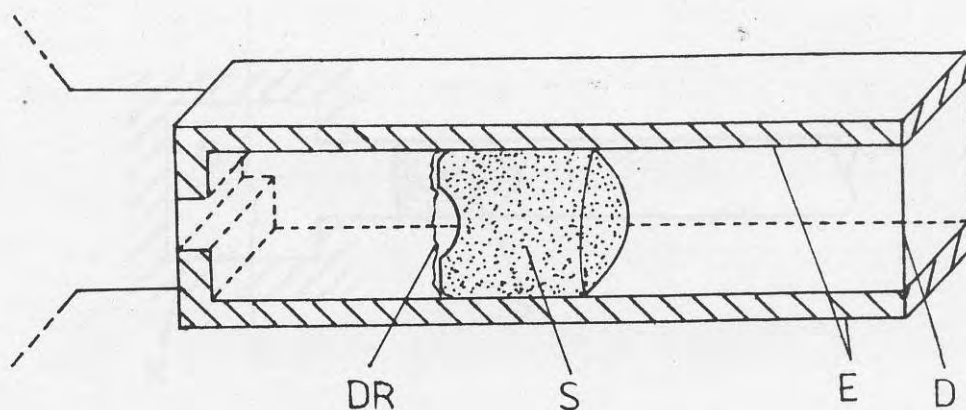
Tab. 1. Některé parametry urychlovače 1.



Obr.2. Zjednodušené schéma tříelektrodového urychlovače 2. E - elektrody, V - k vývěvám, S - sonda.

počáteční hmotnost	$m_0$	$5 \cdot 10^{-9}$ kg
hmotnost nabal. na jedn. délky elektrod	$m_1$	$4 \cdot 10^{-8}$ kg/m
délka elektrod	$l$	40 cm
vzdálenost elektrod	$h$	1,8 cm
šířka elektrod		5 cm
tloušťka elektrod		1,2 cm
indukčnost přívodů	$L_0$	$7,8 \cdot 10^{-6}$ H
indukčnost elektrod na jedn. délky	$L_1$	$1,0 \cdot 10^{-6}$ H/m
kapacita kond. baterie	$C_0$	$2 \times 93,4 \mu\text{F}$
odpor přívodů a plazmatu	$R_0 + R_p$	$0,07 \Omega$
napětí na kond. baterii	$U_0$	$(4 \div 18)$ kV
pracovní tlak	$P^*$	$\sim 10^{-3}$ Pa
rychlost zhustku	$v$	$\geq 10^4$ m/s
teplota zhustku	$T$	$\sim 30\ 000$ K

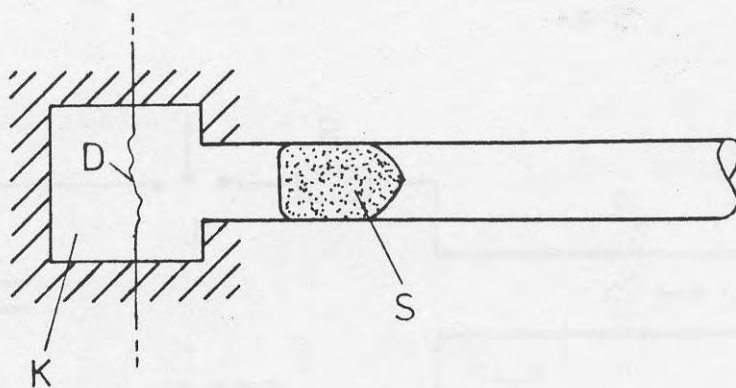
Tab. 2. Některé parametry urychlovače 2.



Obr. 3. Zjednodušené schéma urychlovače 3. E - měděné elektrody, S - alkamidová střela, DR - původní poloha drátku, D - dielektrikum .

hmotnost střely	$m_0$	5 g
hmotnost nabal. na j. délky	$m_1$	$3,2 \cdot 10^{-4}$ kg/m
délka elektrod	l	50 cm
vzdálenost elektrod	h	1,8 cm
šířka elektrod		1,8 cm
indukčnost přívodů	$L_0$	$7,8 \cdot 10^{-6}$ H
indukčnost el. na j. délky	$L_1$	$2,5 \cdot 10^{-6}$ H/m
kapacita kond. baterie	$C_0$	177 $\mu$ F
napětí na kond. baterii	$U_0$	10 kV
odpor přívodů a plazmatu	$R_0 + R_P$	0,07 $\Omega$
pracovní tlak	$P^*$	$10^5$ Pa
poč. tlak exploze drátku	$P_0$	$\sim 10^7$ Pa
poč. objem za zhustkem	$V_0$	$5,1 \cdot 10^{-6}$ m <sup>3</sup>
délka drátku	$l_W$	2 cm
průměr drátku	$d_W$	0,2 mm
rychlost střely	v	$\sim 250$ m/s

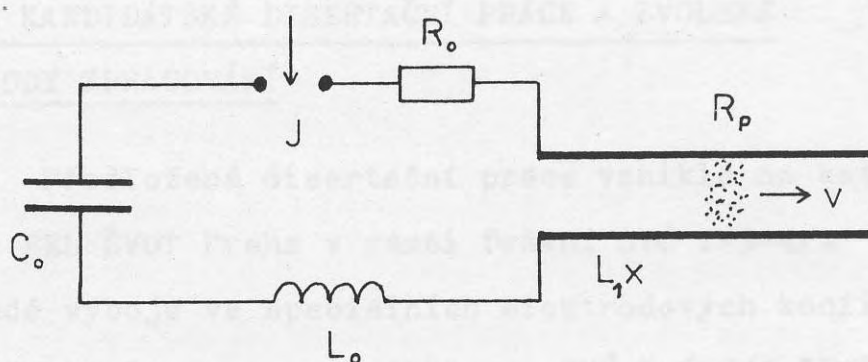
Tab. 3. Některé parametry urychlovače 3 .



Obr. 4. Zjednodušené schéma urychlovače 4. D - drátek, K - komůrka, S - střela.

hmotnost střely	$m_o$	0,47 g
vnitřní průměr hlavně	d	5,8 mm
délka hlavně	l	40 cm
délka drátku	$l_w$	2 cm
průměr drátku	$d_w$	0,2 mm
kapacita kond. baterie	$C_o$	177 $\mu$ F
indukčnost přívodů	$L_o$	$7,8 \cdot 10^{-6}$ H
pracovní tlak	$P^*$	$10^5$ Pa
počáteční tlak	$P_o$	$\approx 5 \cdot 10^7$ Pa
počáteční objem (objem komůrky)	$V_o$	2,6 cm <sup>3</sup>
odpor přívodů a plazmatu	$R_o + R_p$	$\sim 0,07 \Omega$

Tab. 4. Některé parametry urychlovače 4.



Obr. 5. Schema elektrického obvodu urychlovače .

materiál vnitřní elektrody	atmosféra	nanesená vrstva
grafit	$\text{CH}_4$	grafit, tetraedrální fáze uhlíku
bor	$\text{N}_2 + \text{B}_2\text{H}_6$ $\text{N}_2 + \text{H}_2$	$\beta$ -BN, $\gamma$ -BN
hliník	$\text{Ar} + \text{O}_2$ (5:1) $\text{O}_2$	$\gamma$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$ $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$
hliník	$\text{N}_2$	AlN
titan	$\text{N}_2 + \text{H}_2$ (10:1)	TiN
tantal	$\text{O}_2$	$\text{Ta}_2\text{O}_5$ + oxidy nižší valence

Tab. 5. Přehled možností nanášení některých tenkých vrstev v urychlovačích plazmatu. Podle [57] .

## 2. CÍL KANDIDÁTSKÉ DISERTAČNÍ PRÁCE A ZVOLENÉ

### METODY ZPRACOVÁNÍ

Předložená disertační práce vznikla na katedře fyziky FEL ČVUT Praha v rámci řešení SVÚ I-3-4/1 "Silnoproudé výboje ve speciálních elektrodových konfiguracích" ukončeném v roce 1985 a SVÚ I-6-3/1 "Pulsní plazma v oblasti atmosférického tlaku", řešeného v současné době.

Cílem předložené disertační práce je:

- a) teoretický rozbor dynamiky urychlovacího procesu za sníženého i atmosférického tlaku
- b) numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic elektrodynamického modelu a vytvoření příslušného počítačového programu
- c) teoretický popis odlišného pohybu elektronů a iontů v urychlovači s vnějším magnetickým polem a ocenění vlivu polarizace na urychlovací proces
- d) rozbor některých jevů při explozích drátků

### metody zpracování

Elektrodynamický model byl převeden za pomoci variační formulace na soustavu Hamiltonových kanonických rovnic 1. řádu, které byly řešeny metodou Runge - Kutta 4. řádu v jazyce FORTRAN na počítači ICL-4-72 a ATARI 1040 ST. Byl formulován dvoubodový model popisující jev polarizace v silném vnějším magnetickém



poli a za určitých zjednodušujících předpokladů nalezeno analytické řešení. Pro rozbor chování vlny vypařování při explozi drátků byla volena metoda rozvoje hledaných funkcí do mocninné řady. Pro koeficienty byla nalezena přehledná rekurentní formule a dokázána konvergence řady za pomoci D'Alambertova kriteriia.

### 3. ELEKTRODYNAMICKÝ MODEL

#### 3.1. Úvod

Při popisu dynamiky zhustků plazmatu urychlovaného elektrodynamickými silami se často plazmový zhustek nahrazuje bodovým objektem. Potom se řeší soustava diferenciálních rovnic pro polohu zhustku  $x(t)$  a proud  $I(t)$  tekoucí obvodem, která je tvořena Newtonovou pohybovou rovnicí a příslušnou obvodovou rovnicí. Tento přístup se nazývá jednobodový elektrodynamický model (dále ED model). ED model slouží k přibližnému zjišťování vlastností urychlovacího procesu. Byl rozpracován mnoha autory a ve většině případů jeho předpovědi dobře souhlasí s prováděnými experimenty. První souhrnné výsledky vlastností ED modelu jsou sepsány v práci [1]. V naší literatuře je srovnání experimentálních výsledků s ED modelem věnována publikace [2] a celá řada dalších prací, viz např. [3-4,6-12].

Obvykle se předpokládá, že pohybující se plazmový zhustek nabaluje prostředí před sebou, které je dále urychlováno spolu s ním. Celková urychlovaná hmotnost má potom tvar

$$(3.1) \quad m = m_0 + m_1 x \quad ,$$

kde  $m_0$  je hmotnost plazmového zhustku,  $m_1$  je hmotnost nabalovaná zhustkem na jednotku délky. Tento tzv. mo-

del sněžného pluhu byl formulován v práci [13]. V [4] byl řešen i případ, že zhustek část nabalované hmotnosti opět propouští.

Plazmový urychlovač lze použít i k urychlování drobných těles, které před sebou tlačí plazmový zhustek, viz [15,60]. Tyto urychlovače pracují za atmosférického tlaku a hmotnost  $m_0$  ve vztahu (3.1) je tvořena hmotností plazmového zhustku a hmotností urychlovaného tělesa (mechanické zátěže).

Účinnost urychlovacího procesu lze zvýšit přídatným magnetickým polem, které má směr shodný s vlastním magnetickým polem. S rostoucím vnějším polem maximální dosažitelná rychlost zpočátku roste, ale dochází ke snížení proudu tekoucího zhustkem a proto existuje jisté optimální vnější magnetické pole  $B_{opt}$ , při kterém je dosažená rychlost maximální. Toto optimální pole našel za určitých zjednodušujících předpokladů (zanedbatelné vlastní magnetické pole, konstantní hmotnost zhustku) Kracík v práci [6]. Podle [6] platí

$$(3.2) \quad B_{opt} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m_0}{C_0}} \quad ,$$

$$(3.3) \quad \max_{t, B_0} v = U_0 \sqrt{\frac{C_0}{m_0}} \quad ,$$

kde  $h$  je vzdálenost elektrod,  $m_0$  hmotnost zhustku,  $C_0$

kapacita a  $U_0$  počáteční napětí kondenzátorové baterie. Názornou fyzikální interpretaci vztahu (3.2) podal Jelen v práci [3]. Celý urychlovač nahradil fiktivním kondenzátorem s kapacitou

$$(3.4) \quad C' = \frac{m_0}{B_0^2 h^2} \quad .$$

Maximální urychlení nastává tehdy když

$$(3.5) \quad C = C'$$

a veškerá energie kondenzátorové baterie se "přelije" do fiktivního kondenzátoru s kapacitou  $C'$ , který nahrazuje urychlovač.

V této práci se omezíme na rovnice ED modelu ve tvaru (viz např. [1,2,60])

$$(3.6) \quad (m_0 + m_1 x) \ddot{x} = \frac{L_1 \dot{Q}^2}{2} + B_0 h \dot{Q} - \alpha \dot{x}^2 - \beta \dot{x} + \frac{P_0 S'}{\left(1 + \frac{S'x}{V_0}\right)^2}$$

$$(3.7) \quad (L_0 + L_1 x) \ddot{Q} + (L_1 \dot{x} + R) \dot{Q} + \frac{Q}{C_0} + B_0 h \dot{x} = U_0 ,$$

kde  $m_0$  - počáteční hmotnost plazmového zhustku,  $m_1$  - hmotnost plynu nabaleného při pohybu zhustku na jednotku délky urychlovače ( $m_1 \approx S' \rho$ , kde  $S'$  je příčný průřez urychlovače a  $\rho$  hustota plynu před zhustkem),  $B_0$  - vnější magnetické pole,  $h$  - vzdálenost elektrod,  $L_0$  - indukčnost vnějšího obvodu,  $L_1$  - indukčnost elektrod

na jednotku délky ( pro urychlovač z tabulky 4 je  $L_1 = 0$  ),  $R$  - odpor vnějšího obvodu a plazmatu,  $C_0$  - kapacita kondenzátorové baterie,  $U_0$  - počáteční napětí na kondenzátorové baterii,  $\alpha$  - koeficient odporu prostředí před zhustkem,  $\beta$  - koeficient odporu tření o elektrody,  $P_0$  - počáteční tlak způsobený explozí drátku ( $P_0 \neq 0$  jen u urychlovačů z tabulek 3 a 4),  $V_0$  - objem, ve kterém dochází k iniciaci výboje. Náboj  $Q(t)$  je definován vztahem

$$(3.8) \quad Q(t) = \int_0^t I(t) dt, \quad Q(0) = 0.$$

Někdy se používá proměnné

$$(3.9) \quad Q_c(t) = Q(t) - U_0 C_0, \quad Q_c(0) = -U_0 C_0,$$

která až na znaménko představuje náboj na kondenzátorové baterii. Potom by na pravé straně rovnice (3.7) byla nula.

Jednotlivé členy na pravé straně rovnice (3.6) mají postupně význam: urychlující síla vlastního magnetického pole, urychlující síla vnějšího magnetického pole, síla odporu plynu tlačného před zhustkem, síla odporu tření zhustku o elektrody. Poslední člen představuje tlakovou sílu působící na zhustek od exploze drátku, za předpokladu, že vzniklý plyn se rozpíná polytropicky. Diskuze tohoto členu je provedena v [60]

pro případ  $\gamma = 1$  ( $\gamma$  - koeficient polytropy). Rovnice (3.7) popisuje elektrický obvod urychlovače.

Rovnici (3.6) by bylo možné doplnit o další silové členy, např. sílu tření o elektrody dopadem iontů

$$(3.10) \quad F_T = - \frac{m_i}{2e_i} \dot{Q} \dot{x} \quad ,$$

kde  $m_i$ ,  $e_i$  je hmotnost a náboj iontů; sílu způsobenou ztrátou hybnosti přenosem Jouleova tepla

$$(3.11) \quad F_J \approx \dot{Q}^2 \dot{x}$$

a další. Podobně obvodovou rovnicí (3.7) je možné modifikovat zavedením proměnného odporu  $R$  ve tvaru

$$(3.12) \quad R(x) = R_0 + R_1 x \quad ,$$

kde  $R_0$  je odpor vnějších přívodů a plazmatu,  $R_1$  je odpor elektrod na jednotku délky. ED model je ale natolik hrubé přiblížení skutečnosti, že tyto jemné korekce zpravidla nemají velký význam a jejich užití je diskutabilní.

V této práci nalezneme Lagrangeovu funkci pro ED model. Lagranžian byl v jednodušším případě zaveden již v práci [3]. Zde použijeme obecnou metodu formulovanou v [14] a nalezneme Lagrangeovu i Hamiltonovu

funkci pro rovnice (3.6) a (3.7). V speciálních případech nalezneme analytické řešení problému a popíšeme některé výsledky numerických výpočtů.

### 3.2. Inversní variační problém

Uvažme systém popsany zobecněnými souřadnicemi  $q_k$ . Časový vývoj systému je určený funkcemi  $q_k(t)$ , které jsou řešením Lagrangeových rovnic

$$(3.13) \quad \epsilon_k \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad ,$$

kde  $\mathcal{L}$  je Lagrangeova funkce a  $\epsilon_k$  je označení pro levou stranu Lagrangeových rovnic. Často jsme v situaci, že známe pohybové rovnice  $\epsilon_k = 0$  a hledáme Lagrangeovu funkci  $\mathcal{L}$ , ze které rovnice plynou. Tento tzv. inverzní variační problém však nemusí být vždy řešitelný. E.Tonti ukázal [14], že splňují-li levé strany rovnic  $\epsilon_k$  podmínky

$$(3.14) \quad \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \ddot{q}_l} - \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} = 0$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(3.16) \quad \frac{\partial \epsilon_k}{\partial q_l} - \frac{\partial \epsilon_l}{\partial q_k} = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \dot{q}_k} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} \right]$$

pro každé  $k, l$ , potom jsou rovnice  $\epsilon_k = 0$  variační, tj existuje  $\mathcal{L}$  a platí

$$(3.17) \quad \mathcal{L} = - q_k \int_0^1 \varepsilon_k(t, \tau q_1, \tau \dot{q}_1, \tau \ddot{q}_1) d\tau .$$

Znaménko minus je zde jen proto, aby pohybové rovnice vyšly ve tvaru (3.13). Při opačném znaménku bychom získali rovnice  $-\varepsilon_k = 0$ . Není-li uvedeno jinak, platí ve všech výrazech Einsteinova sumační konvence.

Nejsou-li splněny Tontiho podmínky variačnosti (3.14) až (3.16) je možné hledat funkce  $f_k$  tak, aby rovnice  $\tilde{\varepsilon}_k = f_k \varepsilon_k = 0$  (přes  $k$  se nesčítá) byly variační. V případě, že nevariačnost rovnic způsobují členy lineární v  $\dot{q}_k$

$$(3.18) \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k^* + \alpha_{kl} \dot{q}_l, \quad \alpha_{kl} = \alpha_{lk}$$

probíhají v systému disipační procesy (nestabilní případ neuvažujeme), které lze zahrnout do tzv. Rayleighovy disipační funkce

$$(3.19) \quad \mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l .$$

Inversní variační problém lze řešit tak, že najdeme  $\mathcal{L}$  k rovnicím  $\varepsilon_k^* = 0$  a systém pak splňuje Lagrangeovy rovnice tvaru (plyne okamžitě z (3.18) a (3.19))

$$(3.20) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} .$$



Zobecněné hybnosti  $p_k$  a zobecněnou energii  $\mathcal{H}$  definujeme běžným způsobem

$$(3.21) \quad p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(3.22) \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

V systému s disipačními procesy se energie nezachovává, neboť

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right\} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \\ &= - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = - 2\mathcal{F} \quad , \end{aligned}$$

kde jsme využili Lagrangeovy rovnice ve tvaru (3.20), Eulerovu větu o derivaci homogenních funkcí a předpokládali, že  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{H}$  nejsou explicitními funkcemi času. Energetická bilance má tedy tvar

$$(3.23) \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = - 2\mathcal{F} \quad , \text{ neboli}$$

$$(3.24) \quad \mathcal{H} + \int_0^t 2\mathcal{F} dt = \text{const} .$$

Provedeme -li transformaci od proměnných  $q, \dot{q}$  k proměnným  $q, p$  v zobecněné energii, získáme Hamiltonovu funkci  $\mathcal{H}(q, p)$ . Ukažme nyní jak budou vypadat Hamiltonovy rovnice v případě disipace energie. Zřejmě platí

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k$$

$$d\mathcal{L} = \left( \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + p_k d\dot{q}_k$$

$$d\mathcal{L} = \left( \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + d(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k dp_k$$

$$d(p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}) = - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + \dot{q}_k dp_k$$

$$d\mathcal{H} = - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + \dot{q}_k dp_k$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k = - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + \dot{q}_k dp_k$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \right] dq_k + \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right] dp_k = 0 ,$$

kde jsme opět využili Lagrangeových rovnic (3.20) a to, že  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$ . Z poslední relace plynou Hamiltonovy kanonické rovnice

$$(3.25) \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$(3.26) \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

kde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$  a člen  $\partial \mathcal{F} / \partial \dot{q}_k$  je vyjádřen jako funkce  $q, p$ . Souhrnně tedy při disipaci energie můžeme psát

$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$	zob. hybnost
$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}$	zob. energie
$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$	Rayl. funkce
$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k^* + \alpha_{kl} \dot{q}_l$	} Lagrangeovy rovnice
$\mathcal{E}_k^* = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$	
$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - 2\mathcal{F}$	} disipace energie
$\mathcal{H} + \int_0^t 2\mathcal{F} dt = \text{const}$	
$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$	} Ham. rovnice ( $\partial \mathcal{F} / \partial \dot{q}_k$ je funkce $q, p$ )
$\dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$	

kde  $\mathcal{E}_k^*$  je variační část rovnic a  $\mathcal{L}$  je její Lagrangeova funkce,  $\alpha_{kl} \dot{q}_l$  je disipační člen ( $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ ) a  $\mathcal{F}$  příslušná Rayleighova funkce.

### 3.3. Variační formulace ED modelu

Variační formulací ED modelu jsme se již zabývali v pracích [51,54,55]. Přepíšme nyní rovnice (3.6),(3.7) do tvaru

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x \equiv & (m_0 + m_1 x) \ddot{x} - \frac{L_1 \dot{Q}^2}{2} - B_0 h \dot{Q} + \alpha \dot{x}^2 + \beta \dot{x} - \\ & - \frac{P_0 S'}{(1 + \frac{S'x}{V_0})^\gamma} = 0 \end{aligned}$$

$$(3.28) \quad \mathcal{E}_Q \equiv (L_0 + L_1 x) \ddot{Q} + (L_1 \dot{x} + R) \dot{Q} + \frac{C}{C_0} + B_0 h \dot{x} - U_0 = 0.$$

Toutiho podmínky variačnosti jsou v našem případě

$$(3.29) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \ddot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \ddot{x}} = 0$$

$$(3.30) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \dot{Q}} + \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{x}} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{x}}$$

$$(3.31) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \dot{Q}} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \dot{Q}}$$

$$(3.32) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \dot{x}}$$

$$(3.33) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{Q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{Q}}$$

$$(3.34) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial Q} - \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial x} = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial \ddot{x}} \right]$$

$$(3.35) \quad \frac{\partial \varepsilon_Q}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial Q} = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \dot{Q}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \ddot{Q}} \right]$$

$$(3.36) \quad 0 = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \ddot{x}} \right]$$

$$(3.37) \quad 0 = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varepsilon_Q}{\partial \dot{Q}} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_Q}{\partial \ddot{Q}} \right]$$

Toutiho podmínky (3.29) až (3.37) jsou splněny identicky až na vztahy (3.32), (3.33) a (3.36), ze kterých plyne

$$(3.38) \quad \beta = 0$$

$$(3.39) \quad R = 0$$

$$(3.40) \quad \alpha = m_1/2 \quad .$$

První omezení  $\beta = 0$  a  $R = 0$  je způsobeno členy  $\beta \dot{x}$  a  $R \dot{Q}$  v  $\varepsilon_x$  a  $\varepsilon_Q$ , které mají disipační charakter. Budeme tedy dále hledat Lagrangeovu funkci k

$$(3.41) \quad \varepsilon_x^* = (m_0 + m_1 x) \ddot{x} - \frac{L_1 \dot{Q}^2}{2} - B_0 h \dot{Q} + \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} - \frac{P_0 S'}{(1 + \frac{S'x}{V_0})^r}$$

$$(3.42) \quad \varepsilon_Q^* = (L_0 + L_1 x) \ddot{Q} + L_1 \dot{x} \dot{Q} + \frac{Q}{C_0} + B_0 h \dot{x} - U_0$$

a zavedeme Rayleighovu disipační funkci

$$(3.43) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{x}^2 \quad .$$

Vztah (3.40) je vcelku přirozený uvážíme -li, že  $m_{\tau} = dm/dx \approx S' \rho$  je hmotnost zhustkem nabalovaného plynu na jednotku délky urychlovače. Nyní určíme z (3.17) Lagrangeovu funkci k  $\mathcal{E}_k^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -x \int_0^1 \mathcal{E}_x^*(\tau x, \tau q, \tau \dot{x}, \tau \dot{q}, \tau \ddot{x}, \tau \ddot{q}) d\tau - \\ &- Q \int_0^1 \mathcal{E}_Q^*(\tau x, \tau q, \tau \dot{x}, \tau \dot{q}, \tau \ddot{x}, \tau \ddot{q}) d\tau = \\ &= -x \int_0^1 \left[ (m_0 + m_1 \tau x) \tau \ddot{x} - \frac{L_1 \tau^2 \dot{Q}^2}{2} - B_0 h \tau \dot{Q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1 \tau^2 \dot{x}^2}{2} - \frac{P_0 S'}{(1+S' \tau x/V_0)^\gamma} \right] d\tau - Q \int_0^1 \left[ (L_0 + L_1 \tau x) \tau \ddot{Q} + \right. \\ &\quad \left. + L_1 \tau^2 \dot{x} \dot{Q} + \frac{\tau Q}{C_0} + B_0 h \tau \dot{x} - U_0 \right] d\tau = \\ &= -x \left[ \frac{m_0 \ddot{x}}{2} + \frac{m_1 x \ddot{x}}{3} - \frac{L_1 \dot{Q}^2}{6} - \frac{B_0 h \dot{Q}}{2} + \frac{m_1 \dot{x}^2}{6} \right] + \mathcal{V}(x) - \\ &- Q \left[ \frac{L_0 \ddot{Q}}{2} + \frac{L_1 x \ddot{Q}}{3} + \frac{L_1 \dot{x} \dot{Q}}{3} + \frac{Q}{2C_0} + \frac{B_0 h \dot{x}}{2} - U_0 \right], \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$(3.44) \quad \mathcal{V}(x) = P_0 V_0 \begin{cases} \ln(1+S'x/V_0) & ; \gamma = 1 \\ \frac{(1+S'x/V_0)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} & ; \gamma \neq 1 \end{cases} .$$

Nyní druhé derivace nahradíme podle pravidla o derivování součinu derivacemi prvními, tj.

$$x\ddot{x} = \frac{d}{dt} (x\dot{x}) - \dot{x}^2$$

$$Q\ddot{Q} = \frac{d}{dt} (Q\dot{Q}) - \dot{Q}^2$$

$$x^2\ddot{x} = \frac{d}{dt} (x^2\dot{x}) - \dot{x} \frac{d}{dt} (x^2)$$

$$Qx\ddot{Q} = \frac{d}{dt} (Qx\dot{Q}) - \dot{Q} \frac{d}{dt} (Qx) .$$

První členy (úplné derivace) můžeme v  $\mathcal{L}$  vynechat, neboť úplné derivace v Lagrangeově funkci neovlivní pohybové rovnice. Pro  $\mathcal{L}$  tedy máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (m_0 + m_1 x) \dot{x}^2 + \mathcal{V}(x) + \frac{1}{2} (L_0 + L_1 x) \dot{Q}^2 - \\ (3.45) \quad & - \frac{Q^2}{2C_0} + QU_0 + B_0 hx\dot{Q} . \end{aligned}$$

Lagrangeova funkce je zřejmě složena ze tří částí

$$(3.46) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_Q + \mathcal{L}_B , \text{ kde}$$

$$(3.47) \quad \mathcal{L}_x = \frac{1}{2} (m_0 + m_1 x) \dot{x}^2 + \mathcal{V}(x)$$

$$(3.48) \quad \mathcal{L}_Q = \frac{1}{2} (L_0 + L_1 x) \dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2C_0} + QU_0$$

$$(3.49) \quad \mathcal{L}_B = B_0 hx\dot{Q}$$

$\mathcal{L}_x$  představuje "dráhovou" část Lagr. funkce,  $\mathcal{L}_Q$  "ná-

bojovou" část Lagr. funkce a  $\mathcal{L}_B$  část Lagr. funkce příslušející vnějšímu magnetickému poli.  $\mathcal{L}_B$  je možné volit i ve tvaru

$$(3.50) \quad \tilde{\mathcal{L}}_B = -B_0 h Q \dot{x} \quad , \text{nebo}$$

$$(3.51) \quad \tilde{\mathcal{L}}_B = \frac{1}{2} B_0 h [x \dot{Q} - \dot{x} Q] \quad .$$

Výrazy (3.49), (3.50), (3.51) se liší o úplnou derivaci nějaké funkce a poskytnou tedy stejné pohybové rovnice.

ED model urychlovače plazmatu je tedy popsán Rayleighovou disipační funkcí (3.43) a Lagrangeovou funkcí (3.45). Rovnice ED modelu můžeme nyní psát ve tvaru

$$(3.52) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}}$$

$$(3.53) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{Q}} \quad .$$

Po dosažení za  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{L}$  z (3.43) a (3.45) tyto rovnice přejdou v rovnice (3.6) a (3.7).

Najděme nyní zobecněné hybnosti a zobecněnou energii systému:

$$(3.54) \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_0 + m_1 x) \dot{x}$$



$$(3.55) \quad p_Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = (L_0 + L_1 x) \dot{Q} + B_0 h x$$

$$(3.56) \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \dot{Q} - \mathcal{L} =$$

$$= \frac{1}{2} (m_0 + m_1 x) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (L_0 + L_1 x) \dot{Q}^2 + \frac{Q^2}{2C_0} -$$

$$- QU_0 - \mathcal{V}(x)$$

Za pomoci (1.1), (1.2) a (3.8) můžeme zákon zachování energie (3.24) zapsat ve tvaru

$$(3.57) \quad \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) I^2 + \frac{Q^2}{2C_0} - QU_0 - \mathcal{V}(x) +$$

$$+ \int_0^t RI^2 dt + \int_0^t \beta \dot{x}^2 dt = \text{const} ,$$

resp. využijeme -li (3.9)

$$(3.58) \quad \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) I^2 + \frac{Q^2}{2C_0} + \int_0^t RI^2 dt +$$

$$+ \int_0^t \beta \dot{x}^2 dt - \mathcal{V}(x) = \text{const} .$$

Interpretace jednotlivých členů je zřejmá. Jde postupně o kinetickou energii zhustku s případnou mechanickou zátěží, energii magnetického pole, energii na kondenzátorové baterii, tepelnou energii uvolněnou na odporu obvodu, tepelnou energii uvolněnou při tření

zhustku o elektrody a energii exploze drátku. Vlastnosti posledního členu budou diskutovány v odst. 3.4. této kapitoly.

Z (3.54), (3.55), (3.56) snadno určíme Hamiltonovu funkci

$$(3.59) \quad \mathcal{H}(x, Q, p_x, p_Q) = \frac{p_x^2}{2m(x)} + \frac{(p_Q - B_0 hx)^2}{2L(x)} + \\ + \frac{Q^2}{2C_0} - QU_0 - \mathcal{V}(x) \quad .$$

Hamiltonovy kanonické rovnice (3.25) a (3.26) pro uvažovaný problém jsou

$$(3.60) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m(x)}$$

$$(3.61) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{p_Q - B_0 hx}{L(x)}$$

$$(3.62) \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{B_0 h(p_Q - B_0 hx)}{L(x)} + \frac{(p_Q - B_0 hx)^2}{2L^2(x)} L_1 + \\ + \frac{p_x^2}{2m^2(x)} m_1 + \frac{P_0 S'}{(1+S'_x/V_0)^2} - \beta \frac{p_x}{m(x)}$$

$$(3.63) \quad \frac{dp_Q}{dt} = -\frac{Q}{C_0} + U_0 - R \frac{(p_Q - B_0 hx)}{L(x)} \quad .$$

Soustava rovnic (3.60) až (3.63) je velmi vhodná pro numerickou integraci. Počáteční podmínky jsou  $x(0) = Q(0) = p_x(0) = p_Q(0) = 0$ .

### 3.4. Některé speciální případy

#### A. Na zhustek působí jen vlastní mg. pole

Zanedbáme -li tření zhustku o elektrody a nebudeme -li uvažovat působení vnějšího magnetického pole a tlakového členu, přejdou základní rovnice ED modelu (3.52, 3.53) na tvar [52]

$$(3.64) \quad \frac{d}{dt} [(m_0 + m_1 x)v] = \frac{L_1 I^2}{2}$$

$$(3.65) \quad \frac{d}{dt} [(L_0 + L_1 x)I] + RI + \frac{1}{C_0} \int_0^t I(t) dt = U_0 .$$

Tyto rovnice jsou vhodné např. pro popis urychlovačů z tab. 1 a 2 bez vnějšího magnetického pole. Navíc budeme ještě předpokládat, že proces urychlování plazmového zhustku ovlivní průběh elektrického proudu v obvodu zanedbatelně, tj při urychlování platí  $L_1 x \ll L_0$ ,  $L_1 v \ll R$ . Potom má závislost proudu na čase tvar

$$(3.66) \quad I(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t) \quad , \quad \text{kde}$$

$$(3.67) \quad A = \frac{U_0}{L_0 \omega} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad \delta = \frac{R_0 + R_P}{2L_0} .$$

Zintegrováním pohybové rovnice (3.64) získáme vztah

$$(3.68) \quad (m_0 + m_1 x)v = p(t) \quad , \quad \text{kde}$$

$$(3.69) \quad p(t) = \int_0^t \frac{L_1 I^2}{2} dt =$$

$$= \frac{L_1 A^2}{8} \left[ \frac{e^{-2\delta t}}{\omega_0^2} (\delta \cos 2\omega t - \omega \sin 2\omega t) - \frac{\delta}{\omega_0^2} + \frac{1 - e^{-2\delta t}}{\delta} \right].$$

Rovnici (3.68) lze dále integrovat metodou separace proměnných. Dostaneme tak kvadratickou rovnici pro prostorovou souřadnici  $x$ . Po vyřešení této kvadratické rovnice získáme řešení  $x(t)$  polohy plazmového zhustku v závislosti na čase. Zderivováním dostaneme i průběh rychlosti  $v(t)$ :

$$(3.70) \quad x(t) = \frac{-m_0 + \sqrt{m_0^2 + 2m_1 \Pi(t)}}{m_1}$$

$$(3.71) \quad v(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{m_0^2 + 2m_1 \Pi(t)}}, \quad \text{kde}$$

$$(3.72) \quad \Pi(t) = \int_0^t p(t) dt = \frac{L_1 A^2}{8} \left[ \frac{1}{\omega_0^4} \left\{ \omega \delta e^{-2\delta t} \sin 2\omega t + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\omega^2 - \delta^2}{2} (e^{-2\delta t} \cos 2\omega t - 1) \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\delta t + e^{-2\delta t} - 1}{2\delta^2} - \frac{\delta t}{\omega_0^2} \right].$$

Časové závislosti  $v(t)$  pro parametry urychlovače z tabulky 2 a různé hodnoty počátečního napětí na kondenzátorové baterii jsou na obr. 6.

B. Působí jen tlakový člen

V tomto odstavci zanedbáme sílu tření zhustku o elektrody, vlastní magnetické pole a nebudeme uvažovat působení vnějšího magnetického pole. Pohybová rovnice pro zhustek a mechanickou zátěž bude mít potom tvar

$$(3.73) \quad \frac{d}{dt} \left[ (m_0 + m_1 x) v \right] = \frac{P_0 S'}{(1 + S' x / V_0)^\gamma} .$$

Tato rovnice je vhodná např. pro popis urychlovače z tabulky 4. Přepíšeme ji tak, aby nezávisle proměnnou byla poloha  $x$  mechanické zátěže v urychlovači a budeme hledat funkci  $v(x)$ . Po nahrazení  $d/dt \rightarrow v \cdot d/dx$  máme

$$(3.74) \quad v \frac{d}{dx} \left[ (m_0 + m_1 x) v(x) \right] = \frac{P_0 S'}{(1 + S' x / V_0)^\gamma} .$$

Nyní provedeme transformaci od proměnných  $x, v$  k proměnným  $\xi, p$  definovaných vztahy

$$(3.75) \quad \xi = 1 + S' x / V_0 \quad p = (m_0 + m_1 x) v .$$

V těchto proměnných má pohybová rovnice tvar

$$(3.76) \quad \frac{S'}{V_0} \frac{p(\xi)}{m_0 + \frac{m_1 V_0}{S'} (\xi - 1)} \frac{d}{d\xi} p(\xi) = \frac{P_0 S'}{\xi^\gamma} .$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou separace proměnných:

$$(3.77) \quad \int_0^p p \, dp = P_0 V_0 \int_1^f \left\{ \left( m_0 - \frac{m_1 V_0}{S'} \right) \xi^{-\gamma} + \frac{m_1 V_0}{S'} \xi^{1-\gamma} \right\} d\xi$$

a tedy

$$(3.78) \quad p(x) = \sqrt{2P_0 V_0} \begin{cases} \sqrt{\left( m_0 - \frac{m_1 V_0}{S'} \right) \frac{\left( 1 + \frac{S'x}{V_0} \right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \frac{m_1 V_0}{S'} \frac{\left( 1 + \frac{S'x}{V_0} \right)^{2-\gamma} - 1}{2-\gamma}} & \gamma \neq 1, 2 \\ \sqrt{\left( m_0 - \frac{m_1 V_0}{S'} \right) \ln \left( 1 + \frac{S'x}{V_0} \right) + \frac{m_1 V_0}{S'} \frac{S'x}{V_0}} & \gamma = 1 \\ \sqrt{\left( m_0 - \frac{m_1 V_0}{S'} \right) \frac{S'x/V_0}{1+S'x/V_0} + \frac{m_1 V_0}{S'} \ln \left( 1 + \frac{S'x}{V_0} \right)} & \gamma = 2 \end{cases}$$

Využijeme -li bezrozměrné proměnné

$$(3.79) \quad \bar{p} = \frac{p}{\sqrt{2P_0 V_0 m_0}}, \quad \bar{x} = \frac{S'x}{V_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\sqrt{2P_0 V_0 / m_0}},$$

získá řešení (3.78) přehlednější tvar:

$$(3.80) \quad \bar{p} = \begin{cases} \sqrt{(1-a) \frac{(1+\bar{x})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + a \frac{(1+\bar{x})^{2-\gamma} - 1}{2-\gamma}} & \gamma \neq 1, 2 \\ \sqrt{(1-a) \ln(1+\bar{x}) + a\bar{x}} & \gamma = 1 \\ \sqrt{(1-a) \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}} + a \ln(1+\bar{x})} & \gamma = 2, \end{cases}$$

$$(3.81) \quad \bar{v} = \frac{\bar{p}}{1+a\bar{x}}, \quad \text{kde}$$

$$(3.82) \quad a \equiv \frac{m_1 V_0}{m_0 S'}$$

Nalezené řešení závisí jen na dvou parametrech  $\gamma, a$ .

Snadno zjistíme, že  $\frac{d}{dx}(\bar{p}^2) = 1/(1+\bar{x})^{\gamma-1} > 0$  a proto je řešení v hybnostech stále rostoucí. Pro  $\gamma \in (0,1)$  oba dva výrazy pod odmocninou s rostoucím  $\bar{x}$  mocninně divergují, pro  $\gamma \in (1,2)$  diverguje mocninně jen druhý z nich a pro  $\gamma > 2$  mají oba výrazy konečnou limitu pro  $\bar{x} \rightarrow \infty$  a platí

$$(3.83) \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{p} = \begin{cases} \infty & \gamma \leq 2 \\ \sqrt{\frac{1-a}{\gamma-1} + \frac{a}{\gamma-2}} & \gamma > 2 \end{cases}$$

V hraničních bodech  $\gamma = 1, 2$  první resp. druhý výraz pod odmocninou diverguje jen logaritmicky. Toto samozřejmě neodpovídá realitě. Polytropické chování plynu bude přibližně platit jen pro konečná  $\bar{x}$ . Skutečný průběh tlakové vlny neznáme [60].

Zajímavá situace nastane pro  $a \rightarrow 0$ , tj. mechanická zátěž se pohybuje ve vakuu. Tehdy platí

$$(3.84) \quad \bar{p}_{a=0} = \bar{v}_{a=0} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(1+\bar{x})^{1-\gamma}-1}}{1-\gamma} & \gamma \neq 1 \\ \sqrt{\ln(1+\bar{x})} & \gamma = 1 \end{cases}$$

a pro limitu  $\bar{x} \rightarrow \infty$  platí

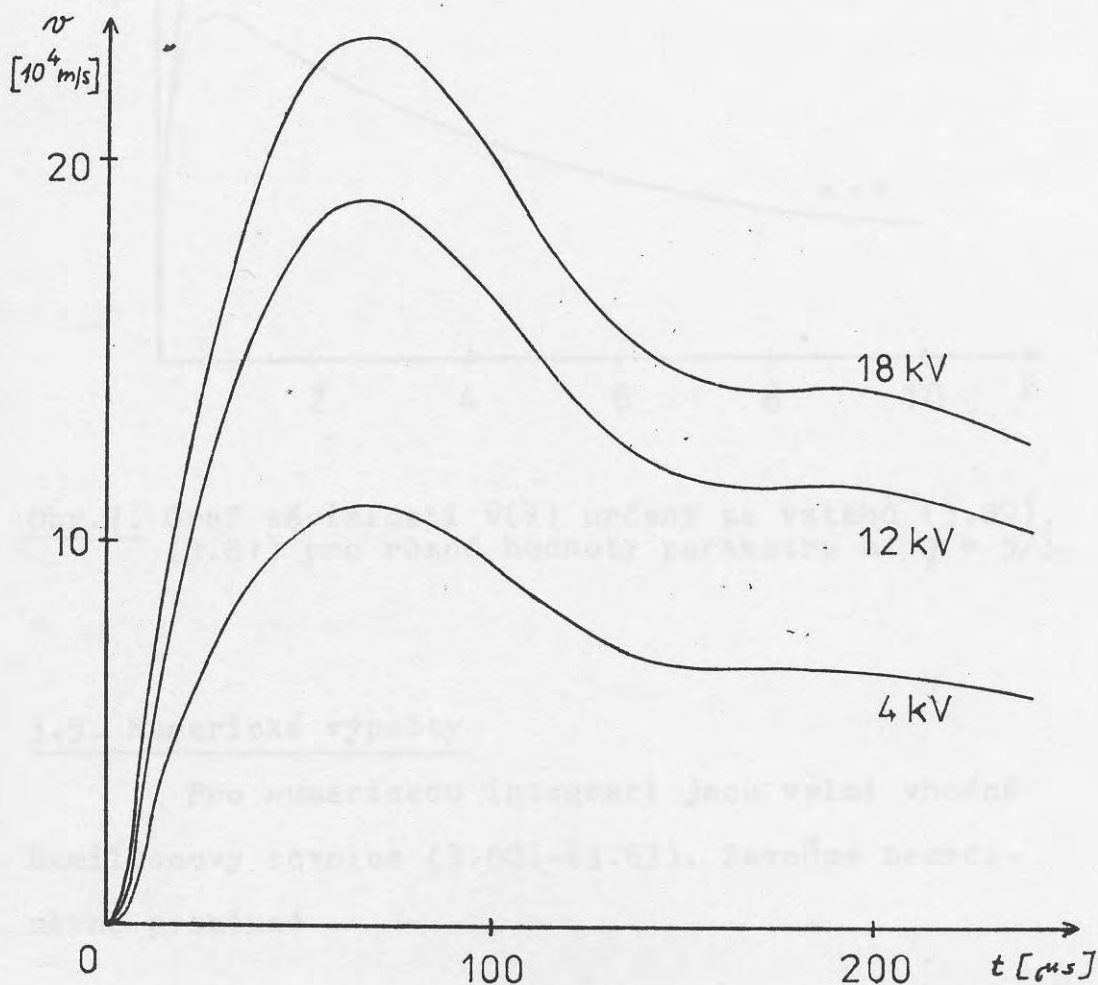
$$(3.85) \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{p}_{a=0} = \begin{cases} \infty & \gamma \leq 1 \\ \sqrt{\frac{1}{\gamma-1}} & \gamma > 1 \end{cases}$$

Z uvedeného je vidět, že ve vakuu má hybnost konečnou limitu již pro  $\gamma > 1$ .

Jiná situace nastává pro rychlostní průběhy. Při  $a \neq 0$  vidíme ze vztahů (3.80,3.81), že

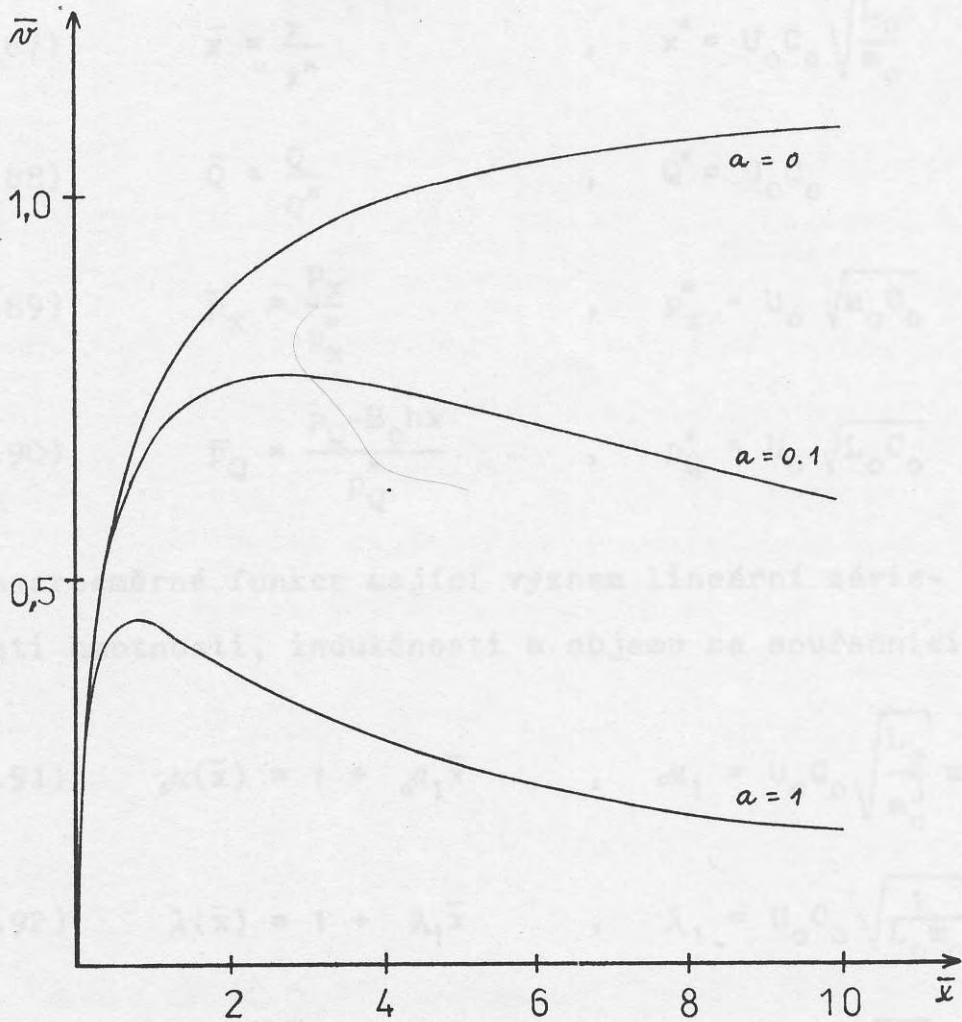
$$(3.82) \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{v}_{a \neq 0} = 0$$

pro každé  $\gamma > 0$  a tedy rychlost nabývá svého maxima. Poloha a velikost tohoto maxima závisí na parametrech  $a, \gamma$ . Průběh rychlostí určený ze vztahů (3.80,3.81) je znázorněn pro různé hodnoty parametru  $a$  na obr. 7.



Obr.6. Graf závislosti  $v(t)$  podle vztahu (3.71) pro urychlovač z tab.2 v dvoukolejnicovém uspořádání pro různá napětí na kond. baterii.





Obr.7. Graf závislosti  $\bar{v}(\bar{x})$  určený ze vztahů (3.80), (3.81) pro různé hodnoty parametru  $a$ .  $\gamma = 5/3$ .

### 3.5. Numerické výpočty

Pro numerickou integraci jsou velmi vhodné Hamiltonovy rovnice (3.60)-(3.63). Zaveďme bezrozměrné proměnné

$$(3.86) \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \quad t^* \equiv \sqrt{L_0 C_0}$$

$$(3.87) \quad \bar{x} = \frac{x}{x^*} \quad , \quad x^* = U_0 C_0 \sqrt{\frac{L_0}{m_0}}$$

$$(3.88) \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q^*} \quad , \quad Q^* = U_0 C_0$$

$$(3.89) \quad \bar{p}_x = \frac{p_x}{p_x^*} \quad , \quad p_x^* = U_0 \sqrt{m_0 C_0}$$

$$(3.90) \quad \bar{p}_Q = \frac{p_Q - B_0 h x}{p_Q^*} \quad , \quad p_Q^* = U_0 \sqrt{L_0 C_0}$$

a bezrozměrné funkce mající význam lineární závislosti hmotnosti, indukčnosti a objemu na souřadnici  $\bar{x}$

$$(3.91) \quad \mu(\bar{x}) = 1 + \mu_1 \bar{x} \quad , \quad \mu_1 = U_0 C_0 \sqrt{\frac{L_0}{m_0^3}} m_1$$

$$(3.92) \quad \lambda(\bar{x}) = 1 + \lambda_1 \bar{x} \quad , \quad \lambda_1 = U_0 C_0 \sqrt{\frac{1}{L_0 m_0}} L_1$$

$$(3.93) \quad \varkappa(\bar{x}) = 1 + \varkappa_1 \bar{x} \quad , \quad \varkappa_1 = U_0 C_0 \sqrt{\frac{L_0}{m_0}} \frac{S}{V_0}$$

a bezrozměrné koeficienty

$$(3.94) \quad b = \sqrt{\frac{C_0}{C'}} = \sqrt{\frac{C_0}{m_0}} B_0 h$$

$$(3.95) \quad f_P = \frac{P_0 S'}{U_0} \sqrt{\frac{L_0}{m_0}}$$

$$(3.96) \quad f_T = \beta \sqrt{L_0 C_0} / m_0$$

$$(3.97) \quad r = \frac{\delta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \frac{R}{2}$$

Koeficienty  $b, f_P, f_T, r$  mají postupně význam bezrozměrného magnetického pole, bezrozměrného koeficientu u tlakové síly, bezrozměrného koeficientu u síly tření o elektrody a bezrozměrného podílu útlumu obvodu a vlastní frekvence ( $r < 1$  odpovídá tlumeným oscilacím a  $r > 1$  přetlumenému obvodu).

Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme nyní zap-  
sat v bezrozměrném tvaru

$$(3.98) \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{p}_x}{\mu(\bar{x})}$$

$$(3.99) \quad \frac{d\bar{Q}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{p}_Q}{\lambda(\bar{x})}$$

$$(3.100) \quad \frac{d\bar{p}_x}{d\bar{t}} = b \frac{\bar{p}_Q}{\lambda(\bar{x})} + \left( \frac{\bar{p}_Q}{\lambda(\bar{x})} \right)^2 \frac{\lambda_1}{2} + \left( \frac{\bar{p}_x}{\mu(\bar{x})} \right)^2 \frac{\mu_1}{2} + \frac{f_P}{\mu(\bar{x})} - f_T \frac{\bar{p}_x}{\mu(\bar{x})}$$

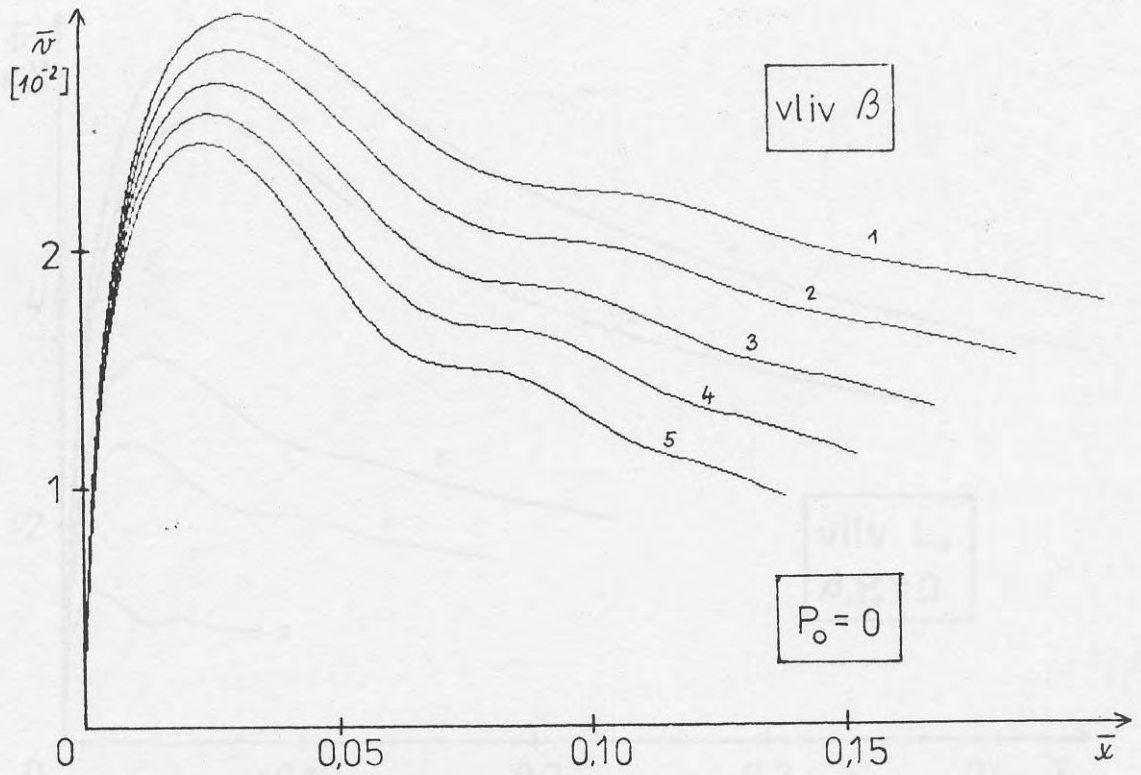
$$(3.101) \quad \frac{d\bar{p}_Q}{d\bar{t}} = 1 - \bar{Q} - 2r \frac{\bar{p}_Q}{\lambda(\bar{x})} - b \frac{\bar{p}_x}{\mu(\bar{x})}$$

Počáteční podmínky jsou  $\bar{x}(0) = \bar{Q}(0) = \bar{p}_x(0) = \bar{p}_Q(0) = 0$ . Tyto rovnice byly řešeny metodou Runge - Kutta 4. řádu na počítači ICL-4-72 a ATARI 1040 ST. Jako grafický výstup byl použit terminál TEKTRONIX nebo bodová tis-

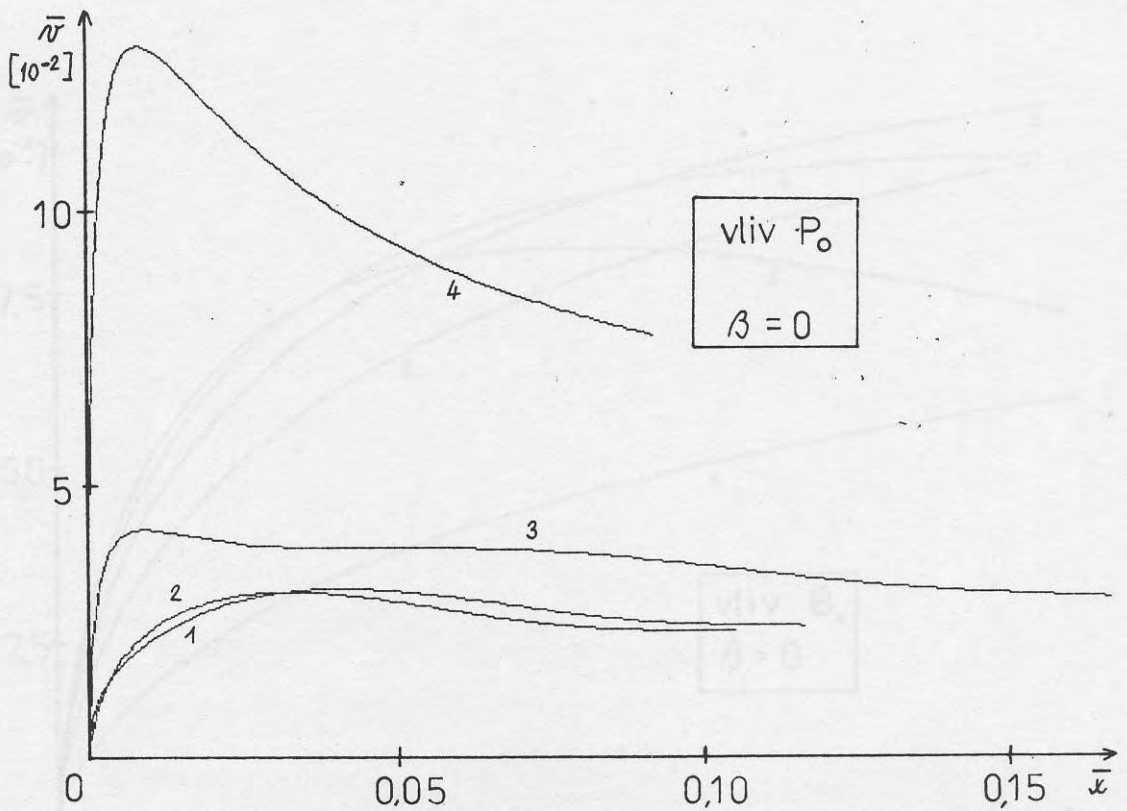
kárna.

Některé výsledky numerických výpočtů jsou na obr. 8 až 18. Průběhy  $v(x)$  pro urychlovač z tab. 3 a měnící se parametry  $\beta, P_0, L_0$  jsou na obr. 8, 9, 10. Z obr. 9 je patrné, že tlak  $P_0$  má podstatnější vliv na urychlovací proces až pro  $P_0 > 10^6$  Pa. Na obr. 11 je znázorněna závislost  $v(x)$  na vnějším magnetickém poli pro urychlovač z tab. 2. Patrné je, že s rostoucím magnetickým polem maximální rychlost z počátku roste, ale potom začíná klesat.

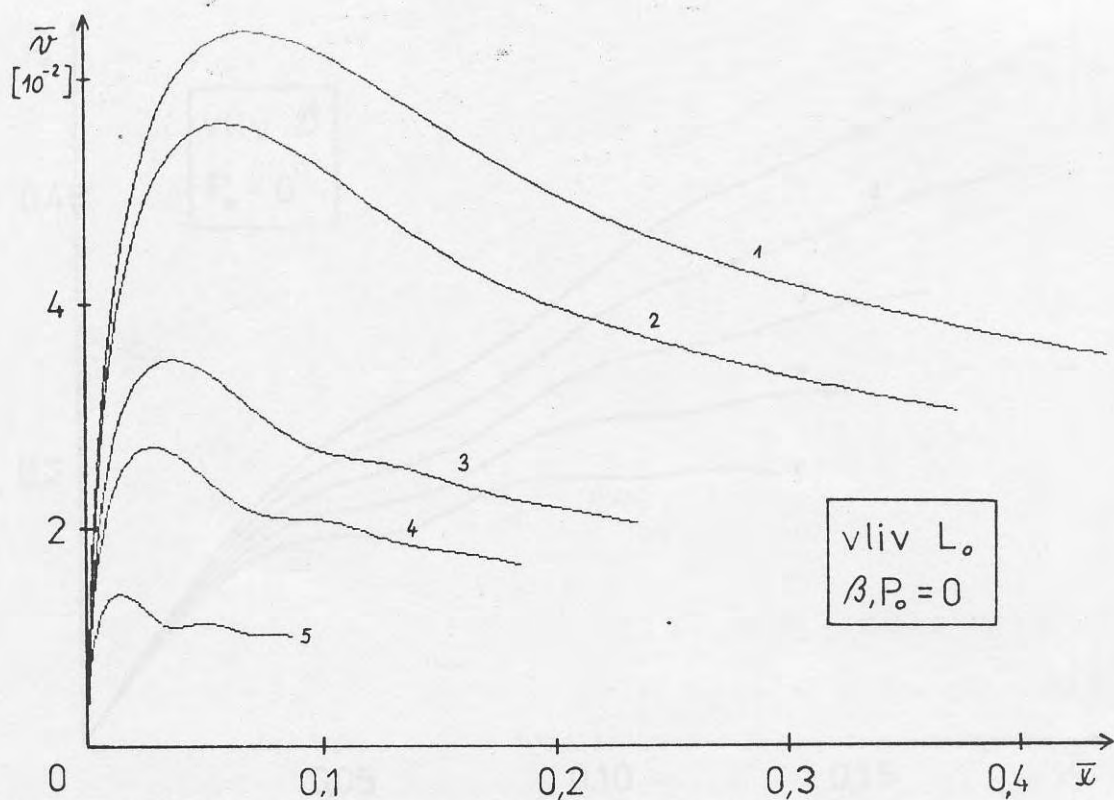
V některých případech mohou mít význam diagramy trajektorií systému ve fázovém prostoru. Jde zejména o závislost  $p_x(x)$ , která nám popisuje mechanickou hybnost zhustku a zátěže dosaženou na vzdálenosti  $x$  a vztah  $p_Q(Q)$ , který popisuje závislost celkového magnetického indukčního toku ( $p_Q = L(x)I + B_0 hx$ ) na náboji, který protekl zhustkem od počátku urychlování. Fázové trajektorie  $p_x(x)$  odpovídající postupně obr. 8 - 11 jsou znázorněny na obr. 12 - 15. Fázové trajektorie  $p_Q(Q)$  pro případy odpovídající obr. 8 a 9 splynou v jedinou křivku na obr. 16. To je způsobeno tím, že průběh elektrických veličin obvodu je jen málo ovlivněn mechanickými ději v urychlovači. Fázové trajektorie  $p_Q(Q)$  pro měnící se parametry  $L_0, B_0$  odpovídající obr. 10 a 11 jsou zobrazeny na obr. 17 a 18. Poznamenejme, že jedné periodě proudu odpovídá změna úhlu  $\varphi$  pol. souřadnic křivky  $p_Q(Q)$  o  $360^\circ$ .



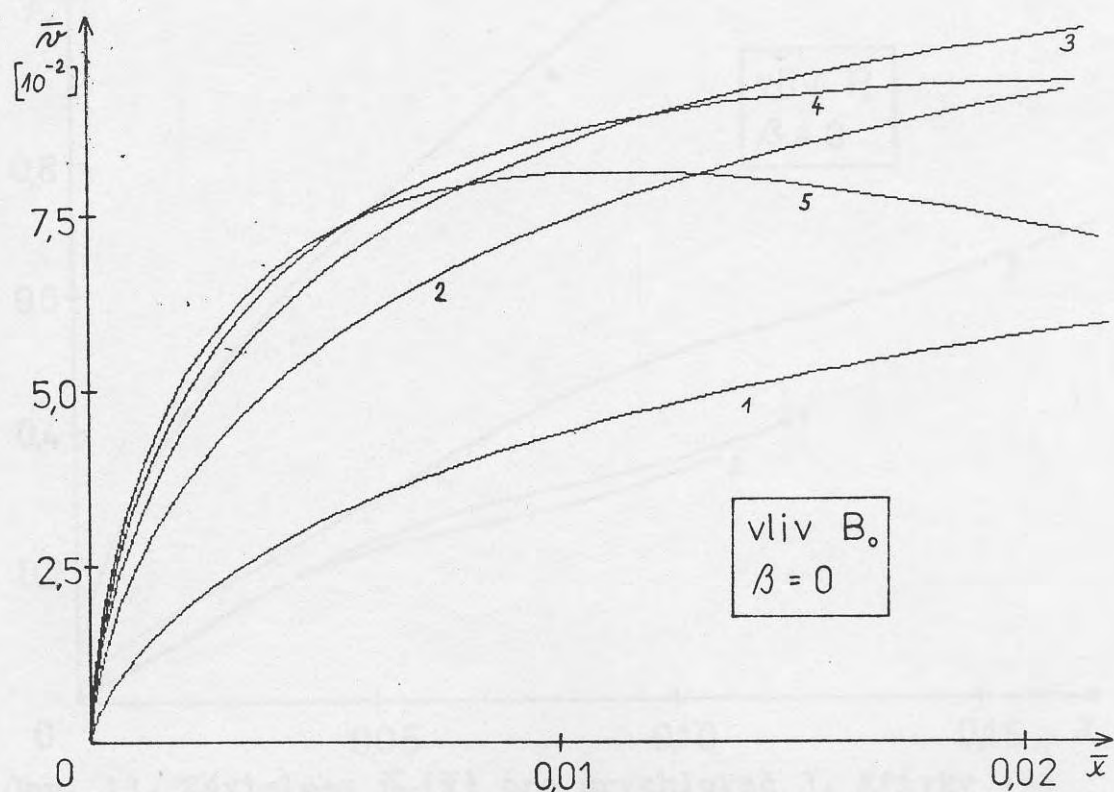
Obr. 8. Závislost  $\bar{v}(\bar{x})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\beta = 0; 0,04; 0,08; 0,12; 0,16 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$ .



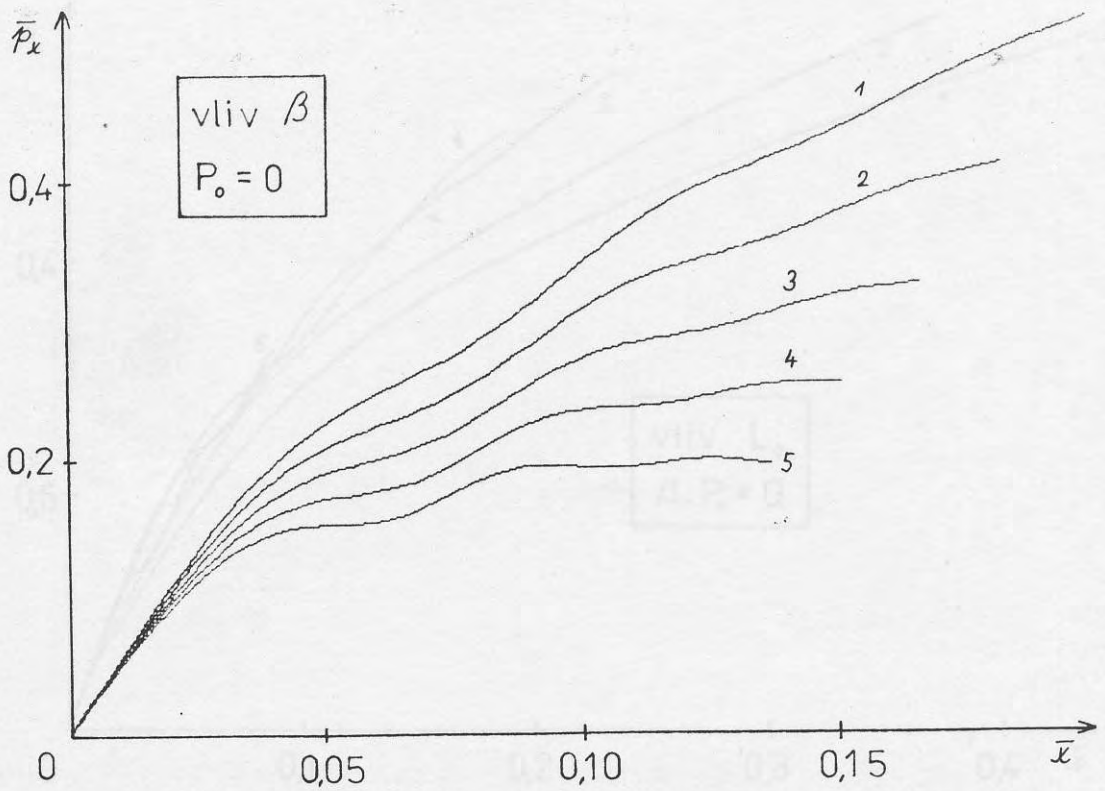
Obr. 9. Závislost  $\bar{v}(\bar{x})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-4 odpovídají hodnotám  $P_0 = 0; 10^6; 10^7; 10^8 \text{ Pa}$ .



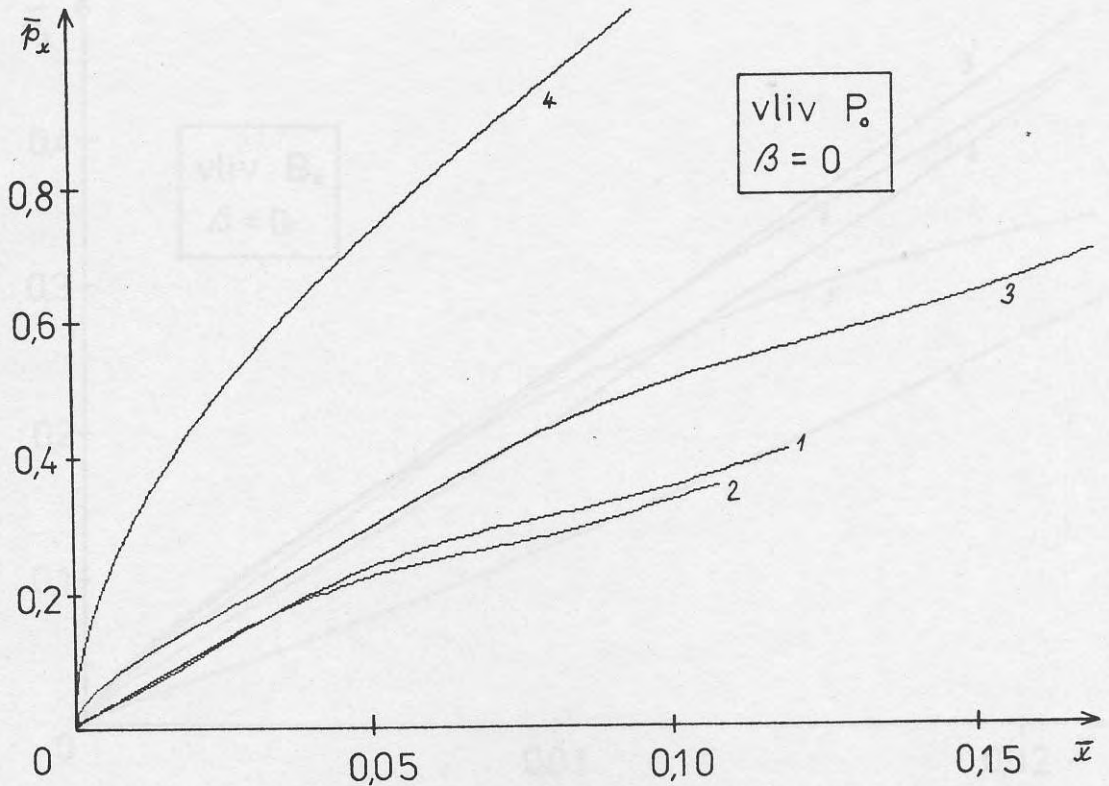
Obr. 10. Závislost  $\bar{v}(\bar{x})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-5 odp. hodnotám  $L_0 = 5 \times 10^{-2}; 10^{-6}; 5 \times 10^{-6}; 10^{-5}; 5 \times 10^{-5} \text{ H.}$



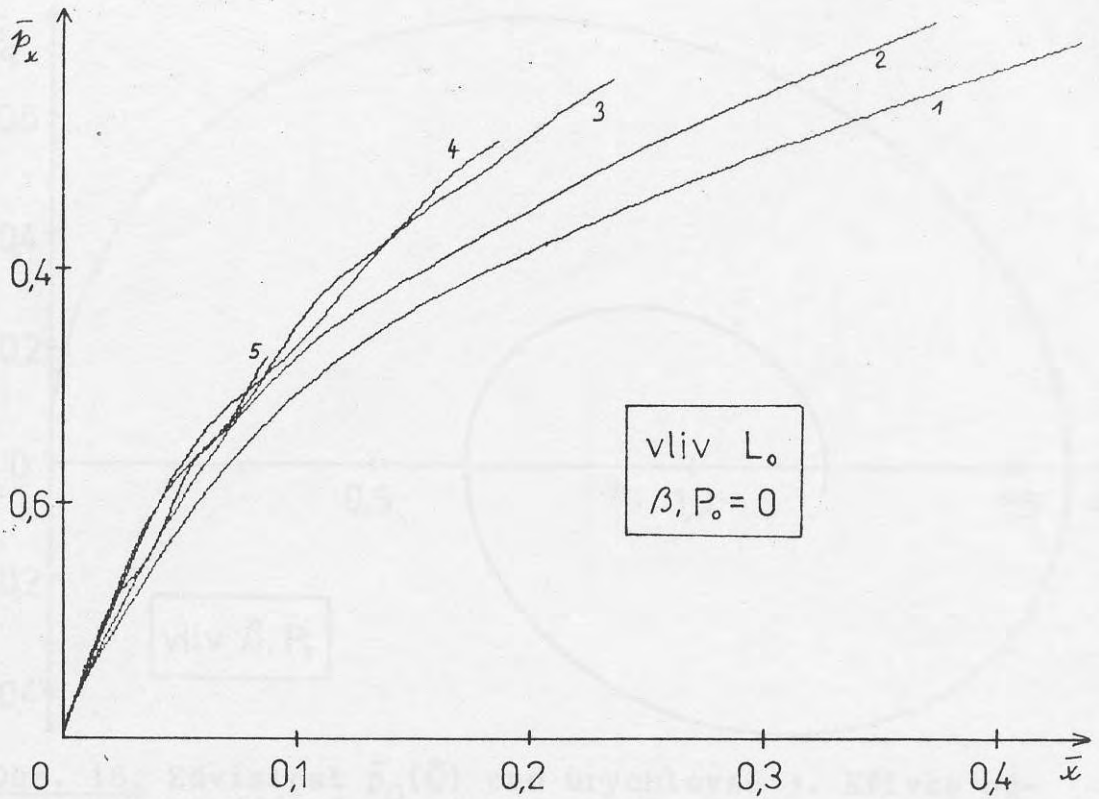
Obr. 11. Závislost  $\bar{v}(\bar{x})$  pro urychlovač 2. Křivky 1-5 odp. hodnotám  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 4 \text{ T.}$



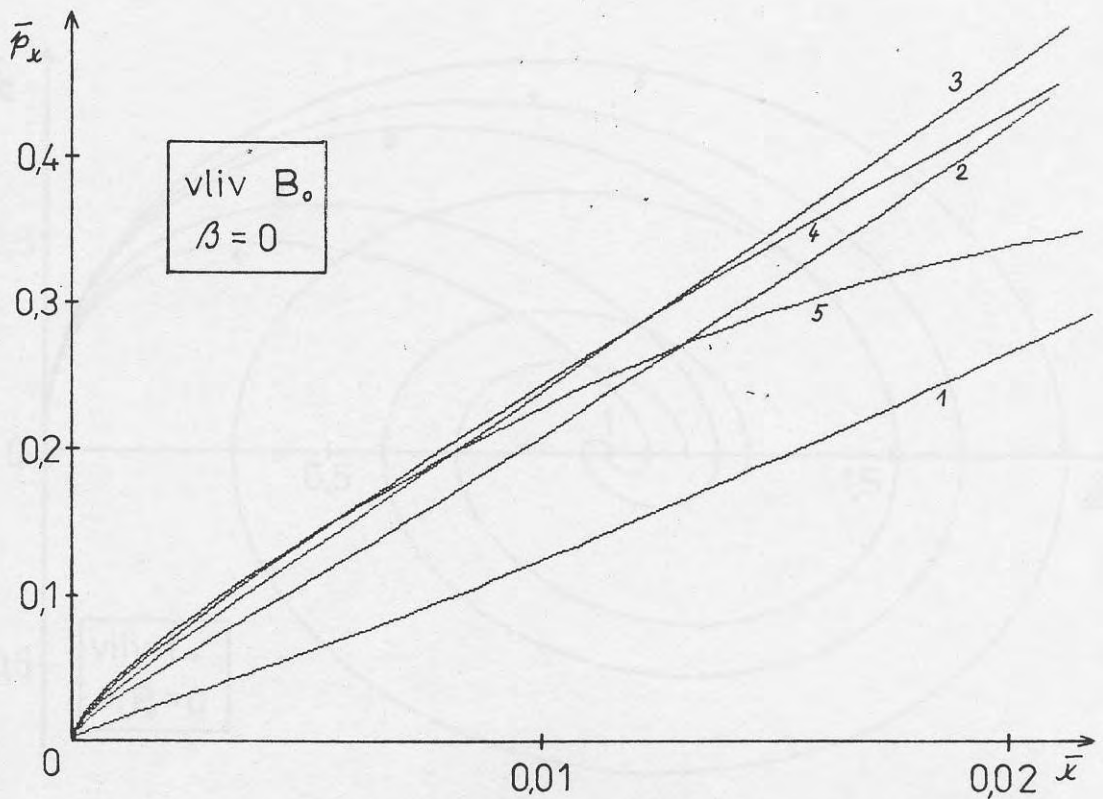
Obr. 12. Závislost  $\bar{p}_x(\bar{x})$  pro urychlovač. 3. Křivky 1-5 odp. hodnotám  $\beta$  z obr. 8.



Obr. 13. Závislost  $\bar{p}_x(\bar{x})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-4 odp. hodnotám  $P_0$  z obr. 9.

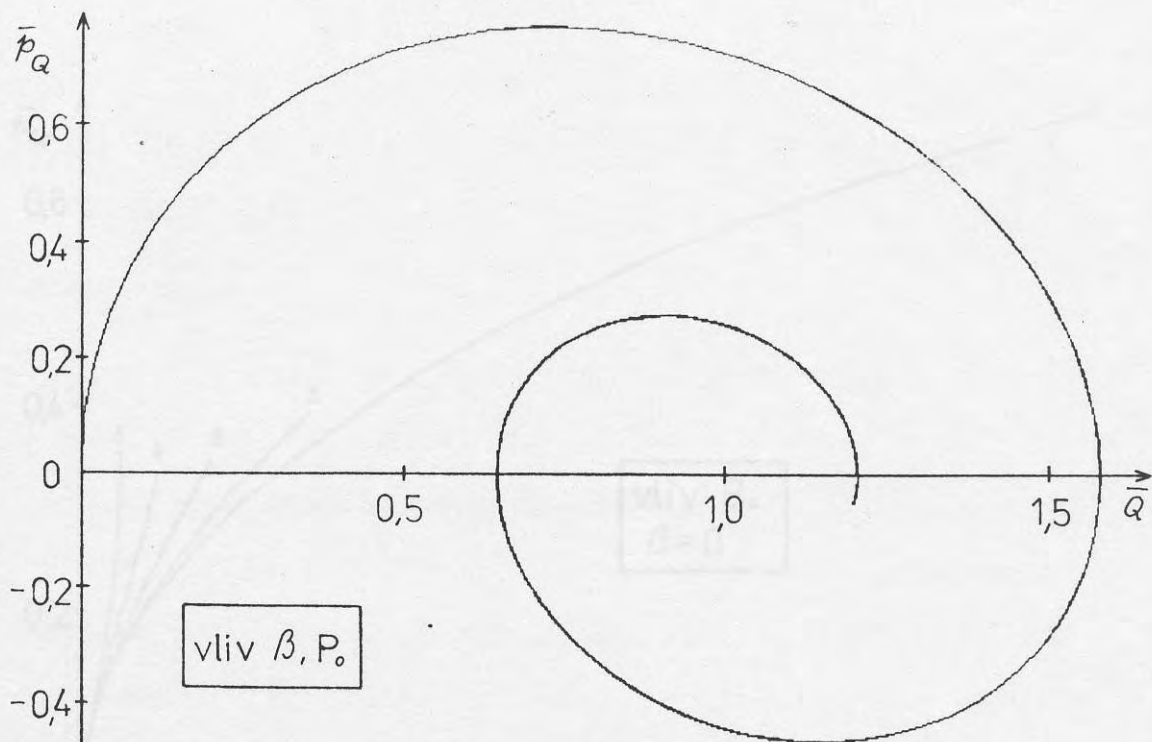


Obr. 14. Závislost  $\bar{p}_x(\bar{x})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $L_0$  z obr. 10.

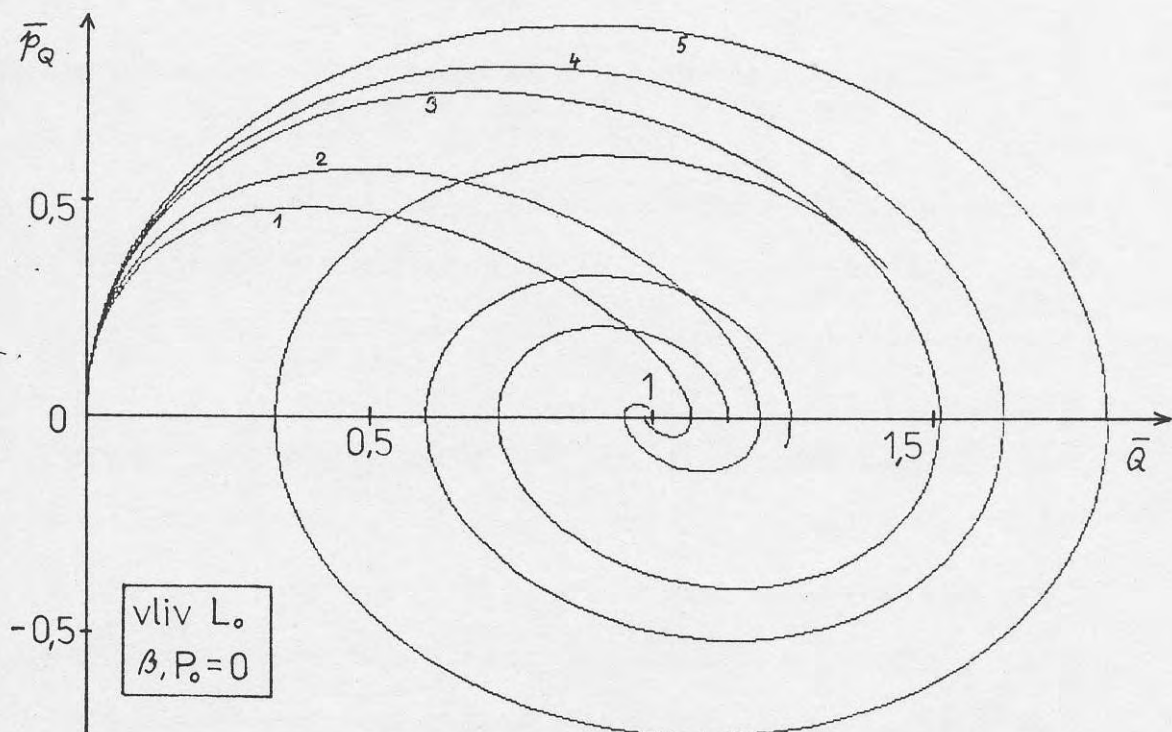


Obr. 15. Závislost  $\bar{p}_x(\bar{x})$  pro urychlovač 2. Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $B_0$  z obr. 11.

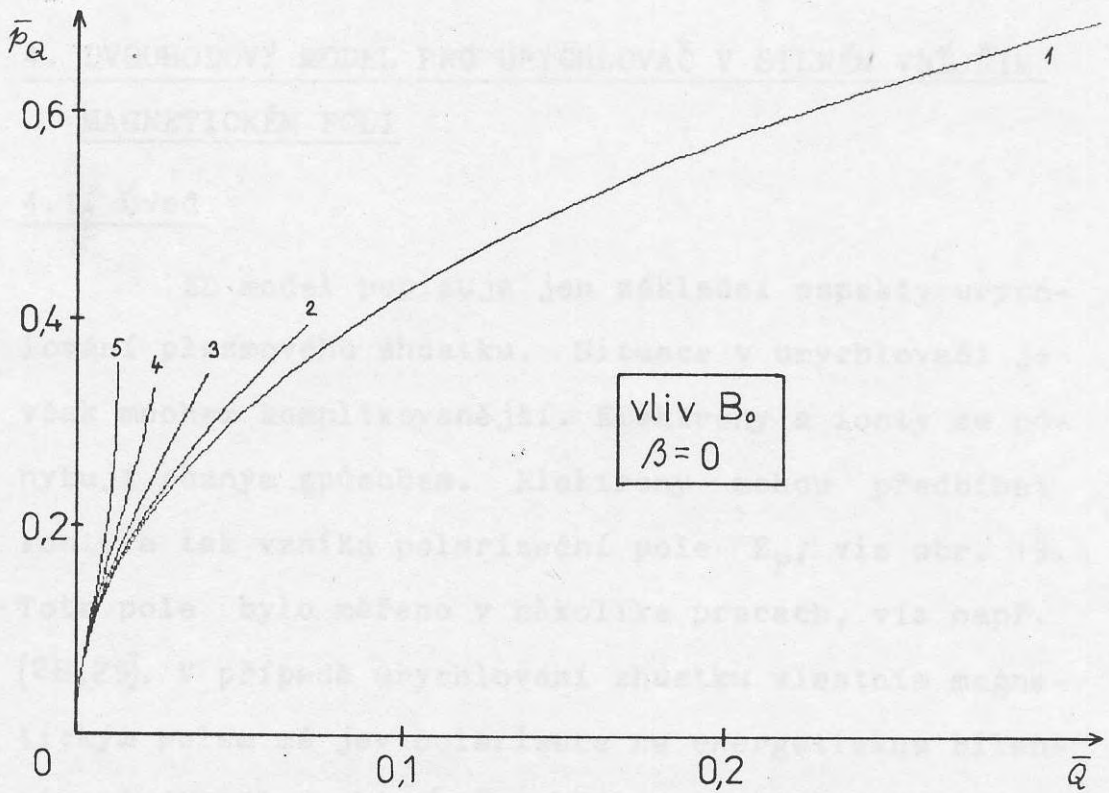




Obr. 16. Závislost  $\bar{p}_Q(\bar{Q})$  pro urychlovač 3. Křivka odpovídá všem hodnotám  $\beta, P_0$  z obr. 8 a 9.



Obr. 17. Závislost  $\bar{p}_Q(\bar{Q})$  pro urychlovač 3. Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $L_0$  z obr. 10.



Obr. 18. Závislost  $\bar{p}_a(\bar{Q})$  pru urychlovač 2. Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $B_0$  z obr.11.

## 4. DVOUBODOVÝ MODEL PRO URYCHLOVAČ V SILNÉM VNĚJŠÍM MAGNETICKÉM POLI

### 4.1. Úvod

ED model popisuje jen základní aspekty urychlování plazmového zhustku. Situace v urychlovači je však mnohem komplikovanější. Elektrony a ionty se pohybují různým způsobem. Elektrony mohou předbíhat ionty a tak vzniká polarizační pole  $E_p$ ; viz obr. 19. Toto pole bylo měřeno v několika pracech, viz např. [28,29]. V případě urychlování zhustku vlastním magnetickým polem má jev polarizace na energetickou bilanci zanedbatelný vliv [4]. Příklad urychlování zhustku v silném vnějším magnetickém poli byl částečně řešen v [27] za předpokladů zanedbatelného vlastního magnetického pole, konstantního průřezu zhustku a konstantního napětí na elektrodách.

V této kapitole budeme formulovat model zhustku složeného z elektronů a iontů, které na sebe vzájemně působí prostřednictvím srážek a polarizačního pole (tzv. dvoubodový model [50]). Zjistíme, v jakém případě dvoubodový model splývá s ED modelem. Ukážeme, že dvoubodový model popisuje jev anisotropní vodivosti plazmatu a jev polarizace. Najdeme jednoduché relace pro maximální polarizační délku a energii za předpokladů zanedbatelného vlastního magnetického pole a konstantního průřezu zhustku. Na rozdíl od práce

[27] budeme uvažovat skutečný průběh napětí na elektrodách a k popisu použijeme vhodnější výchozí soustavu diferenciálních rovnic. Pro jev polarizace nalezneme opět variační formulaci.

#### 4.2. Formulace dvoubodového modelu

Pohybové rovnice elektronů a iontů mají tvar

$$(4.1a) \quad m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -|e| \left[ \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}_0 \right] - \frac{m_e}{\tau_{ei}} (\vec{v}_e - \vec{v}_i)$$

$$(4.1b) \quad m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = +|e| \left[ \vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}_0 \right] + \frac{m_e}{\tau_{ei}} (\vec{v}_e - \vec{v}_i),$$

kde  $m_e, m_i$  jsou hmotnosti elektronů a iontů;  $\vec{v}_e, \vec{v}_i$  jsou rychlosti elektronů a iontů;  $\tau_{ei}$  je střední doba mezi dvěma po sobě následujícími srážkami elektronů s ionty;  $\vec{E}$  je intenzita elektrického pole a  $\vec{B}_0$  indukce vnějšího magnetického pole. Vlastní mg. pole v celé této kapitole zanedbáváme a průřez zhustku považujeme za konstantní.

První člen na pravé straně rovnic (4.1) je Lorentzova síla působící na elektron (iont) a druhý člen popisuje časovou změnu hybnosti elektronu (iontu) způsobenou srážkami. Vzhledem k zákonu akce a reakce má srážkový člen v rovnici pro ionty opačné znaménko. Předpokládáme kvazineutralitu plazmatu, tj. koncentrace elektronů a iontů splňují podmínku  $n_e = n_i = n$ . V rovnicích (4.1) budeme používat místo proměnných  $\vec{v}_e, \vec{v}_i$  rychlost těžiště  $\vec{v}$  a proudovou hustotu  $\vec{j}$ :

$$(4.2a) \quad \vec{v} = \frac{n_i m_i \vec{v}_i + n_e m_e \vec{v}_e}{n_i m_i + n_e m_e} = \frac{m_i \vec{v}_i + m_e \vec{v}_e}{m_i + m_e}$$

$$(4.2b) \quad \vec{j} = n_i |e| \vec{v}_i - n_e |e| \vec{v}_e = n |e| (\vec{v}_i - \vec{v}_e).$$

Po provedení příslušné lineární kombinace rovnic (4.1) dostaneme

$$(4.3a) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{j} \times \vec{B}_0}{n(m_i + m_e)}$$

$$(4.3b) \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n |e|^2}{\sigma_+} [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0] - \frac{|e|}{\sigma_-} (\vec{j} \times \vec{B}_0) - \frac{(1 + m_e/m_i)}{\tau_{ei}} \vec{j},$$

kde veličiny  $\sigma_{\pm}$  jsou definovány vztahy

$$(4.4) \quad \frac{1}{\sigma_{\pm}} = \frac{1}{m_e} \mp \frac{1}{m_i}.$$

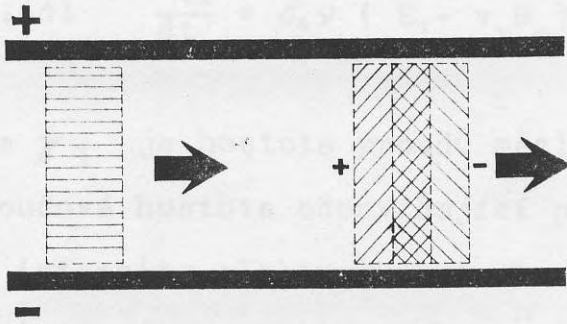
Protože však  $m_e \ll m_i$  je  $\sigma_{\pm} \approx m_e$  a z rovnic (4.3) máme

$$(4.5a) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{nm_i} (\vec{j} \times \vec{B}_0)$$

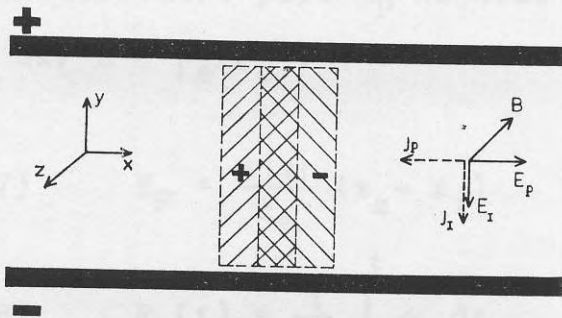
$$(4.5b) \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n |e|^2}{m_e} [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0] - \frac{|e|}{m_e} (\vec{j} \times \vec{B}_0) - \frac{1}{\tau_{ei}} \vec{j}.$$

Rovnice (4.5a) představuje pohybovou rovnici pro těžiště plazmového zhustku a rovnice (4.5b) je zobecněný

Ohmův zákon. Jeho diskuze bude provedena v odst. 4.4 této kapitoly. Směry jednotlivých vektorů jsou znázorněny na obr. 20.



Obr. 19. Polarizace plazmového zhustku



$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_x, v_y, 0) \\ \vec{E} &= (E_p, -E_I, 0) \\ \vec{B} &= (0, 0, -B_0) \\ \vec{J} &= (-J_p, -J_I, 0) \end{aligned}$$

Obr. 20. Směry jednotlivých vektorů

Ve složkách má soustava rovnic (4.5) tvar

$$(4.6a) \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{B_0}{nm_i} \gamma_I$$

$$(4.6b) \quad \frac{dv_y}{dt} = - \frac{B_0}{nm_i} j_P$$

$$(4.6c) \quad \frac{dj_P}{dt} = \sigma_0 v (-E_P + v_y B_0) + \omega_L j_I - \nu j_P$$

$$(4.6d) \quad \frac{dj_I}{dt} = \sigma_0 v (E_I - v_x B_0) - \omega_L j_P - \nu j_I ,$$

kde  $j_I$  je hustota proudu mezi elektrodami,  $j_P$  je proudová hustota odpovídající polarizačnímu jevu,  $E_I$  je intenzita elektrického pole mezi elektrodami,  $E_P$  je intenzita polarizačního pole. Veličiny  $\sigma_0, \nu, \omega_L$  jsou definovány v tabulce 6.

Soustavu rovnic (4.6) musíme doplnit vztahy pro elektrická pole  $E_P$  a  $E_I$ . Rovnici pro intenzitu elektrického pole  $E_P$  najdeme snadno z Gaussovy věty  $\text{div } E = \rho_e / \epsilon_0$ :

$$(4.7) \quad E_P = \frac{n |e|}{\epsilon_0} (x_e - x_i) , \text{ neboli}$$

$$(4.8) \quad E_P(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^t j_P dt .$$

Velikost intenzity elektrického pole  $E_I$  určíme z napětí na elektrodách  $U(t)$ :

$$(4.9) \quad E_I(t) = \frac{U(t)}{h} = \frac{U_0 - S \left[ R_0 j_I + L_0 \frac{dj_I}{dt} + \frac{1}{c_0} \int j_I dt \right]}{h} ,$$

kde  $U(t)$  je vyjádřeno jako původní napětí kondenzátorové baterie zmenšené o úbytek napětí na odporu vněj-

Veličina	definice	hodnota	význam
$\nu$	$\nu = 1/\tau_{ei}$	$3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$	srážková frekvence elektronů s ionty
$\sigma_o$	$\sigma_o = \frac{ne^2}{m_e \nu}$	$1 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$	vodivost plazmatu
$R_P$	$R_P = \frac{h}{S\sigma_o}$	$4 \cdot 10^{-3} \Omega$	odpor plazmatu
$\delta$	$\delta = \frac{R_o + R_P}{2L_o}$	$2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$	útlum el. obvodu
$\omega_o$	$\omega_o^2 = \frac{1}{L_o C_o}$	$2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$	vlastní frekvence el. obvodu
$\omega_p$	$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_o}$	$6 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$	plazmová frekvence
$\omega_e$	$\omega_e = \frac{ e B_o}{m_e}$	$5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$	cyklotronová frekvence elektronů
$\omega_i$	$\omega_i = \frac{ e B_o}{m_i}$	$1 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$	cyklotronová frekvence iontů
$\chi$	$\chi = \frac{R_P}{\nu L_o}$	$4 \cdot 10^{-8}$	bezrozměrný parametr

Tab. 6. Definice, význam a typické hodnoty některých veličin. Hodnoty byly spočteny pro urychlovač z tabulky 1. Ostatní hodnoty byly voleny  $L_o = 3 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ ;  $R_o = 0,1 \Omega$ ;  $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $n = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ;  $T_e = 3 \text{ eV}$ ;  $B_o = 3 \text{ T}$ ;  $m_i = 20 m_p$ .

šího obvodu, o úbytek napětí na indukčnosti vnějšího obvodu a o úbytek napětí kondenzátorové baterie; S je



průřez zhustku podél elektrod.

Po dosazení vztahů (4.8) a (4.9) do rovnic (4.6) získáme soustavu integrodiferenciálních rovnic dvoubodového modelu:

$$(4.10a) \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{B_0}{nm_i} j_I$$

$$(4.10b) \quad \frac{dv_y}{dt} = - \frac{B_0}{nm_i} j_P$$

$$(4.10c) \quad \frac{dj_P}{dt} + \nu j_P + \omega_P^2 \int_0^t j_P dt - \sigma_0 \nu v_y B_0 = \omega_e j_I$$

$$(4.10d) \quad \left(L_0 + \frac{R_P}{\nu}\right) \frac{dj_I}{dt} + (R_0 + R_P) j_I + \frac{1}{C_0} \int_0^t j_I dt + \frac{B_0 h v_x}{S} = \\ = \frac{U_0}{S} - \frac{R_P \omega_e}{\nu} j_P$$

Význam konstant  $\omega_P$ ,  $\omega_e$ ,  $\sigma_0$ ,  $\nu$ ,  $R_P$  je dán v tabulce 6.

### 4.3. Souvislost dvoubodového modelu s ED modelem

Dvoubodový model neuvažuje přítomnost neutrálních částic. Proto předpokládáme sto procentní jednonásobnou ionizaci plazmového zhustku. Hmotnost celého zhustku je ( $m_e \ll m_i$ )

$$(4.11) \quad m_0 = nV_{zh} m_i = nShm_i ,$$

kde  $V_{zh}$  je objem zhustku. Dosadíme -li nyní do rovnice (4.10a) za  $nm_i$  z (4.11) a uvážíme -li, že  $I = S j_I$ ,

dostaneme pohybovou rovnici ED modelu

$$(4.12a) \quad m_0 \frac{dv_x}{dt} = B_0 h I \quad .$$

Jestliže v rovnici (4.10d) provedeme limitu  $\frac{1}{\nu} \rightarrow 0$  (interval  $1/\nu$  mezi dvěma po sobě následujícími srážkami je podstatně kratší než libovolný čas charakterisující obvod urychlovače), dostaneme obvodovou rovnici pro ED model:

$$(4.12b) \quad S \left[ L_0 \frac{d\mathcal{I}}{dt} + (R_0 + R_P) \mathcal{I} + \frac{1}{C_0} \int_0^t \mathcal{I} dt + B_0 h v_x \right] = U_0 .$$

V případě stoprocentní jednonásobné ionizace a pro  $1/\nu \rightarrow 0$  jsou tedy základní rovnice ED modelu bez uvážení nabalování hmoty a bez dalších členů (síly tření atd.) obsaženy v dvoubodovém modelu zhustku ve vnějším magnetickém poli.

#### 4.4. Anisotropní vodivost

V tomto odstavci ukážeme, že dvoubodový model popisuje jev anisotropní vodivosti plazmatu. Vyjděme z rovnice (4.5b) pro proudovou hustotu a přepišme ji za pomoci symbolů z tabulky 6 do tvaru

$$(4.13) \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \sigma_0 \nu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) - \omega_e (\vec{j} \times \vec{n}) - \nu \vec{j} \quad ,$$

kde

$$(4.14) \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{B}_0}{B_0}$$

je jednotkový vektor ve směru magnetického pole. Ve složkách máme

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}_i}{dt} &= \sigma_0 \nu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0)_i - \omega_e \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}_j n_k - \nu \mathcal{J}_i = \\ &= \sigma_0 \nu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0)_i - \nu A_{ij} \mathcal{J}_j, \end{aligned}$$

neboli

$$(4.16) \quad \frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt} = \sigma_0 \nu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) - \nu \vec{A} \cdot \vec{\mathcal{J}},$$

kde jsme označili

$$(4.17) \quad A_{ij} = \frac{\omega_e}{\nu} \varepsilon_{ijk} n_k + \delta_{ij}, \quad \text{tj}$$

$$(4.18) \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_e}{\nu} n_3 & -\frac{\omega_e}{\nu} n_2 \\ -\frac{\omega_e}{\nu} n_3 & 1 & \frac{\omega_e}{\nu} n_1 \\ \frac{\omega_e}{\nu} n_2 & -\frac{\omega_e}{\nu} n_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ve stacionárním případě je  $\frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt} = 0$  a z (4.16) dostaneme Ohmův zákon ve tvaru

$$(4.19) \quad \vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}' \quad ; \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad , \text{ kde}$$

$$(4.20) \quad \vec{\sigma} = \sigma_0 \vec{A}^{-1}$$

je tenzor elektrické vodivosti. Zvolíme -li souřadnicový systém tak, že magnetické pole má směr osy z, snadno nalezneme matici inverzní k  $\vec{A}$  a tím tenzor vodivosti :

$$(4.21) \quad \vec{\sigma} = \sigma_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_e/\nu)^2} & \frac{-\omega_e/\nu}{1+(\omega_e/\nu)^2} & 0 \\ \frac{\omega_e/\nu}{1+(\omega_e/\nu)^2} & \frac{1}{1+(\omega_e/\nu)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

#### 4.5. Polarizace plazmatu

Nejprve snížíme počet rovnic soustavy (4.10). Zintegrujeme rovnice (4.10a,b) a dosadíme z nich za  $v_x, v_y$  do rovnic (4.10c,d). Tak dostaneme

$$(4.22a) \quad \frac{d\gamma_P}{dt} + \nu\gamma_P + \Omega_P^2 \int_0^t \gamma_P dt = \omega_e \gamma_I$$

$$(4.22b) \quad (1+\chi) \frac{d\gamma_I}{dt} + 2\delta\gamma_I + \Omega_o^2 \int_0^t \gamma_I dt = \frac{U_o}{S} - \chi\omega_e\gamma_P,$$

kde

$$(4.23a) \quad \Omega_p \equiv \omega_p \sqrt{1 + \frac{\epsilon_0}{m_i} \frac{B_0^2}{n}}$$

$$(4.23b) \quad \Omega_o \equiv \omega_o \sqrt{1 + \frac{hC_o}{Sm_i} \frac{B_0^2}{n}}$$

Konstanty  $\omega_p, \omega_o, \nu, \sigma, \chi$  jsou zavedeny v tabulce 6. Rovnice (4.22) popisují jev polarizace plazmatu (jev rozdílného pohybu elektronů a iontů plazmového zhustku v průběhu výboje). Rovnice (4.22) byly získány za předpokladů zanedbatelného vlastního magnetického pole a konstantního průřezu zhustku. Jde o dvě rovnice tlumených kmitů svázaných svými pravými stranami. Kdybychom zanedbali vlastní i vnější magnetické pole ( $B_0=0$ ), potom  $\Omega_p = \omega_p$  (elektrony a ionty oscilují vzhledem k sobě na plazmové frekvenci) a  $\Omega_o = \omega_o$  (frekvence proudového výboje je rovna vlastní frekvenci obvodu  $\omega_o$ ). V tomto případě by však nenastával žádný pohyb plazmového zhustku jako celku (viz rovnice (4.10a,b)), protože vlastní i vnější magnetická pole jsou nulová. Z rovnice (4.23a) je zřejmé, že pro experimentálně dosažitelné hodnoty koncentrace plazmatu a vnějšího magnetického pole je  $\Omega_p \approx \omega_p$ . Vztah frekvencí  $\Omega_o$  a  $\omega_o$  je znázorněn na obr.21. Se vzrůstajícím magnetickým polem se zkracuje perioda výboje.

Snadno lze ukázat, že rovnice (4.22a) představuje tlumené oscilace, nikoli přetlumený kmit. Pod-

le [30] můžeme pro srážkovou frekvenci psát

$$(4.24) \quad \nu \approx \frac{n e^4}{16 \pi \epsilon_0^2 m^{1/2} (kT_e)^{3/2}} \ln \Lambda, \quad \text{kde}$$

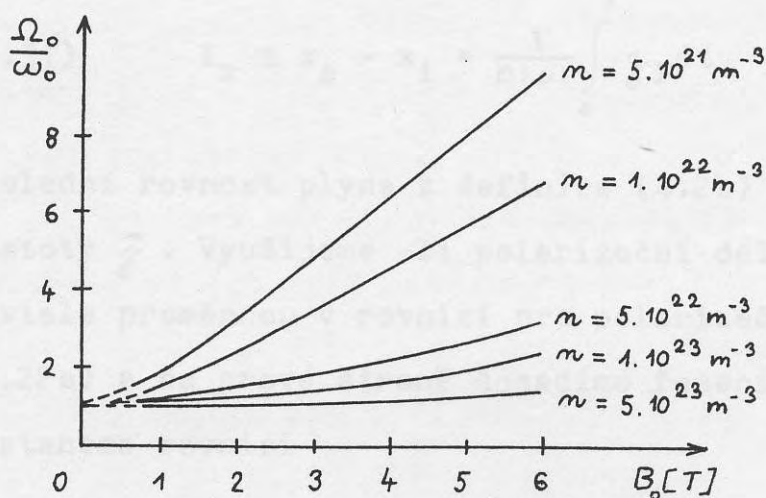
$$(4.25) \quad \ln \Lambda \approx \ln \frac{12 \pi (\epsilon_0 kT_e)^{3/2}}{n^{1/2} |e|^3}$$

je Coulombův logaritmus. Za pomoci těchto vztahů vidíme, že

$$(4.26) \quad \frac{\nu/2}{\Omega_p} = \frac{\nu/2}{\omega_p \sqrt{1 + \frac{\epsilon_0 B_0^2}{m_i m}}} \leq \frac{\nu/2}{\omega_p} =$$

$$= \frac{n^{1/2} |e|^3 \ln \Lambda}{32 \pi (\epsilon_0 kT_e)^{3/2}} = \frac{3}{8} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} < 1$$

a jde tedy skutečně o tlumené oscilace.



Obr. 21. Vliv vnějšího magnetického pole na frekvenci proudového výboje.

Soustavu rovnic (4.22) budeme řešit za počátečních podmínek

$$(4.27) \quad j_P(0) = j_I(0) = 0 \quad .$$

Dále budeme předpokládat, že  $1/\gamma \rightarrow 0$ , neboli  $\chi \rightarrow 0$  (viz diskuzi v odst. 4.3), tj polarizační proud nemá vliv na výbojový proud. Potom můžeme přímo psát řešení rovnice (4.22b)

$$(4.28) \quad j_I(t) = j_{I_0} \cdot e^{-\delta t} \sin(\bar{\Omega}_0 t) \quad , \quad \text{kde}$$

$$(4.29) \quad j_{I_0} \equiv \frac{U_0}{SL_0 \bar{\Omega}_0} \quad ,$$

$$(4.30) \quad \bar{\Omega}_0^2 \equiv \Omega_0^2 - \delta^2 \quad .$$

Zaveďme nyní polarizační délku  $l_x$  vztahem

$$(4.31) \quad l_x \equiv x_e - x_i = \frac{1}{n|\epsilon|} \int_0^t j_P dt \quad .$$

Poslední rovnost plyne z definice (4.2b) proudové hustoty  $\vec{j}$ . Využijeme-li polarizační délku  $l_x$  jako závisle proměnnou v rovnici pro polarizační proud (4.22a) a na pravé straně dosadíme řešení (4.28), dostaneme rovnici

$$(4.32) \quad \ddot{l}_x + \nu \dot{l}_x + \Omega_P^2 l_x = \frac{\omega_e}{n|\epsilon|} j_{I_0} e^{-\delta t} \sin(\bar{\Omega}_0 t) \quad .$$

Tato rovnice pro polarizační délku  $l_x$  má obecné řešení

$$(4.33) \quad l_x(t) = C e^{-\frac{\nu}{2}t} \sin(\bar{\Omega}_P t + \varphi_c) + \\ + D e^{-\delta t} \sin(\bar{\Omega}_O t + \varphi_d) \quad , \text{ kde}$$

$$(4.34) \quad \bar{\Omega}_P^2 \equiv \Omega_P^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2$$

a  $C, \varphi_c, D, \varphi_d$  jsou zatím neurčené konstanty. První část je řešení rovnice (4.32) bez pravé strany. Jde o vzájemné oscilace elektronů a iontů s frekvencí  $\bar{\Omega}_P$ . Tyto oscilace jsou ale velmi rychle utlumeny v charakteristickém čase  $\tau_\nu = 2/\nu$ . Uplatňují se tedy jen v počátečních fázích výboje. Druhá část řešení (4.33) je partikulární integrál rovnice (4.32). Jde o vynucený kmit frekvence  $\bar{\Omega}_O$  výboje kondenzátorové baterie, který má koeficient útlumu  $\delta$ . Charakteristický čas útlumu  $\tau_\delta = 1/\delta$  je mnohem delší než doba pobytu zhustku v urychlovači.

V čase  $t \gg 2/\nu$  lze tedy za řešení rovnice (4.32) považovat již jen jeho partikulární část:

$$(4.35) \quad l_x(t) = D e^{-\delta t} \sin(\bar{\Omega}_O t + \varphi_d) \quad .$$

Konstanty  $D, \varphi_d$  určíme dosazením partikulárního řešení (4.35) do rovnice (4.32), např. v komplexním



tvaru. Po krátkém výpočtu vyjde

$$(4.36) \quad D = \frac{\frac{\omega_e}{n|e|} \gamma_{I_0}}{\sqrt{(\Omega_P^2 - \bar{\Omega}_0^2 + \sigma^2 - \nu\sigma)^2 + 4\bar{\Omega}_0^2(\frac{\nu}{2} - \sigma)^2}}$$

$$(4.37) \quad \text{tg}(\varphi_d) = - \frac{2\bar{\Omega}_0(\nu/2 - \sigma)}{\Omega_P^2 - \bar{\Omega}_0^2 + \sigma^2 - \nu\sigma}$$

Zanedbáme-li nepodstatné členy v (4.36) a (4.37), máme

$$(4.36') \quad D \approx \frac{\omega_e \gamma_{I_0}}{n|e| \Omega_P^2}$$

$$(4.37') \quad \text{tg}(\varphi_d) \approx 0$$

Polarizační délka  $l_x$  bude maximální v čase  $t \approx \frac{\pi}{2\bar{\Omega}_0}$  a bude mít hodnotu ( $\bar{\Omega}_0 \approx \Omega_0, \bar{\Omega}_P \approx \Omega_P$ )

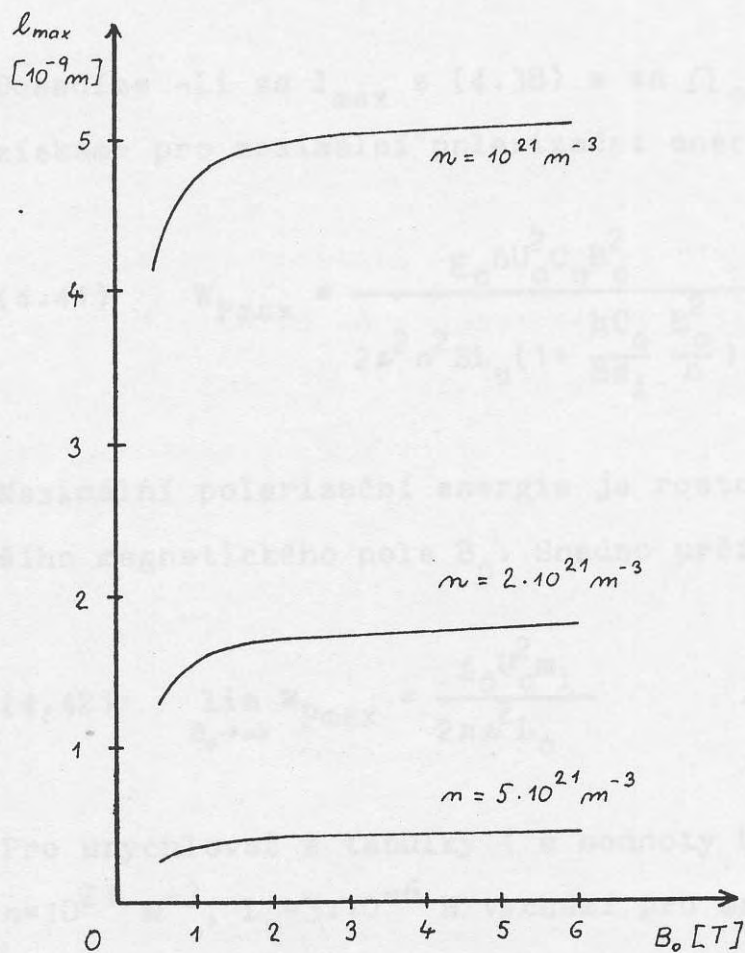
$$(4.38) \quad l_{\max} = \frac{\omega_e \gamma_{I_0}}{n|e| \Omega_P^2} \exp\left(-\frac{\pi\sigma}{2\bar{\Omega}_0}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\epsilon_0 U_0 B_0}{SL_0 n \Omega_0 \Omega_P^2} \exp\left(-\frac{\pi\sigma}{2\Omega_0}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\epsilon_0 U_0 B_0}{n^2 e^2 SL_0 \Omega_0} \exp\left(-\frac{\pi\sigma}{2\Omega_0}\right)$$

Veličina  $l_{\max}$  je pro některé hodnoty koncentrací a magnetických polí vynesena v grafu na obr. 22.

S rostoucí koncentrací plazmatu polarizační délka velmi rychle klesá.



Obr. 22 . Polarizační délka  $l_{\max}$  pro urychlovač z tabulky 1;  $U_0 = 16 \text{ kV}$ ,  $L_0 = 3 \mu\text{H}$ ,  $S = 5 \text{ cm}^2$ ,  $R_0 = 0,1 \Omega$ .

Maximální polarizační energii určíme ze vztahu

$$(4.39) \quad W_{P\max} = \int_0^{l_{\max}} |e| E_P n V dl_x \quad ,$$

kde  $V=Sh$  je objem zhustku a  $E_P = |\varrho|nl_x/\epsilon_0$  je polarizační pole. Po jednoduché integraci dostaneme

$$(4.40) \quad W_{Pmax} = \frac{|\varrho|^2 n^2 Sh \cdot l_{max}^2}{2 \epsilon_0} \cdot$$

Dosadíme-li za  $l_{max}$  z (4.38) a za  $\Omega_0$  z (4.23b), získáme pro maximální polarizační energii výraz

$$(4.41) \quad W_{Pmax} = \frac{\epsilon_0 h U_0^2 C_0 B_0^2}{2 \varrho^2 n^2 S L_0 \left(1 + \frac{h C_0}{S m_i} \frac{B_0^2}{n}\right)} \cdot$$

Maximální polarizační energie je rostoucí funkcí vnějšího magnetického pole  $B_0$ . Snadno určíme

$$(4.42) \quad \lim_{B_0 \rightarrow \infty} W_{Pmax} = \frac{\epsilon_0 U_0^2 m_i}{2 n \varrho^2 L_0} \cdot$$

Pro urychlovač z tabulky 1 a hodnoty  $U_0=16$  kV,  $m_i=20m_p$ ,  $n=10^{21} \text{ m}^{-3}$ ,  $L_0=3 \cdot 10^{-6}$  H vychází pro maximální polarizační energii velmi malá hodnota  $W_{Pmax}=5 \cdot 10^{-7}$  J. Jev polarizace tedy neovlivní energetickou bilanci pohybujícího se zhustku ani v případě extrémně silných vnějších magnetických polí. Může ovšem mít značný vliv na vnitřní strukturu plazmového zhustku.

#### 4.6. Variační formulace polarizačního jevu

Za zobecněné souřadnice budeme volit proudové hustoty  $j_P, j_I$  :

$$(4.43) \quad q_1(t) = j_P(t) \quad ,$$

$$(4.44) \quad q_2(t) = j_I(t) \quad .$$

Aby bylo možné zavést Rayleighovu disipační funkci, je nutné rovnice polarizace upravit tak, aby matice  $\alpha_{kl}$  ve vztahu (3.18) byla symetrická; tedy budeme místo rovnic (4.22) volit

$$(4.45) \quad \epsilon_P = -\chi \left[ \ddot{j}_P - \nu \dot{j}_P - \Omega_P^2 j_P \right] + \chi \omega_e \dot{j}_I = 0$$

$$(4.46) \quad \epsilon_I = (1+\chi) \ddot{j}_I + 2\delta \dot{j}_I + \Omega_o^2 j_I + \chi \omega_e \dot{j}_P = 0.$$

Po výpočtu analogickém jako v kapitole 3.3 určíme Rayleighovu disipační funkci a Lagrangeovu funkci:

$$(4.47) \quad \mathcal{F} = -\frac{1}{2} \chi \nu \dot{j}_P^2 + \delta \dot{j}_I^2 + \chi \omega_e \dot{j}_P \dot{j}_I \quad ,$$

$$(4.48) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \chi \dot{j}_P^2 + \frac{1}{2} \chi \Omega_P^2 j_P^2 + \frac{1}{2} (1+\chi) \dot{j}_I^2 - \\ - \frac{1}{2} \Omega_o^2 j_I^2 \quad .$$

Zde je dobře patrný význam bezrozměrného parametru  $\chi$

pro polarizaci. Je-li  $\chi \rightarrow 0$  máme běžnou Lagrangeovu funkci pro tlumený kmit proudu, ve které členy popisující polarizaci nevystupují.

Najděme nyní zobecněné hybnosti a zobecněnou energii systému

$$(4.49) \quad p_P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{j}_P} = -\chi \dot{j}_P$$

$$(4.50) \quad p_I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{j}_I} = (1+\chi) \dot{j}_I$$

$$(4.51) \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{j}_P} \dot{j}_P + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{j}_I} \dot{j}_I - \mathcal{L} =$$

$$= -\frac{1}{2} \chi \dot{j}_P^2 + \frac{1}{2} (1+\chi) \dot{j}_I^2 - \frac{1}{2} \chi \Omega_P^2 j_P^2 + \frac{1}{2} \Omega_0^2 j_I^2.$$

Hamiltonova funkce pro polarizaci je

$$(4.52) \quad \mathcal{H}(j_P, j_I, p_P, p_I) = -\frac{p_P^2}{2\chi} + \frac{p_I^2}{2(1+\chi)} -$$

$$- \chi \frac{1}{2} \Omega_P^2 j_P^2 + \frac{1}{2} \Omega_0^2 j_I^2$$

a Hamiltonovy kanonické rovnice mají tvar

$$(4.53) \quad \frac{dj_P}{dt} = -\frac{p_P}{\chi}$$

$$(4.54) \quad \frac{dj_I}{dt} = \frac{p_I}{(1+\chi)}$$

$$(4.55) \quad \frac{dp_P}{dt} = \chi \Omega_P^2 \rho_P - \nu \rho_P - \frac{\chi}{1+\chi} \omega_e \rho_I$$

$$(4.56) \quad \frac{dp_I}{dt} = -\Omega_o^2 \rho_I - \frac{2\delta}{1+\chi} \rho_I + \omega_e \rho_P$$

... v urych-  
lových plynůch se statistického i mechanického tlaku  
je explaze drátku. Požádní hmotnost je relativně  
dobře definovaná a k elektrodynamické urychlovací síle  
přistupují ještě tlaková síla. V některých zobra-  
zeních pro urychlování drátových tyčů se využívá do-  
středně jen tlaková síla od explaze drátku, její velikost  
až i známá převyšuje možnosti klasické chemické dr-  
havy [40-43].

Samotná explaze drátku je dosti komplikovaný  
jev, při kterém látka prochází pevnou, kapalnou, plynnou  
i plazmatickou stadiem. Při dostatečně rychlé  
explazi lze dosáhnout teplot až  $10^6$  K [35]. Další  
fáze rozdělení na několik fází: 1) ohřev drátku v pevné  
stadiem, 2) ohřev drátku v kapalném stadiem, 3) ohřev  
drátku v plynném stadiem, 4) ohřev drátku v plazmatickém  
stadiem. Podmínky chemické dráhy jsou  
odlišné, neboť v drátku dochází k  
[35, 36]. Při explazi drátku je dodána energie  
mnohá nebo rovná k energii nutnou k celkové  
explazi drátku, která je jeho fragmentací [37].  
Rozpad fragmentů drátku [37] jsou

$$(4.57) \quad D \approx 4 \rho / \rho_0$$

## 5. EXPLODUJÍCÍ DRÁTKY

### 5.1. Úvod

Velmi vhodnou metodou iniciace výboje v urychlovačích plazmatu za atmosférického i sníženého tlaku je exploze drátku. Počáteční hmotnost je relativně dobře definovaná a k elektrodynamické urychlovací síle přistupuje ještě tlaková vlna. V některých zařízeních pro urychlování drobných těles se využívá dokonce jen tlakové vlny od exploze drátku, jejíž velikost může i značně převýšit možnosti klasické chemické trhaviny [40-43] .

Samotná exploze drátku je dosti komplikovaný jev, při kterém látka prochází pevným, kapalným, plyným i plazmatickým skupenstvím. Při dostatečně rychlé explozi lze dosáhnout teplot až  $10^6$  K [35] . Celý děj lze rozdělit na několik fází: 1) ohřev drátku v pevném skupenství, 2) tání drátku, 3) ohřev drátku v kapalném skupenství, 4) vypařování drátku, 5) proudová pauza a vznik výboje. Za některých experimentálních podmínek tyto děje, nebo alespoň některé z nich, probíhají po sobě [35,36] . Při explozích, kde je dodaná energie menší nebo srovnatelná s energií nutnou k celkovému odpaření drátku, dochází k jeho fragmentaci [47] . Rozměry fragmentů podle [47] jsou

$$(5.1) \quad D \approx 4 \sigma / P \quad ,$$

kde  $\sigma$  je povrchové napětí taveniny a  $P$  tlak v tavenině. K jistým nehomogenitám dochází i při rychlých explozích. Například v [49] byly pozorovány laserovými metodami struktury filamentů. Existují ale i experimenty, při kterých zůstala zachována přesná válcová symetrie původního drátku [35].

Někdy je výhodné k explozi používat tenké folie nebo tenkou vrstvu vodivého materiálu napařenou na vhodný nevodivý podklad [43-46]. Masky (clony) přiložené na napařenou vrstvu způsobí, že se odpaří jen volná část vrstvy. Tak lze tvarem a velikostí clony přesně definovat množství odpařené látky. Exploze tenkých vrstev se opět používá k urychlování drobných těles [43].

V pevném skupenství (fáze 1.) autoři většinou uvažují lineární závislost odporu  $R$  drátku na teplotě  $T$  - viz např. [36]

$$(5.2) \quad R(T) = \rho_0 \frac{l_w}{S_w} \cdot [1 + \alpha_s (T - T_0)]$$

kde  $\rho_0$  je měrný odpor materiálu při pokojové teplotě  $T_0$ ;  $l_w, S_w$  jsou počáteční délka a průřez drátku,  $\alpha_s$  je teplotní součinitel odporu v pevném skupenství.

Při tání (fáze 2.) lze pro odpor psát [37]

$$(5.3) \quad R(t, T) = \int_s \frac{l_w}{S_w} \frac{1}{\frac{\sigma_0}{\sigma_s} + \left( \frac{\rho_s}{\rho_l} \frac{\sigma_s}{\sigma_l} - \frac{\sigma_0}{\sigma_s} \right) \cdot \frac{m(t)}{m_w}} ,$$



kde  $\rho_0$  je hustota při počáteční teplotě,  $\rho_{s,l}$  je hustota při teplotě tání v pevném resp. kapalném skupenství,  $\rho_{s,l}$  je měrný odpor při teplotě tání v pevném resp. kapalném skupenství,  $m(t)$  je hmotnost již roz-tavené části drátku a  $m_w$  je hmotnost celého drátku. Poznamenejme, že pozorovaný odpor v této fázi bývá někdy nižší, než určený ze vztahu (5.3) - tzv. anomální odpor. To může být podle [37] způsobeno tím, že vzhledem ke krátkosti děje periodické uspořádání materiálu ještě po určitou dobu setrvává i v kapalném skupenství (časový rozpad periodické struktury). Potom je ale pro tuto dobu  $\rho_2 = \rho_s$  a formule (5.3) i při rychlých expanzích dává poměrně dobré výsledky.

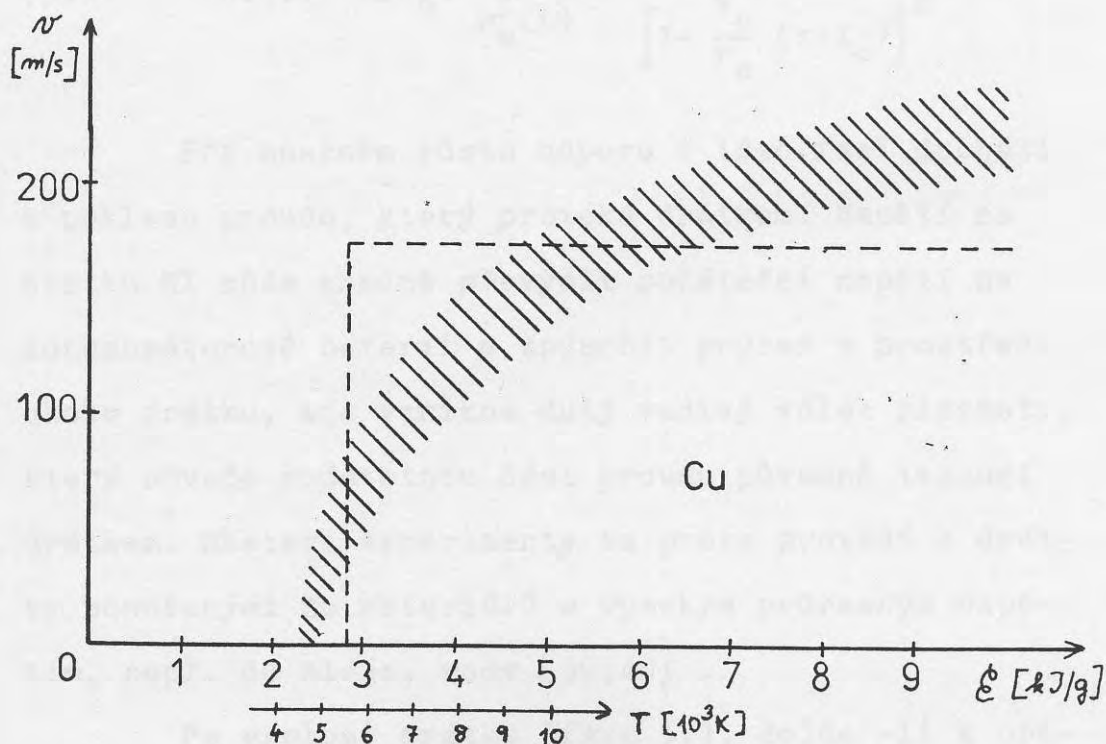
Při zahřívání taveniny (fáze 3.) opět zpravidla vyhovuje lineární teplotní závislost analogická vztahu (5.2). Průřez drátku se ale nyní s teplotou zvětšuje. Vzhledem ke krátkosti dějů bude zvětšování průřezu brzděno setrvačnými silami [37].

K odpařování drátku (fáze 4.) dojde při teplotách značně vyšších než je teplota varu materiálu. Tavenina se chová jako přehřátá kapalina - například pro měď je teplota varu  $T_b = 2850$  K a k nástupu "vlny vypařování" dochází při teplotách  $T \approx 5000$  K [35,36]. Vypařování probíhá od povrchu směrem do nitra drátku. Poloměr drátku  $r_w(t)$  se s časem zmenšuje. Postupující "vlna vypařování" (vaporization wave) odděluje vodi-vou a nevodivou část drátku. Její rychlost je značně

nižší než rychlost zvuku v daném materiálu a pro podkritické teploty byla určena její teoretická závislost na teplotě v práci [36]. Experimentální hodnoty pro měděné drátky převzaté z práce [35] jsou na obr. 23. Tyto průběhy lze nahradit obdélníkovou závislostí [35]

$$(5.4) \quad v(T) = \begin{cases} 0 & T < 5700 \text{ K} \\ v_0 = 175 \text{ m/s} & T \in \langle 5700 \text{ K}, T_k \rangle, \end{cases}$$

kde  $T_k$  je teplota, při které "vlna vypařování" dosáhne centra drátku. Odpor drátku bude nyní záviset na tep-



Obr. 23. Experimentálně naměřené rychlosti vlny vypařování pro různé Cu drátky podle [35] v závislosti na dodané energii (teplotě). Na obrázku je též vyznačen obdélníkový průběh z (5.4).

lotě a na čase. Teplotní závislost je opět přibližně lineární. Dominantní bude závislost odporu na čase, kterou způsobuje zmenšující se poloměr drátku

$$(5.5) \quad r_w(t) = r_0 - v_0 \cdot (t - t_0) \quad ; \quad t \in \left\langle t_0, t_0 + \frac{r_0}{v_0} \right\rangle,$$

kde  $r_0$  je poloměr drátku a  $t_0$  čas na počátku této fáze. Tato závislost povede k růstu odporu nade všechny meze pro  $r_w \rightarrow 0$ . Proto budeme považovat podle [35] teplotní závislost v této fázi za zanedbatelnou a položíme

$$(5.6) \quad R(t) = R(t_0) \frac{r_0^2}{r_w^2(t)} = \frac{R(t_0)}{\left[1 - \frac{v_0}{r_0} (t - t_0)\right]^2} .$$

Při značném růstu odporu v této fázi dochází k poklesu proudu, který protéká drátkem. Napětí na drátku  $RI$  může značně převýšit počáteční napětí na kondenzátorové baterii a způsobit průraz v prostředí okolo drátku, kde vznikne dutý vodivý válec plazmatu, který odvede podstatnou část proudu původně tekoucí drátkem. Některé experimenty se proto provádí s drátky ponořenými do materiálů s vysokým průrazným napětím, např. do oleje, vody [39,40] .

Po explozi drátku (fáze 5.), dojde -li k opětovnému obnovení proudu (průrazu), má měrný odpor  $\rho$  plazmatu tvar [48]

$$(5.7) \quad \varphi(T) = \varphi(T_E) \cdot \left[ (1-\alpha) \frac{T}{T_E} + \alpha \left( \frac{T}{T_E} \right)^{3/2} \right],$$

kde  $\alpha$  je stupeň ionizace, který lze určit v prvním přiblížení ze Sahovy rovnice,  $T_E$  je počáteční teplota této fáze.

Celkovou dobu exploze  $t_k$  autoři zpravidla určují z integrálu akce

$$(5.8) \quad S(t) = \int_0^{Q(t)} I \, dQ = \int_0^t I^2 dt.$$

Je totiž teoreticky i experimentálně potvrzeno [35,38], že

$$(5.9) \quad S(t_k) = g \cdot S_w^2,$$

kde  $S_w$  je průřez drátku a  $g$  je konstanta pro daný materiál.

Nyní by bylo třeba řešit obvodovou rovnici a rovnici energetické bilance drátku (rovnici pro teplotu) při jednotlivých dějích. V této části práce se budeme zabývat vypařováním drátku (fáze 4.). Tento děj je analyticky řešen v [35] s odporem ve tvaru (5.6) při konstantním napětí na kondenzátorové baterii. Ukážeme, že je možné najít přehledné řešení ve tvaru mocninné řady i při skutečném průběhu napětí na kondenzátorové baterii a popíšeme některé vlastnosti nalezeného řešení.

5.2. Řešení obvodové rovnice s vlnou vypařování  
ve tvaru mocninné řady

Vyjděme z obvodové rovnice

$$(5.10) \quad L_0 \frac{dI}{dt} + \frac{R(t_0)}{\left[1 - \frac{v_0}{r_0} \cdot (t - t_0)\right]^2} I + \frac{1}{C_0} \int_{t_0}^t I(t) dt =$$

$$= U(t_0) \quad ; \quad t \in \left( t_0, t_0 + \frac{r_0}{v_0} \right) ,$$

kde  $L_0, C_0$  jsou parametry vnějšího obvodu,  $R(t_0)$  je počáteční odpor drátku (odpor obvodu zanedbáváme) a  $U(t_0)$  je napětí na kondenzátorové baterii v čase  $t_0$ . Zavedeme-li bezrozměrný čas a proud

$$(5.11) \quad \tau = \frac{v_0}{r_0} (t - t_0)$$

$$(5.12) \quad z = \frac{v_0}{r_0} \frac{L_0}{U(t_0)} I$$

a bezrozměrné koeficienty

$$(5.13) \quad \Delta = \frac{R(t_0)}{2L_0} \frac{r_0}{v_0}$$

$$(5.14) \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{r_0}{v_0}$$

přejde rovnice (5.10) do tvaru

$$(5.15) \quad \frac{dz}{d\tau} + 2\Delta \frac{z}{(1-\tau)^2} + \Omega^2 \int_0^\tau z(\tau) d\tau = 1 ,$$

kde  $\zeta \in (0, 1)$  a počáteční podmínka je

$$(5.16) \quad \zeta(0) = \frac{v_0}{r_0} L_0 \frac{I(t_0)}{U(t_0)} .$$

Nyní provedeme substituci

$$(5.17) \quad \zeta(\tau) = (1-\tau)^2 f(\tau)$$

a pro  $f(\tau)$  získáme rovnici

$$(5.18) \quad (1-\tau)^2 f'(\tau) - 2(1-\tau)f(\tau) + 2\Delta f(\tau) + \\ + \Omega^2 \int_0^\tau (1-\tau)^2 f(\tau) d\tau = 1$$

s počáteční podmínkou

$$(5.19) \quad f(0) = \zeta(0) .$$

Řešení budeme hledat ve tvaru mocninné řady

$$(5.20) \quad f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k .$$

Po dosazení rozvoje (5.20) do rovnice (5.18), roznásobení řad polynomy  $(1-\tau)$  a  $(1-\tau)^2$  a provedení derivace a integrace člen po členu dostaneme

$$(5.21) \quad [a_1 - 2(1-\Delta)a_0] + [2a_2 - 2(2-\Delta)a_1 + 2(1 + \frac{\Omega^2}{2})a_0]\tau +$$

$$\begin{aligned} & + \left[ 3a_3 - 2(3-\Delta)a_2 + \left(3 + \frac{\Omega^2}{2}\right)a_1 - \Omega^2 a_0 \right] \tau^2 + \\ & + \sum_{m=3}^{\infty} \left[ (n+1)a_{n+1} - 2(n+1-\Delta)a_n + \left(n+1 + \frac{\Omega^2}{n}\right)a_{n-1} - \right. \\ & \quad \left. - 2\frac{\Omega^2}{n} a_{n-2} + \frac{\Omega^2}{n} a_{n-3} \right] = 1 . \end{aligned}$$

porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin  $\tau$  s využitím počáteční podmínky získáme rekurentní formuli

$$\begin{aligned} a_0 &= 2(0) \\ a_1 &= 2(1-\Delta)a_0 + 1 \\ (5.22) \quad a_2 &= (2-\Delta)a_1 - \left(1 + \frac{\Omega^2}{2}\right)a_0 \\ a_3 &= \frac{1}{3} \left[ 2(3-\Delta)a_2 - \left(3 + \frac{\Omega^2}{2}\right)a_1 + \Omega^2 a_0 \right] \\ a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left[ 2(n+1-\Delta)a_n - \left(n+1 + \frac{\Omega^2}{n}\right)a_{n-1} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\Omega^2}{n} a_{n-2} - \frac{\Omega^2}{n} a_{n-3} \right]; \quad n \geq 3 . \end{aligned}$$

Zabývejme se nyní konvergencí nalezené řady. Označíme -li

$$(5.23) \quad D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} ,$$

můžeme za pomoci (5.22) psát

$$(5.24) \quad D_n = \frac{1}{n+1} \left[ 2(n+1-\Delta) - (n+1 + \frac{\Omega^2}{n}) \frac{1}{D_{n-1}} + \right. \\ \left. + \frac{2\Omega^2}{n} \frac{1}{D_{n-1}D_{n-2}} - \frac{\Omega^2}{n} \frac{1}{D_{n-1}D_{n-2}D_{n-3}} \right] .$$

Limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$  máme

$$(5.25) \quad D = 2 - \frac{1}{D} \quad , \text{ neboli}$$

$$(5.26) \quad D = 1 \quad ,$$

kde jsme označili  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ . Podle D'Alambertova kriteria bude řada konvergovat, je-li

$$(5.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \tau^{n+1}}{a_n \tau^n} < 1$$

a tedy podle (5.26) pro  $\tau < 1$  nalezená řada konverguje. Pro  $\tau \rightarrow 1$  odpor (5.6) diverguje a proud  $z$  musí být nulový. Z tohoto důvodu byla volena substituce (5.17), která zajistí, že pro každý konečný počet členů řady  $f(\tau)$  bude  $z(1) = 0$ .

### 5.3. Výsledky

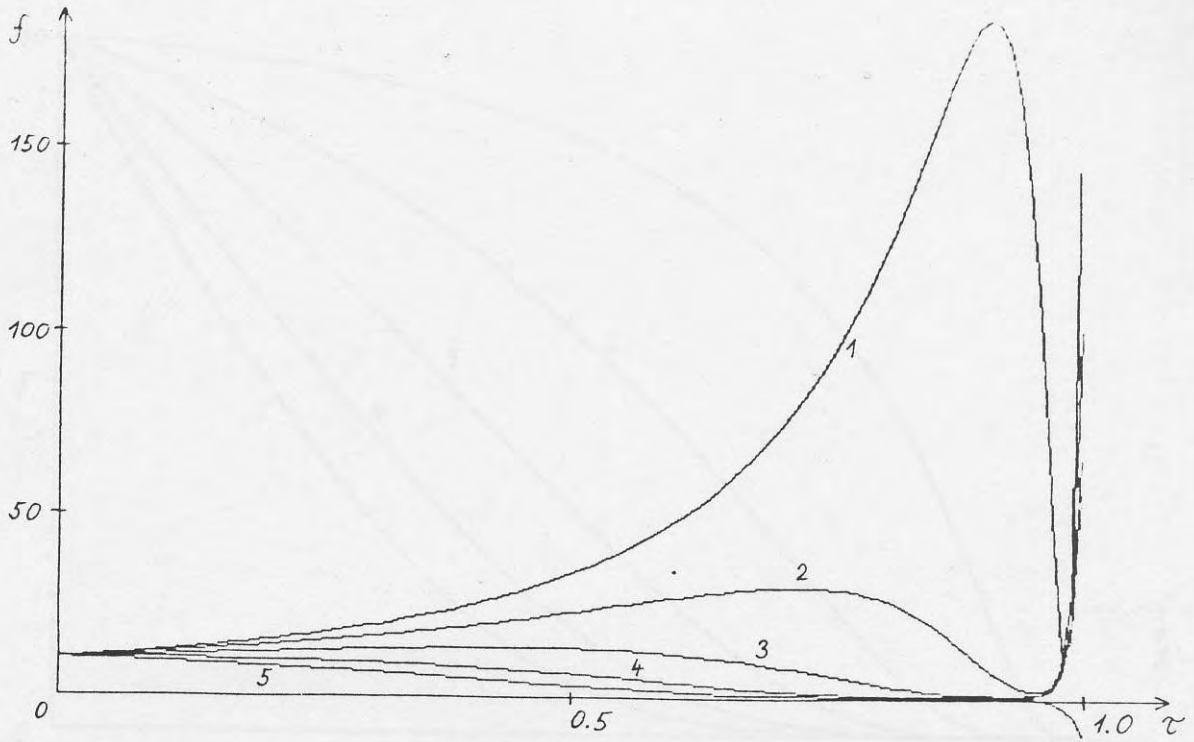
Na obr. 24 až 29 vidíme průběhy funkcí  $f(\tau)$ ,  $z(\tau) = (1-\tau)^2 f(\tau)$  a  $\mathcal{P}(\tau) = (1-\tau)^2 f^2(\tau)$  pro různé hodnoty koeficientů  $\Delta$  a  $\Omega$ . Závislosti byly vykresleny pro 100 členů řady (5.20). Urychlovači z



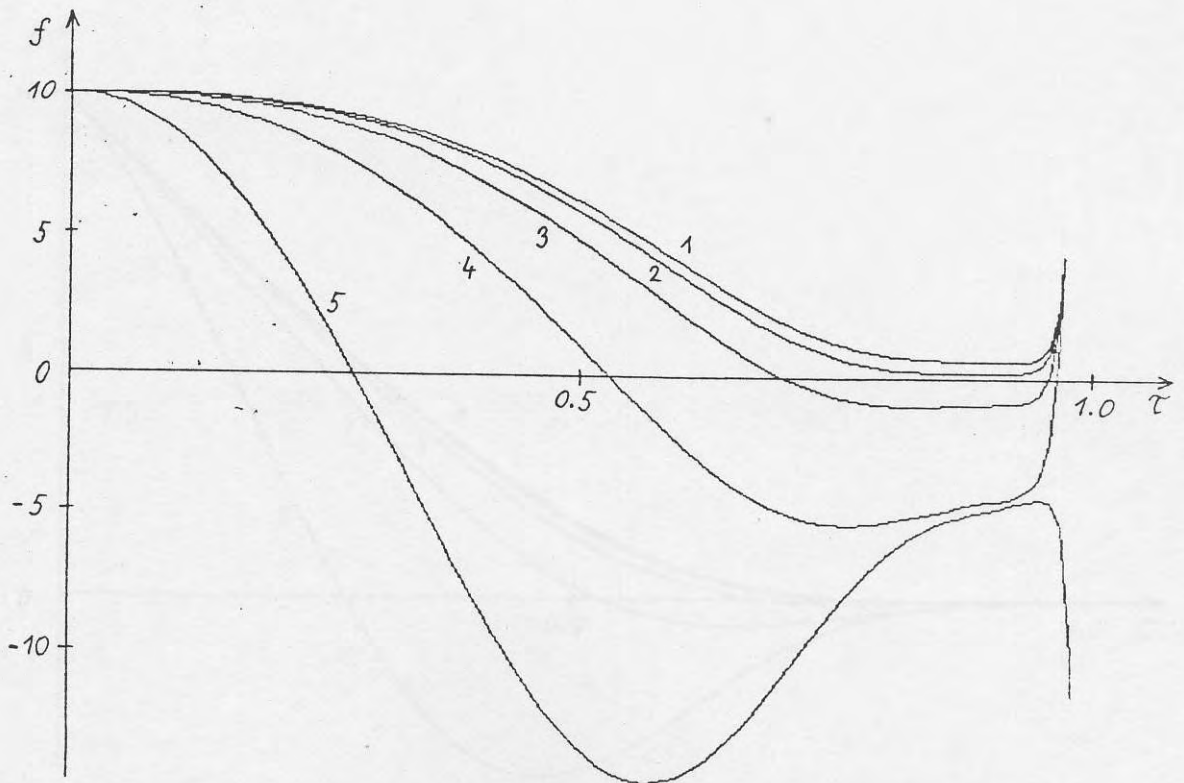
tabulky 3 odpovídají hodnoty  $\Delta \doteq 1$  ;  $\Omega \doteq 0,015$ . Funkce  $f(\tau)$  má význam bezrozměrného napětí  $RI$  na drátku,  $z(\tau)$  je bezrozměrný proud a  $\mathcal{P}(\tau)$  bezrozměrný výkon  $RI^2$  uvolňovaný v drátku.

Pro malé hodnoty  $\Delta$  má napětí na drátku výrazné maximum a proudová závislost má konkávní charakter. Celková energie dodaná drátku v této fázi je úměrná velikosti plochy mezi křivkou  $\mathcal{P}(\tau)$  a osou  $\tau$ , tedy  $\int_0^1 \mathcal{P}(\tau) d\tau$  a může být při různých hodnotách parametrů  $\Delta$  a  $\Omega$  značně rozdílná. Při hodnotách  $\Omega > \Delta$  proud překmitne i do záporných hodnot.

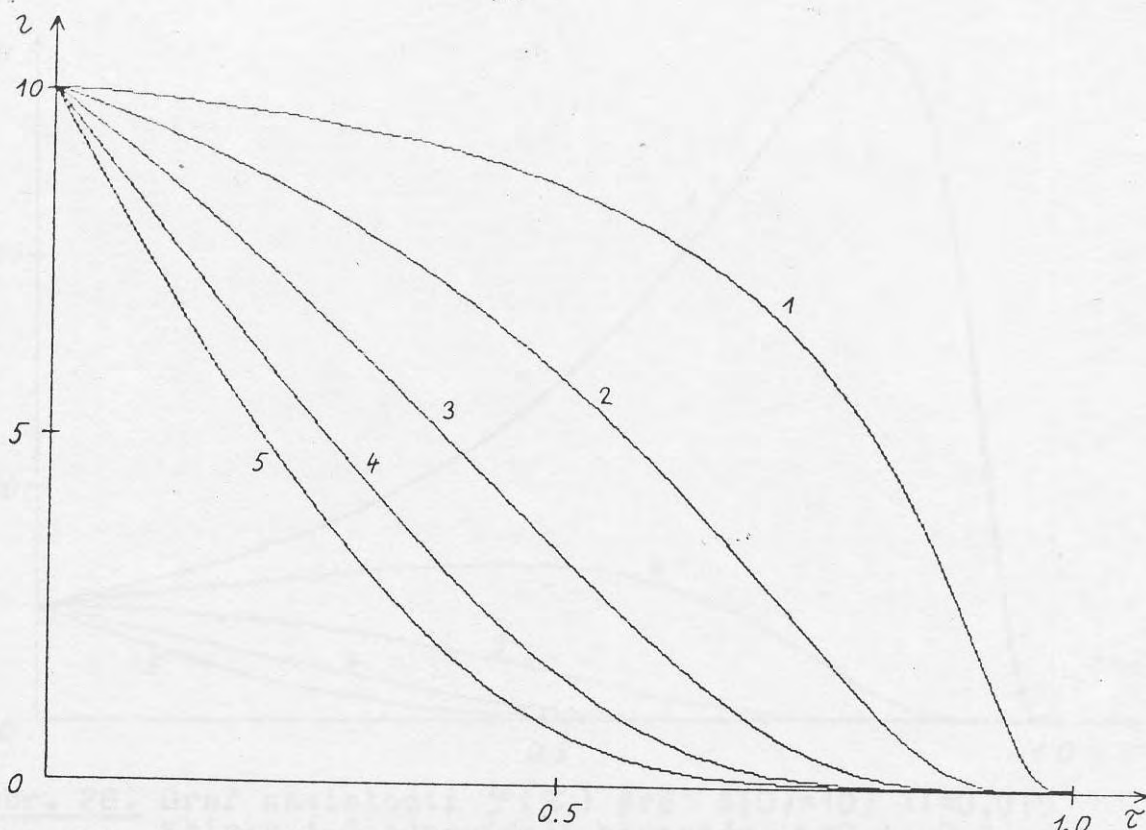
Odpařování drátku je jednou z nejdůležitějších fází exploze. Nalezení průběhu proudu tekoucího drátkem, průběhu napětí na drátku a výkonu uvolňovaného v drátku má proto značný význam pro pochopení fyzikálních procesů uplatňujících se při explozi drátků. Při řešení jsme uvažovali případ, kdy v okolním prostředí nedochází k průrazu a vzniku výboje. Nalezli jsme řešení ve tvaru konvergentní mocninné řady s koeficienty danými jednoduchou rekurentní formulí, která je snadno zpracovatelná na počítači.



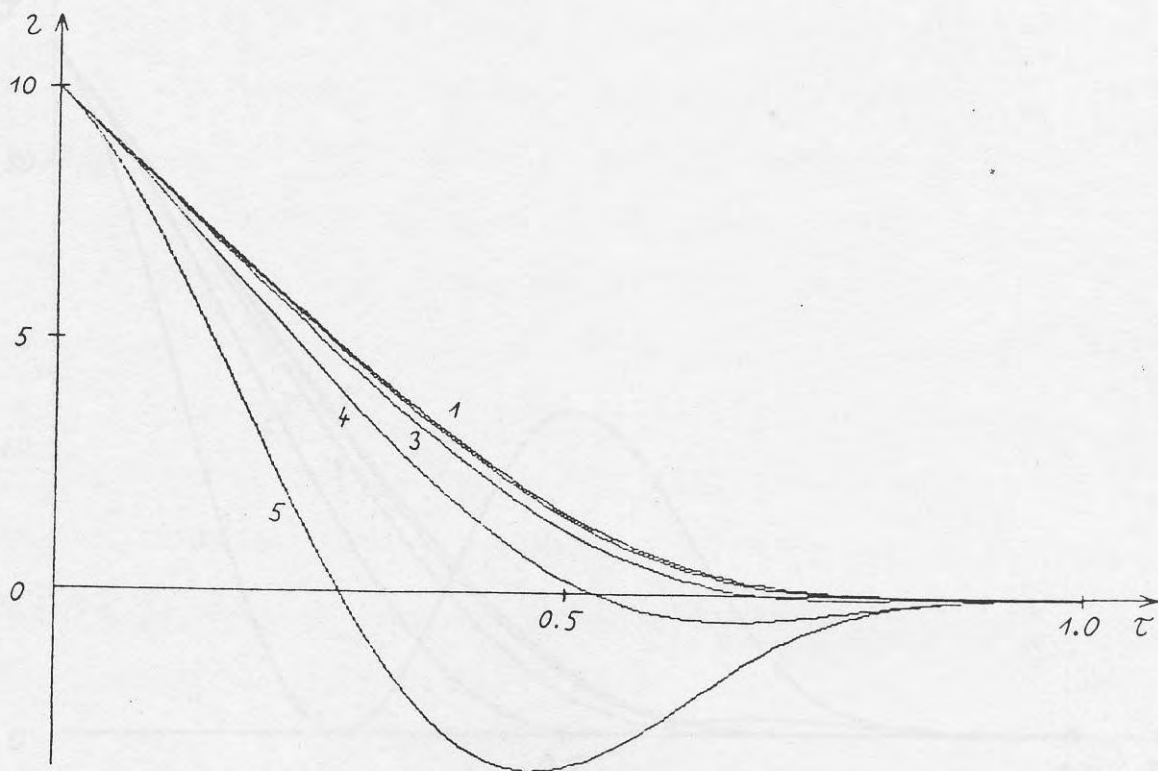
Obr. 24. Graf závislosti  $f(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Omega=0,015$ .  
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Delta=0,1$ ;  $0,3$ ;  
 $0,6$ ;  $1$ ;  $4$ .



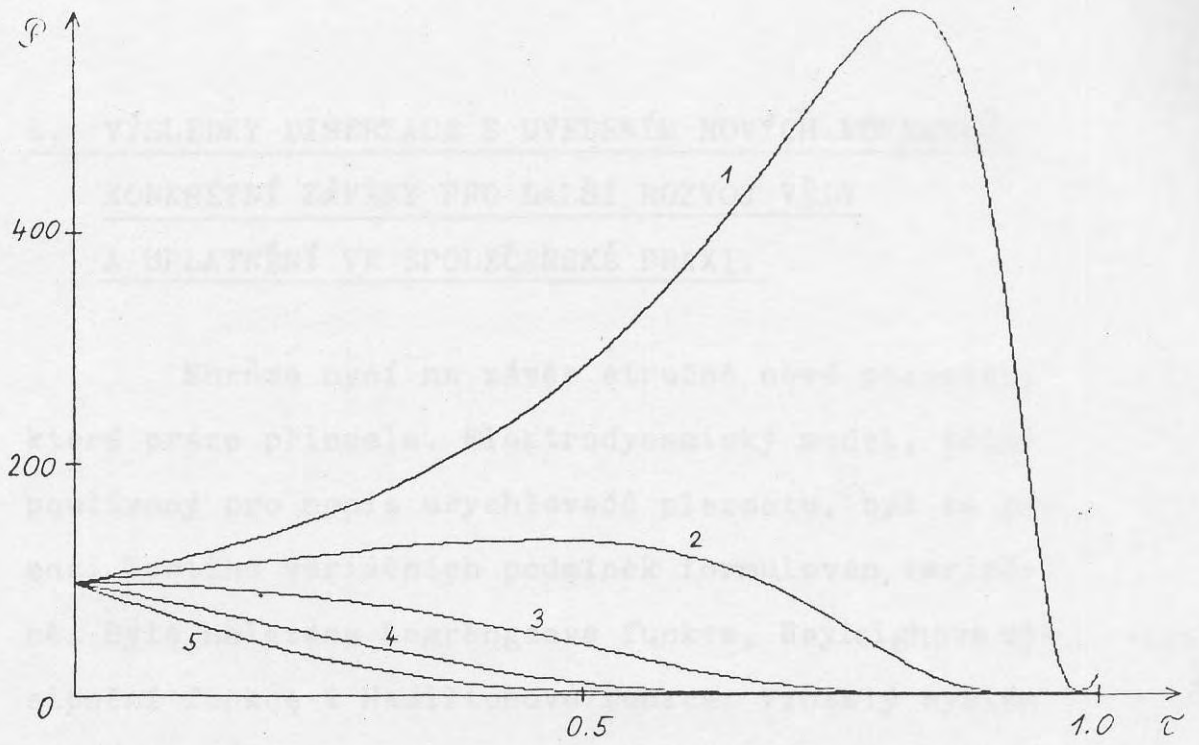
Obr.25. Graf závislosti  $f(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Delta=1$ .  
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Omega=0$ ;  $0,5$ ;  $1$ ;  
 $2$ ;  $5$ .



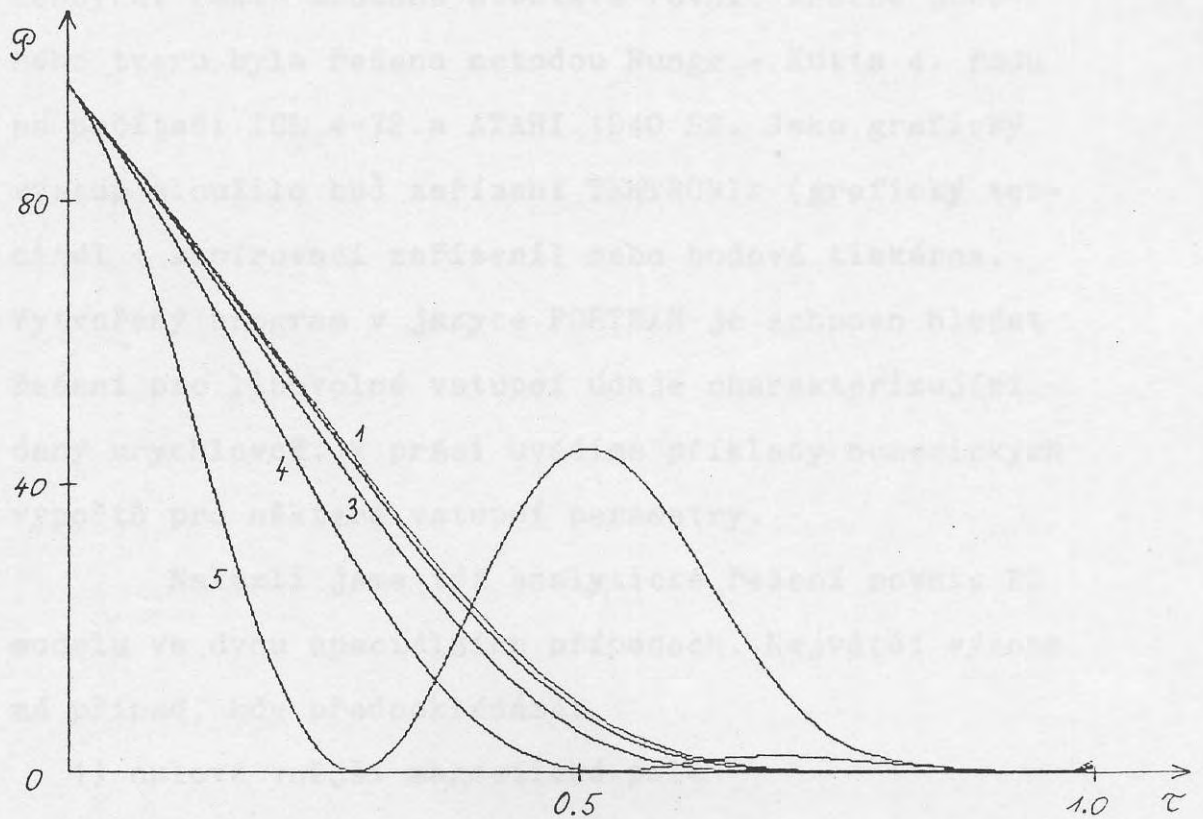
Obr. 26. Graf závislosti  $z(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Omega=0,015$ .  
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Delta=0,1$ ;  $0,3$ ;  
 $0,6$ ;  $1$ ;  $4$ .



Obr. 27. Graf závislosti  $z(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Delta=1$ .  
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Omega=0$ ;  $0,5$ ;  $1$ ;  
 $2$ ;  $5$ .



Obr. 28. Graf závislosti  $\mathcal{P}(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Omega=0,015$   
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Delta=0,1$ ;  $0,3$ ;  
 $0,6$ ;  $1$ ;  $4$ .



Obr. 29. Graf závislosti  $\mathcal{P}(\tau)$  pro  $z(0)=10$ ;  $\Delta=1$ .  
Křivky 1-5 odpovídají hodnotám  $\Omega=0$ ;  $0,5$ ;  $1$ ;  
 $2$ ;  $5$ .

6. VÝSLEDKY DISERTACE S UVEDENÍM NOVÝCH POZNATKŮ.  
KONKRÉTNÍ ZÁVĚRY PRO DALŠÍ ROZVOJ VĚDY  
A UPLATNĚNÍ VE SPOLEČENSKÉ PRAXI.

Shrňme nyní na závěr stručně nové poznatky, které práce přinesla. Elektrodynamický model, běžně používaný pro popis urychlovačů plazmatu, byl za pomoci Tontiho variačních podmínek formulován variačně. Byla nalezena Lagrangeova funkce, Rayleighova disipační funkce i Hamiltonova funkce. Vzniklý systém Hamiltonových obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu byl přetransformován do bezrozměrných proměnných. Takto získaná soustava rovnic značně obecného tvaru byla řešena metodou Runge - Kutta 4. řádu na počítači ICL 4-72 a ATARI 1040 ST. Jako grafický výstup sloužilo buď zařízení TEKTRONIX (grafický terminál + kopírovací zařízení) nebo bodová tiskárna. Vytvořený program v jazyce FORTRAN je schopen hledat řešení pro libovolné vstupní údaje charakterizující daný urychlovač. V práci uvádíme příklady numerických výpočtů pro některé vstupní parametry.

Nalezli jsme též analytické řešení rovnic ED modelu ve dvou speciálních případech. Největší význam má případ, kdy předpokládáme:

- 1) nulové vnější magnetické pole
- 2) proud ve tvaru  $A \cdot \exp(-\delta t) \sin(\omega t)$
- 3) hmotnost zhustku a indukčnost obvodu rostou li-

neárně s polohou  $x$  zhustku v urychlovači

- 4) zhustek je urychlován pouze elektrodynamickými silami .

Za těchto předpokladů jsme našli řešení pro časový průběh  $v(t)$  rychlosti zhustku v urychlovači. Našlezený vztah může mít velký význam pro svou jednoduchost a snadnou aplikovatelnost. Bez zdlouhavých numerických řešení diferenciálních rovnic ED modelu z něho můžeme přímo určit průběh rychlosti  $v(t)$ .

V další části práce byl formulován dvoubodový model pohybu zhustku v urychlovači plazmatu pro urychlovače v silném vnějším magnetickém poli. Tento model popisuje odděleně pohyb elektronů a iontů. Elektrony a ionty na sebe v urychlovači působí prostřednictvím polarizačního pole a srážek.

Ukázali jsme, že dvoubodový model za určitých předpokladů splývá s ED modelem, popisuje jev anisotropní vodivosti plazmatu a jev polarizace plazmatu. Z výpočtů vyplynulo, že polarizace plazmového zhustku je možná. Byly nalezeny jednoduché výrazy pro velikost polarizační délky  $l_x$  a polarizační energii  $W_p$ . Polarizační délka může dosáhnout při vnějším magnetickém poli 3T hodnot řádově  $10^{-9}$  m. Polarizační energie je rostoucí funkcí vnějšího magnetického pole, ale pro  $B_0 \rightarrow \infty$  má konečnou limitu. Pro urychlovač z tabulky 1 vychází maximální polarizační energie  $W_{pmax} \approx 5 \cdot 10^{-7}$  J. V energetické bilanci pohybujícího se

zhustku je tedy polarizační energie zcela zanedbatelná. Jev polarizace však může mít určitý význam při vytváření vnitřní struktury plazmového zhustku.

Pro polarizaci plazmatu byla opět nalezena variační formulace, tj. Lagrangeova, Rayleighova a Hamiltonova funkce.

V poslední části práce byl řešen problém rovnice elektrického obvodu explodujícího drátku ve fázi odpařování drátku. Při odpařování se zmenšuje vodivý průřez drátku a jeho elektrický odpor roste nade všechny meze. Řešení obvodové rovnice s vlnou vypařování jsme našli ve formě mocninné řady s koeficienty danými jednoduchou rekurentní formulí. Konvergence řady byla dokázána za pomoci D'Alambertova kritéria. Na rozdíl od práce [36], ve které bylo nalezeno analytické řešení pro případ konstantního napětí na kondenzátorové baterii, jsme naším postupem určili řešení ve zcela obecném případě.

Iniciace výboje explodujícím drátkem v urychlovačích plazmatu pro urychlování hmotných těles patří dnes mezi nejatraktivnější a nejdůležitější aplikace urychlovačů plazmatu. Vzhledem k tomu, že odpařování je hlavní fází explozí drátků, může mít nalezení průběhu proudu tekoucího drátkem, průběhu napětí na drátku a výkonu uvolňovaného v drátku značný význam pro odhad vhodných parametrů obvodu i pro pochopení fyzikálních procesů uplatňujících se při ex-

plozích drátků.

Při řešení jsme uvažovali případ, kdy v okolním prostředí nedochází k průrazu a vzniku výboje. Některá typická řešení jsou vykreslena za pomoci počítače pro 100 členů nalezené řady.

Z uvedeného je patrné, že cíle práce byly splněny. Práce poskytla některé nové, dosud neznámé poznatky o procesu urychlování plazmových zhustků v urychlovačích plazmatu, jejichž uplatnění je dnes nesporné v celé řadě odvětví soudobého vědeckotechnického rozvoje.

Urychlovače plazmatu se používají v plazmochemii, při nanášení tenkých vrstev, při simulačních studiích v astronautice i astrofyzice, jako korekční raketové motory, při přemísťování a urychlování drobných těles, rozvíjejí se i vojenské aplikace.

Kandidátská disertační práce navazuje na popis dynamiky urychlovacího procesu v rámci elektrodynamického modelu, dále tento model rozvíjí a zobecňuje na případ rozdílného pohybu elektronů a iontů. Nachází Lagrangeovu formulaci jak ED modelu, tak dvoubodového modelu. Práce se zabývá také jedním z nejdůležitějších způsobů iniciace výboje v urychlovači - explozemi drátků.

Některé nové poznatky v práci nalezené jsou publikovány v pracech [50-59], [61], které se zabývají touto problematikou.



Je mojí milou povinností poděkovat svému školiteli Doc. Ing. Josefu Malochovi, DrSc. za pomoc při uskutečnění této práce.

Prohlašuji, že práci jsem zpracoval samostatně a uvedl jsem veškerou použitou literaturu v seznamu literatury.

- [ 4 ] Jelen J.: Rázně vlny a pulsní urychlování plazmatu; habilitační práce; FEL ČVUT, Praha 1972
- [ 5 ] Kubek P.: Otázký rovnováhy a relaxace v urychlování plazmatu; kand. diz. práce; FEL ČVUT, Praha 1979
- [ 6 ] Kracík J.: Czech. J. Phys. B14, 683(1964)
- [ 7 ] Maloch J. a J.: Czech. J. Phys. B20, 1186(1970)
- [ 8 ] Kofíal J., Maloch J., Šteplík Z., Šobor Z.: Czech. J. Phys. B25, 1208(1975)
- [ 9 ] Kellivode L., Rosenkrantz J.: Czech. J. Phys. B29, 1392(1978)
- [ 10 ] Kellivode L., Rosenkrantz J.: Czech. J. Phys. B29, 407(1979)
- [ 11 ] Maloch J., Kellivode L., Petárek K.: Czech. J. Phys. B34, 285(1984)
- [ 12 ] Jelen J.: Czech. J. Phys. B17, 479(1967)
- [ 13 ] Collier D.F., Einke G.R.: The Physics of Fluids Vol. 14, 22(1971)
- [ 14 ] Tenti E.: Bull. Sciences Acad. R. de Belgique 54, 137, 262(1959)

LITERATURA

- [ 1 ] Kolesnikov P.M.: Elektrodinamičeskoje uskorenije plazmi; ATOMIZDAT, Moskva 1971
- [ 2 ] Kracík J., Maloch J., Šobra K.: Urychlovače plazmatu a jejich použití; ACADEMIA, Praha 1983
- [ 3 ] Jelen J.: Kand. dis. práce; FEL ČVUT, Praha 1965
- [ 4 ] Jelen J.: Rázové vlny a pulsní urychlování plazmatu; habilitační práce; FEL ČVUT, Praha 1972
- [ 5 ] Kubeš P.: Otázky rovnováhy a relaxace v urychlovaném plazmatu; kand. dis. práce; FEL ČVUT, Praha 1979
- [ 6 ] Kracík J.: Czech. J. Phys. B14,683(1964)
- [ 7 ] Maloch J. a d.: Czech.J. Phys. B20,1186(1970)
- [ 8 ] Maftul J., Maloch J., Staněk Z., Šobra K.: Czech. J. Phys B25,1208(1975)
- [ 9 ] Kalivoda L', Rosenkranz J.: Czech. J. Phys.B28, 1342(1978)
- [10] Kalivoda L', Rosenkranz J.: Czech. J. Phys.B29, 401(1979)
- [11] Maloch J., Kalivoda L', Petýrek K.: Czech. J. Phys. B34, 285(1984)
- [12] Jelen J.: Czech. J. Phys. B17,475(1967)
- [13] Collier D.W., Zinke O.H.: The Physics of Fluids Vo.14,72(1971)
- [14] Tonti E.: Bull. Sciences Acad. R. de Belgique 55 137,262(1969)

- [15] Powell J.D., Battah J.H.: J.Appl.Phys.52,2717  
(1980)
- [16] Maloch J.: Diagnostika pulsního plazmatu;  
kand. dis. práce; FEL ČVUT, Praha 1971
- [17] Petýrek K.: Kolejnicový urychlovač plazmatu;  
kand. dis práce; FEL ČVUT, Praha 1983
- [18] Arcimovič L.A.: Žurnal eksp. i teor. fiz. 33,  
3(1957)
- [19] Wright J.K.: Proc. IV. Int. Conf. Phen. Ion.  
Gases,II 1105, Uppsala 1959
- [20] Marshall J.: The Physics of Fluids 3,134(1960)
- [21] Bernard A. et all.: Nucl. Instrum. Methods 145,  
191(1977)
- [22] Komelkov V.S. a d.: Fizika plazmi 4,764(1978)
- [23] Arcimovič L.A.: Plazmennije uskoriteli; MAŠINO-  
STROJENIE, Moskva 1973
- [24] Sokolowski M.: J.Cryst.Growth 54,519(1981)
- [25] Michalski A., Romanowski Z.: J.Cryst. Growth 61,  
675(1983)
- [26] Podgornyj I.M. a d.: UFN 98,409(1969)
- [27] Kracík J., Maloch J.: Czech.J.Phys. B20,677(1970)
- [28] Šobra K.: Tvar proudové vrstvy mezi elektrodami  
kolejnicového urychlovače plazmy; Studie ČSAV;  
ACADEMIA, Praha 1974
- [29] Berezov D.V. a d.: Žur. těch. fiz.43(6),1184(1973)
- [30] Chen F.F.: Úvod do fyziky plazmatu; ACADEMIA,  
Praha 1984

- [31] Chace W.G., Moore H.K.: Exploding Wires, Vo.1; Plenum Press, New York 1959
- [32] Chace W.G., Moore H.K.: Exploding Wires, Vo.2; Plenum Press, New York 1962
- [33] Chace W.G., Moore H.K.: Exploding Wires, Vo.3; Plenum Press, New York 1964
- [34] Chace W.G., Moore H.K.: Exploding Wires, Vo.4; Plenum Press, New York 1968
- [35] Bennett F.D.: High-Temperature Exploding Wires; in Progress in High Temperature Physics and Chemistry, Ed. by Rouse C.A.; Pergamon Press 1968
- [36] Bennet F.D., Kahl G.D.: Vaporization Waves in Metals; viz [34] str.1
- [37] Maninger R.C.: Preburst Resistance and Temperature of Exploding Wires; viz [32] ,str.109
- [38] Anderson G.W., Neilson F.W.: Use of the "Action Integral" in Exploding Wire Studies; viz [31] , str. 97
- [39] Kersavage J.A.: Pressure Enviroments Created by Wires Exploded in Water; viz [32],str. 225
- [40] Scherrer V.E.: An Exploding Wire Hypervelocity Projector; viz[32] ,str. 235
- [41] Bohn J.L., Nadig F.H., Simmons W.F.: Acceleration of Small Particles by Means of Exploding Wires; viz [33] , str. 339
- [42] O'Keefe J.D., Scully C.N.: Axial Flow from a Radially Confined Expl. Cylinder; viz [33], str.211

- [43] Rosebrock T.L., Clingman D.L., Gubbins D.G.:  
Repetitive Pulsed Acceleration of Plasmas  
Derived from Exploding Metal Films; viz [33],  
str. 315
- [44] Woffinden G.J.: Exploding Metal Films; viz [33],  
str. 193
- [45] Guenther A.H., Wunsch D.C., Soapes T.D.: Acce-  
leration of Thin Plates by Exploding Foil Tech-  
niques; viz [32] , str. 279
- [46] Gazaix M. e d.: J.Appl.Phys.56(11),3209(1984)
- [47] Vijayan T., Rohatgi V.K.: IEEE Transactions on  
Plasma Science PS-13(4),197(1985)
- [48] Peratt A.L.: J.Appl.Phys.54(11),6292(1983)
- [49] Dorochin L.A., Smirnov V.P., Tulupov M.V., Car-  
fin V.J.: Žurnal techničeskoj fiziki 54(3),  
511(1984)
- [50] Maloch J., Kulhánek P.: Czech.J. Phys. B35,  
977(1985)
- [51] Kulhánek P., Maloch J.: Czech. J. Phys. B37,  
561(1987)
- [52] Kulhánek P., Maloch J., Valenta R., Vondráček S.:  
Acta Phys. Slovaca 37(2), 130(1987)
- [53] Kulhánek P., Uzel M., Maloch J.: Acta Phys.  
Slovaca 37, v tisku
- [54] Kulhánek P.: Inversní variační problém pro ko-  
lejnicový urychlovač plazmatu; práce ke kandi-  
dátskému minimu

- [55] Maloch J., Kulhánek P., Šobra K.: Variational Formulation of Accelerating Process in a Rail Plasma Accelerator; XIII SPIG, Šibenik, Jugoslavie 1986
- [56] Maloch J., Uzel M., Kulhánek P.: One-dimensional Steady Flows in Rail Plasma Accelerators; ICPiG XVIII, Swansea, Anglie 1987
- [57] Maloch J., Kulhánek P., Kracík J.: Elektromagnetické urychlovače plazmatu a jejich aplikace; V. symposium o elementárních procesech a chemických reakcích v nízkoteplotní plazmě, Banská Štiavnica 1984
- [58] Valenta R., Kulhánek P., Maloch J.: Rozbor vlivu hmotnosti oblouku na jeho pohyb v elektromagnetickém poli; VI seminář "Fyzika spínacího oblouku", Vrátná dolina 1986
- [59] Maloch J., Kulhánek P., Kracík J.: Technika el. přístrojů a rozváděčů 29(2),1(1984)
- [60] Maloch J., Staněk Z., Šobra K., Valenta R.: Funkční model lineárního urychlovače; Zpráva k tematickému úkolu, FEL ČVUT 1985
- [61] Kulhánek P., Maloch J., Staněk Z.: Průnik ionizovaných plynů do osiv I,II; dílčí zprávy k HS 39/81, FEL ČVUT 1984,1985